

얇은 자성체를 갖는 자기회로의 자장해석을 위한 유한요소법

김권식*⁰ 이준호* 이기식* 이복용**

* 단국대학교 ** 대우공업전문대학

F.E.M for Analysis of Magnetic Circuits with thin Magnetic Materials

Kim Kwon-Sik*⁰ Lee Joon-Ho* Lee Ki-Sik* Lee Bok-Yong**

* Dankook Univ. ** Daeyeu Tech Coll.

Abstract

This paper presents a method, which couples the boundary integral terms in the thin magnetic materials with standard FEM used to analyze the rest of it, for analyzing the magnetic fields. The proposed method retains the sparsity and symmetry of the final system matrix, the merits of standard FEM and eliminates the need for finite elements in the thin magnetic materials, thereby reducing necessary capacity of computer memory and computing time.

To verify the usefulness of the proposed algorithm, an examples, coil with source currents and thin magnetic materials, is chosen and analyzed. the results are compared with those of the standard FEM by coarse mesh and the proposed method, using standard FEM by fine mesh as a reference.

1. 서론

공학분야에서 제기되는 물리적인 제반 현상들은 일반적으로 복잡한 분포특성을 갖는 연속적인 현상이라 할 수 있으며 이와 같은 현상을 수치해석적 기법으로 해석하는 방법 중의 하나가 유한요소법(Finite Element Method)이다.[1]. [4] 이 기법의 유용성은 해석하고자 하는 모델의 기하학적 구조가 복잡할수록 더욱 두드러진다. 그러나 고부자율을 갖고 있는 자기코어 사이의 갭, 얇은 자성체, 대형유입변압기의 권자체로 사용되는 고도전율의 박판(薄板)(thin plate) 등 두께가 매우 얇은 대상을 유한요소법으로 해석하고자 할 때 다음과 같은 문제점을 갖게 된다.

- (1) 오차를 줄이기 위해서 얇은 두께를 매우 많은 요소로 분할하기 때문에 요소 분할의 어려움이 생긴다.
- (2) 요소 분할을 많이 하면 많은 절점들이 발생하기 때문에

미지수가 증가하고, 컴퓨터의 많은 기억용량 및 계산시간을 요하는 문제점이 발생한다.

- (3) 편평한 삼각형요소로 분할하면 삼각형의 길이 나빠져서 정도(精度)가 떨어진다.

이상과 같은 단점을 보완하기 위해 본 논문에서는 해석대상과 주위의 장(場)사이의 물리적 성질에 입각한 해석대상 내를 요소로 분할하지 않고 유한요소법의 경계적분항을 계산해서 자체를 해석 하는 알고리즘을 제시하였다. 그 기본 개념은 유한요소법과 경계요소법의 혼합법[5], [6]에 의한 방법과 비슷하나 제시한 방법은 기존 유한요소법의 계행렬이 가지는 sparsity와 대칭성을 유지함으로써 혼합법이 갖는 경계 설정에 따른 그린함수를 찾는 문제점과 비대칭 계행렬에 대한 특이적분을 고려치 않아도 된다.[1], [2]

제시한 알고리즘의 유용성 여부를 알아보기 위해 적당한 모델을 선정하여 기존 유한요소법을 적용해서 얻은 결과와 제시한 방법에 의한 결과를 비교 검토하였다.

2. 알고리즘

2.1 가정설정

해석의 간략화를 위하여 기본적인 가정을 둔다.

- (1) 계는 변위전류가 없는 정자계이다.
- (2) 철심의 자기적 특성은 등방성, 선형성이다.
- (3) 계의 모든 랑은 z축 방향으로 변화가 없는($\partial/\partial z=0$) 2차원 문제로 본다.

2.2 지배방정식과 이산화

제2.1절 가정(1), (3)에 의해서 전자장의 Maxwell 방정식과 보조 방정식으로 부터 다음과 같은 지배방정식을 얻을 수 있다.

$$\nabla \times \nu \nabla \times A_z = J_o z \quad (1)$$

여기서 $A(x, y)$: 자기벡터포텐셜, ν : 자기저항율

$J_o(x, y)$: 전원전류밀도

해석영역을 1차 삼각형 요소로 분할하고, 가중잔차법 중 에서 Galerkin법을 사용하면 식(2)로 표현되는 지배방정식을 얻을 수 있다.

$$\int_{\Omega} \nu \left[\frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \frac{\partial A}{\partial y} \right] dx dy - \int_{\Omega} J_0 N dx dy - \int_{\Gamma} \nu N \frac{\partial A}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (2)$$

여기서 N : 보간함수, Ω : 해석영역
 Γ : 구조물의 내, 외영역의 경계
n : Γ 에서의 단위법선벡터

기본 유한요소법에서 식(2)의 경계적분항은 경계조건을 부여함으로써 계산을 하지 않았었다. 그러나 제시한 방법에서는 일반적인 경계이므로 반드시 계산이 이루어져야 한다. 식(2)의 계방정식을 행렬식 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{1b} \\ S_{b1} & S_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_b \end{Bmatrix} \quad (3)$$

여기서 (A) : 절점들이 갖는 포텐셜값, b : 경계상의 절점
(F) : 구동벡터, [S] : 계행렬, i : 내부절점
(B) : 경계적분항으로부터 계산되어지는 항

2.3 경계적분항의 계산

경계상의 한 절점번호를 j라 하면 이점의 경계적분항은 다음과 같다.

$$B_j = - \oint N_j H_t d\Gamma \quad (4)$$

$j = 1, 2, \dots, N_b$

여기서 N_b : 경계상의 절점수

N_j : 절점 j에 대한 형상함수

H_t : 자장의 세기의 접선성분

그림 1 처럼 두께가 없을 경우 식(5)가 유도된다.

$$H_{tj} = \frac{A_1 - A_j}{\mu_R d}$$

$$H_{tj-1} = \frac{A_{1-1} - A_{j-1}}{\mu_R d} \quad (5)$$

$$H_{tj+1} = \frac{A_{1+1} - A_{j+1}}{\mu_R d}$$

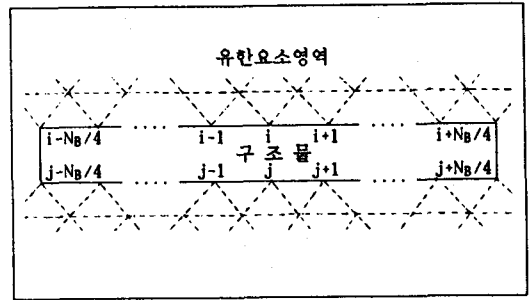


그림 1 구조물의 경계절점
Fig. 1 Boundary nodes on the structure

여기서 μ_R 는 비투자율이고 d는 구조물의 두께이다.

식(4)는 형상함수의 성질에 의해서 다음과 같이 된다.

$$B_j = - \left[\int_{j-1}^j N_j H_t d\Gamma + \int_j^{j+1} N_j H_t d\Gamma \right] \quad (6)$$

식(6)의 제 1 항의 계산은 다음과 같다.

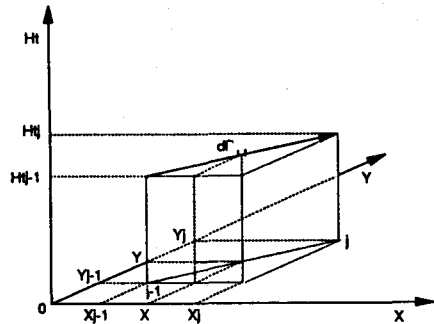


그림 2 [j-1, j] 구간에서의 자장의 세기
Fig. 2 Magnetic field intensity at [j-1, j]

그림 2 으로부터 $N_j = \lambda$ 라 놓으면

$$N_j = \lambda = \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} = \frac{y - y_{j-1}}{y_j - y_{j-1}} \quad (7)$$

이와 같은 수식이 된다. 여기서 $0 \leq N_j = \lambda \leq 1$ 이며 $j(x_j, y_j)$ 절점에서는 1, $j-1(x_{j-1}, y_{j-1})$ 절점에서는 0의 값을 갖는다. 또 식(6)의 $d\Gamma$ 는 다음과 같이 된다.

$$d\Gamma = \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2} d\lambda \quad (8)$$

λ 와 H_t 의 관계는 그림 2 으로부터

$$H_t = \begin{cases} H_{tj} & : (\lambda = 1) \\ H_{tj-1} & : (\lambda = 0) \end{cases} \quad (9)$$

이며 다음과 같이 표현된다.

$$H_t = \lambda H_{tj} + (1-\lambda) H_{tj-1} \quad (10)$$

식(7), (8), (10)를 식(6)의 제1항에 대입 하면 다음과 같은 수식이 나온다.

$$- \left[\frac{1}{3} H_{tj} + \frac{1}{6} H_{tj-1} \right] \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2} \quad (11)$$

식(6)의 제2항도 구간 [j, j+1]에서 제1항과 같은 방법으로 구하면 다음과 같은 수식이 나온다.

$$-\left[\frac{1}{3} H_{i,j} + \frac{1}{6} H_{i,j+1}\right] \sqrt{(x_{j+1} - x_j)^2 + (y_{j+1} - y_j)^2} \quad (12)$$

식(5)를 식(11), (12)에 대입해서 구한 식을 식(6)에 대입해서 풀면 다음과 같은 식이 나온다.

$$B_j = \frac{2}{6\mu R d} \left[\frac{\sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2}}{\sqrt{(x_{j+1} - x_j)^2 + (y_{j+1} - y_j)^2}} \right] A_j - \frac{2}{6\mu R d} \left[\frac{\sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2}}{\sqrt{(x_{j+1} - x_j)^2 + (y_{j+1} - y_j)^2}} \right] A_i + \frac{1}{6\mu R d} \left[\frac{\sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2}}{\sqrt{(x_{j+1} - x_j)^2 + (y_{j+1} - y_j)^2}} \right] A_{j-1} - \frac{1}{6\mu R d} \left[\frac{\sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2}}{\sqrt{(x_{j+1} - x_j)^2 + (y_{j+1} - y_j)^2}} \right] A_{i-1} + \frac{1}{6\mu R d} \left[\frac{\sqrt{(x_{j+1} - x_j)^2 + (y_{j+1} - y_j)^2}}{\sqrt{(x_{j+1} - x_j)^2 + (y_{j+1} - y_j)^2}} \right] A_{j+1} - \frac{1}{6\mu R d} \left[\frac{\sqrt{(x_{j+1} - x_j)^2 + (y_{j+1} - y_j)^2}}{\sqrt{(x_{j+1} - x_j)^2 + (y_{j+1} - y_j)^2}} \right] A_{i+1} \quad (13)$$

식(13)의 계방정식을 행렬식 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\{B\} = [K] \{A_b\} \quad (14)$$

여기서 K는 $(N_b \times N_b)$ 로 그림 3과 같은 형태이다.

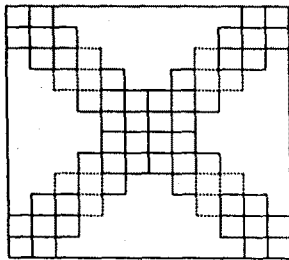


그림 3 경계적분항의 계행렬

Fig. 3 System matrix of boundary integral terms

2.4 결과식의 도출

식(3)에 식(14)를 대입 하면

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{1b} \\ S_{b1} & S_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_i \\ A_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_i \\ A_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_b \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{1b} \\ S_{b1} & S_{bb} + K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_i \\ A_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_b \end{Bmatrix}$$

와 같이 나오며, 식(15)가 경계적분항을 포함한 최종의 결과식이다. 식(15)의 전체 계행렬은 기존 유한요소법의 계행렬 [S]에 경계적분항을 해서 얻은 계행렬 [K]를 합한 것으로 풀이과정은 기존 유한요소법의 계행렬을 푸는 과정과 동일하며 기존 유한요소법의 계행렬의 특성인 sparsity와 대칭성을 갖고 있다.

3. 사례연구 및 검토

그림 4와 같이 제 2.1절 가정(3)을 만족하는 모델의 철판에 대하여 자체해석을 실시하였다. 이때 철판은 제 2.1절의 가정(2)을 만족한다. 해석영역은 자체의 대칭성에 의해 단지 전체의 1/4 ($0 < x < 0.8, 0 < y < 0.8$ m)만을 해석하였다.

또 경계조건으로 \overline{OABC} 에서는 Dirichlet조건을 주었고 \overline{OC} 에서는 Neumann조건을 주었다. 코일의 권류밀도는 10^6 [A/m²]이며 비투자율은 1이다. 이 모델은 해석해가 없기 때문에 기존 유한요소법이 파인메쉬(fine mesh)에서 얻은 자기벡터포텐셜을 정해에 근사한 해로 간주하고, 기존 유한요소법의 굵스메쉬(coarse mesh)와 제안한 방법의 비교는 식(13)의 비투자율이 100, 1000일때 각각에 대하여 두께를 변화시켜 얻은 자기벡터포텐셜을 식(16)에 대입해서 오차값(ϵ_A)을 비교하였다.

$$\epsilon_A = \frac{A_x - A_f}{A_f} \times 100 (\%) \quad (16)$$

여기서 A_f 는 파인메쉬에서 얻은 자기벡터포텐셜이고 A_x 는 굵스메쉬와 제안한 방법에서 얻은 자기벡터포텐셜이다. 표1을 참고해서 비투자율이 1000이고 두께가 0.001m인 경우에 대해서 기존 유한요소법의 굵스메쉬와 제안한 방법의 자속 분포도는 그림 5, 6이다. 그림 7과 8은 굵스메쉬와 제안한 방법의 자기벡터포텐셜의 오차를 비교한 그림이다. 그림 7과 8에서 제안한 방법이 같은 조건의 기존 유한요소법의 굵스메쉬보다 오차가 적음을 볼 수 있다. 이때 그림에서 철판의 길이 0인 곳에서는 Dirichlet경계조건을 주었기 때문에 오차가 없는 것으로 나타났다.

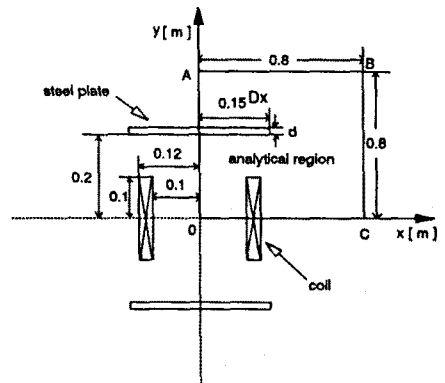


그림 4 해석모델 및 좌표계

Fig. 4 Analyzed model and coordinate systems

표 1 이산 데이터의 비교표

Table 1 Comparison of discretization data

비투자율	두께	구분	총절점	총요소	자성체 경계절점	자성체 요소
100	0.005	fine	1312	2552	107	712
		coarse(1)	558	1047	39	79
		coarse(2)	365	653	6	10
		proposed	365	643	6	0
1000	0.001	fine	1537	2999	123	260
		coarse(1)	675	1282	60	119
		coarse(2)	365	653	6	10
		proposed	365	643	6	0

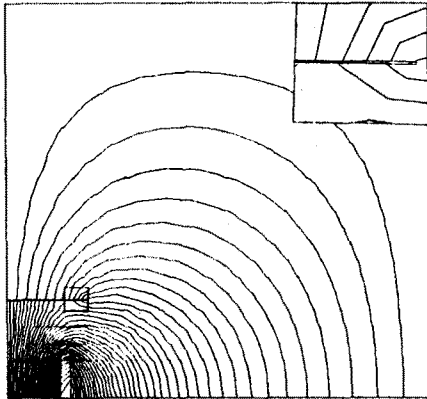


그림 5 플스 매쉬의 자속 분포도

Fig. 5 Magnetic flux distribution of coarse mesh

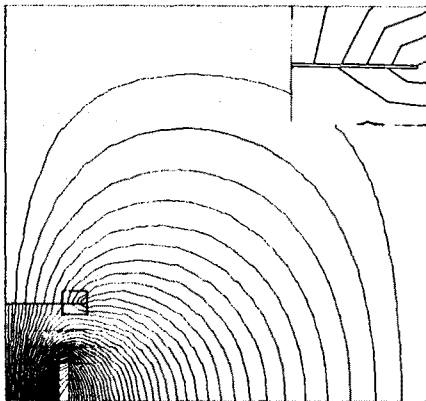


그림 6 제안한 방법의 자속 분포도

Fig. 6 Magnetic flux distribution of proposed mesh

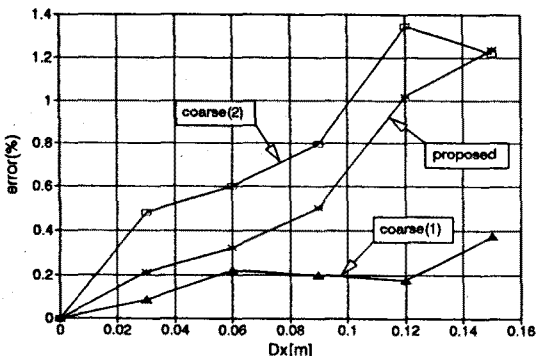


그림 7 자기벡터포텐셜의 오차 ($\mu_R=100$, $d:0.005m$)

Fig. 7 Error of magnetic vector potentials

($\mu_R=100$, $d:0.005m$)

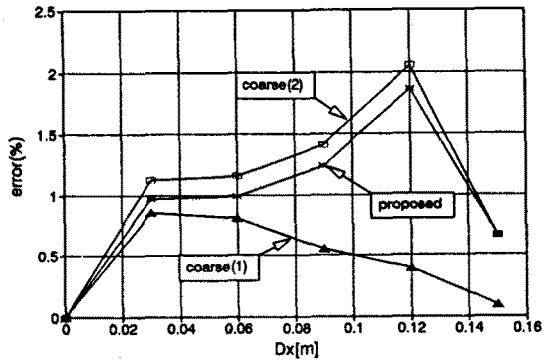


그림 8 자기벡터포텐셜의 오차 ($\mu_R=1000$, $d:0.001m$)

Fig. 8 Error of magnetic vector potentials

($\mu_R=1000$, $d:0.001m$)

4. 결론

그림 4와 같은 철판에 대하여 자계해석을 한 결과 제안한 방법이 기존 유한요소법의 플스 매쉬보다 적은 요소분할에도 불구하고 오차가 적게 나타났으며, 최종 계행렬은 기존 유한요소법의 계행렬이 가지고 있던 대칭성 및 sparsity가 그대로 유지되고 있어 방정식 풀이의 간략화를 이룰 수 있다.

본 논문의 기본개념이 유한요소법과 경계요소법의 혼합법과 비슷하므로 제시한 방법과 혼합법과의 관계를 진전시켜 더 좋은 해석방법을 도출해 내기 위해서 지속적인 연구가 필요하며, 불균등 자계의 3차원 해석을 위한 적용방법에 대해서도 지속적인 연구가 필요하다고 사료 된다.

5. 참고문헌

- [1] Ki-sik Lee, M.J. DeBortoli, M.J. Lee, and S.J. Salon, "Coupling Finite Elements and Analytical Solution in the airgap of Electric Machines", IEEE Trans. on Mag., Vol. 27, No. 5, pp. 3955~3957, September 1991.
- [2] 김은배, 양재면, 이기식, 유동일 "유한요소법과 해석해의 결합에 의한 전자기 해석," 전기학회 논문지, 제41권 6호, pp. 362~368, 1992. 4
- [3] 임달호, 전기계의 유한요소법, 동명사, 1987.
- [4] 中田高義, 高橋剛雄, 電氣學の有限要素法, 森北出版株式會社, 1982.
- [5] S.J. Salon, and J.D'Angelo, "Applications of the Hybrid Finite Element-Boundary Element Method in Electro magnetics", IEEE Trans. on Mag, Vol. 24, No. 1, pp. 80~85 January 1988.
- [6] S.J. Salon, "The Hybrid Finite Element-Boundary Element Method in Electromagnetics", IEEE Trans. on Mag, Vol. 21, No. 5, pp. 1829~1834, September 1985.