불확실한 선형시스템의 안정화를 위한 스위칭제어기

°
김 정수, 김 병연, 유 준

충남대학교 공과대학 전자공학과

A Switching Controller for Stabilization of Uncertain Linear Systems

Jung Soo Kim and Byungyeun Kim and Joon Lyon
Dept. of Electronics Eng., Chungnam National Univ.

Abstract

In order to stabilize linear time-invariant systems with the unknown system matrix, a piecewise constant linear state feedback control law including switching logic is developed. A number of feedback gain matrices are first precomputed by solving the Algebraic Riccati Equation with prescribed degree of stability, and then are switched over in a direction to increase degree of stability. Switching stops when a Lyapunov function shows the decreasing property, and hence switching times are finite.

1. 서 론

본 논문에서는 선형 시불변(linear time-invariant)상태 방정식으로 표현되는 시스템이 미지의 시스템 행렬을 포함하고 있는 경우에 이를 안정화시키는 문제를 다룬다. 좀 더 구체적으로 다음의 상태방정식으로 주어지는 선형 시불변 시스템을 생각하자.

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1}$$

여기서 $x \in R^n$ 는 상태벡터, $u \in R^m$는 제어입력벡터이고, A와 B는 적절한차원의 상수행렬이다. 시스템 (1)에 다음과 같은 가정을 하자.

(i) 상태벡터는 측정가능하다.
(ii) (A,B)는 가제어(Controllable)하다.
(iii) 입력행렬 B는 정확히알려져 있는 반면에, 시스템 행렬 A의 원소값들은 알려져 있지않다.

시스템(1)을 안정화시키기위하여 기존의 적응 제어방식[1]의 사용을 생각할수 있는데, 이는 소위 일치조건(matching condition)의 성립이라는 지극히 제한적인(restrictive) 가정을 필요로 한다. 여기서 일치조건은 시스템 행렬 A에 상당한 제약을 가하는 것으로, 결국 기존의 적응 제어방식으로는 좁은 부류의 시스템에 대해서 적용이 가능하다고 볼수있다.

본 논문에서는 일치조건이 성립되지않아도 되는 시스템 (1)을 안정화 시키기 위한 하나의 방안으로, 스위칭(switching) 제어기를 설계하는 과정이 제시되었다. 먼저 선형 상태궤환(feedback) 제어기 구조아래서 시스템 (1)의 안정을 보장하는 충분조건이 Lyapunov 안정이론에 입각하여 유도되었다. 그리고 충분조건을 지침으로 삼아 상태궤환 이득(gain)을 상대 안정도(degree of stability)가 증가되는 방향으로 스위칭해 나가는 알고리즘이 개발되었다. 이때 일련의 상태궤환 이득들은 규정된(prescribed) 상대안정도를 갖는 Algebraic Riccati Equation(ARE)[3]을 풀어서 미리 계산되며, 스위칭 전략은 [2]의 방식을 응용하여 구성되었다.

2. 안정을 위한 충분조건

(1)식에서 시스템 행렬 A를 알지못하므로 A 대신에 이미 알고있는 어떤행렬 A_m으로 대치하여 다시쓰면 다음과 같다.

$$\dot{x} = A_m x + Bu + \triangle Ax \tag{2}$$

$$\triangle A = A - A_m \tag{2.a}$$

여기서 A_m은 안정한 행렬이면서, (A_m, B)가 가제어하도록 선택한다. 참고로 A의 nominal 값이 알려져 있다면 A_m은 nominal A로 선택될수 있다. 또한 적응 제어이론에 흔히 등장하는 일치조건[1]은 $\triangle A = BK^*$를 만족하는 K^*가 존재한다는 것을 가정하는 것으로, 기존의 적응 제어방식이 다룰수 있는 $\triangle A$, 즉 A의 부류가 상당히 협소하다는 것을 알수있다. 시스템 (2)를 안정하기위하여 다음과 같은 선형 상태 궤환 제어형태를 사용하자.

$$u = -Kx \tag{3}$$

$$K = B^T P \tag{3.a}$$

여기서 K는 상태 궤환이득이고, P는 규정된 상대안정도를 갖는 ARE의 유일한 해이다[3].

$$(A_m + \mu I)^T P + P(A_m + \mu I) - PBB^T P + Q = 0 \tag{3.b}$$

(3.b)의 P는 임의의 symmetric positive definite(spd)한 행렬 Q에 대해 SPD한 유일한 해이고, μ는 양의 실수이다. (3)의 제어입력을 (2)식에 인가하여 구성된 폐루프(closed-loop) 다음과 같다.

$$\dot{x} = (A_m - BK)x + \triangle Ax \tag{4}$$

참고로 (4)식에서 $\triangle Ax$ 항이 없는 경우 즉, $\triangle A=0$이면 폐루프 시스템의 극점들(poles)은 $-\mu$ 보다 작은영역(s-평면 $-\mu$ 수직축의 좌반부)에 위치하게 된다. 즉, 폐루프 시스템은 상대안정도 μ를 갖게된다. 시스템 (4)의 안정을 보장하기위하여 상태 궤환이득 K가 만족되어야할 충분조건은 다음의 정리를 통하여 유도된다.

[정리 1.]

(3.b)의 μ를 증가시키면서, 다음과 같은 조건이 만족되도록 하는 μ가 선정될수 있다면

$$2\mu P > \triangle A^T P + P \triangle A \tag{5}$$

시스템 (4)식은 안정하다. 여기서 P는 (3.b)에 주어진 spd 행렬이다.

[증 명] Quadratic형의 Lyapunov 후보함수를 도입하자.

$$V(x) = x^TPx > 0 \tag{6}$$

(6)식을 시간에 대해 미분하고, (4), (3.a) 및 (3.b) 식을 따라 평가하면, Lyapunov 함수의 미분은 다음과 같이 간략화된다.

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= x^T\{(A-BK)^TP + P(A-BK)\}x + x^T(\triangle A^TP + P\triangle A)x \\ &= -x^T(Q + PBB^TP)x - x^T(2\mu P - \triangle A^TP - P\triangle A)x\end{aligned} \tag{7}$$

(7)식 우변의 첫번째 항은 항상 negative semi-definite(nsd)하고, 두번째 항은 충분조건이 성립하게 되면 nsd하므로 전체적으로 봐서 $\dot{V} \le 0$ 이된다. 이상의 결과로 부터 x=0 이 아닐때는 $V > 0$, $\dot{V} < 0$ 이므로, Lyapunov 안정이론[1]에 근거하여 상태벡터 x는 임의의 유한한(bounded) 초기치에 대해 유한하고(globally bounded), 더욱이 x=0 일때만 $\dot{V}$=0 이므로 x는 시간이 경과함에 따라 0 으로 수렴하게 된다. (asymptotically stable) 증명 끝

참고로, 유도된 충분조건은 강인한(robust) 안정화 제어기 설계시 흔히 나오는 충분조건[4]들의 일종이다. 그러나 어떤 충분조건도 이 상황에 맞추어 사용하기에는 제한적(restrictive)이다. 왜냐하면 (5)식에 미지의(unknown) $\triangle A$가 포함되어 있어, (5)를 충족시키는 μ를 찾아내기가 사실상 불가능하기 때문이다. 따라서 이러한 충분조건에 직접 의존하지 않고, 시스템(4)의 안정을 보장하는 상대안정도(μ) 및 상태궤환 이득(K)를 구하는 방안이 필요하다.

3. 스위칭 제어 알고리즘

스위칭 제어기는 선형 상태궤환 제어를 수행하면서 상태궤환 이득을 적절하게 스위칭해 나가는 방법이다. 스위칭을 하는 이유는 선형 상수이득 상태궤환 제어기를 이용하고자 할때 시스템 행렬 A를 모르는 관계로 거기에 들어가는 상수이득을 결정할수 없기때문이다.

스위칭을 적절하게 해주기 위해서는 어떤 논리(logic)을 마련하고 이에 근거하여 스위칭을 할것인가 아니면 멈출것인가를 결정하는 스위칭 전략이 필요하다. 본 논문에서는 [2]의 설계개념에 입각하여 스위칭전략을 다음과 같이 수립하였다. 먼저 (5)의 충분조건을 만족하는 상대안정도 μ값을 모르기때문에 이러한 μ가 속한다고 생각되는 범위를 선정한다. 이 당시에 비록 μ의 범위가 잘못선정되어 있더라도 다음번에는 이를 참조하여 μ의 범위를 교정할 수 있다. 선정된 μ의 범위 내에서 유한한 갯수(f개라 지칭)의 μ_i, i = 1,2,...,f를 선택한다. 각 μ_i에 대해 (3.b)의 ARE를 풀어서 spd행렬 P_i를 구하고, (3.a)식으로 부터 상태 궤환이득 K_i를 계산한다. 이렇게 얻어진 P_i 와 K_i, i = 1,2,...,f를 μ_i의 오름차순으로 분류하여 저장해 놓는다.

시스템이 안정 또는 불안정 특성을 보이는지를 파악하기 위해서는 관측(monitoring)함수의 도입이 요망된다. 본 논문에서는 [2]와 마찬가지로 Lyapunov함수를 관측함수로 활용하였다.

$$V_i(x) = x^TP_ix \tag{8}$$

참고로 (8)의 Lyapunov 함수값이 증가추세를 보이면 시스템이 불안정 특성을 갖고, 반대로 감소추세를 보이면 안정특성을 갖는다[1]. 이러한점을 착안하여 언제 상태 궤환이득을 스위칭 할것인가에 대한 근거를 마련할수 있다. 즉 $V_i(x)$의 증가추세가 확인되면 i 번째 상태 궤환이득 K_i로는 시스템을 안정화 시킬수 없다는 의미이므로 i+1 번째 상태 궤환이득으로 스위칭 해주고, 반면에 감소추세가 확인되면 K_i를 그대로 유지하면서 상태 궤환제어를 수행하면 된다.

$V_i(x)$의 증가 또는 감소경향은 t 시각에서의 $V_i(x(t))$값과 t 시각 이후인 $t+\tau$ 시각에서의 $V_i(x(t+\tau))$의 값을 비교하여 판단될수 있다. 즉 $V_i(x(t+\tau))$가 $V_i(x(t))$보다 크면 증가추세이고, 작으면 감소추세이다. 여기서 τ는 대기시간(waiting period)로써, 이를 두는 이유는 상태변수 x(t)의 천이에 필요한 어느정도의 여유시간을 주기위함이다. 참고로 본 논문에서와 같이 선형 시불변 시스템의 안정화를 위하여 상태 궤환제어를 사용하는 경우에는 τ를 임의로 작게 잡을수 있다[2].

이상의 내용을 종합하여 시스템의 안정화를 보장하는 상대안정도 μ와 상태 궤환이득 K를 찾아내는 알고리즘을 다음과 같이 만들수 있다.

[알고리즘]

단계 1: 선정된 μ의 범위내에서 유한한 갯수(f개)의 μ_i, i = 1,2,...,f를 선택한다. 각 μ_i에 대해 (3.b)식을 풀어서 P_i를 구하고, (3.a)식 으로부터 K_i를 계산한다. 그리고 P_i와 K_i, i = 1,2,...,f를 μ_i의 오름차순으로 정리하여 저장해 놓는다.

단계 2: 초기화시킨다. 즉 i=1, t=0 로 놓는다. 그리고 대기시간 τ에 값을 지정한다.

단계 3: t 시각 에서의 관측함수값 $V_i(x(t))$를 계산한다. 그리고 τ 시간 동안 기다렸다가 $t+\tau$ 시각에서의 $V_i(x(t+\tau))$ 값을 계산한다.

단계 4: 만약 $V_i(x(t+\tau)) \le V_i(x(t))$ 이면, $t=t+\tau$ 로 하고 단계 3으로 돌아간다. 그렇지 않으면 i = i + 1 (스위칭이 일어남)로 하고 다음단계를 수행한다.

단계 5: 만약 i > f 이면 선정된 μ의 범위내에서 안정화 될수 없다고 선언하고 일단 끝낸다. 그리고 μ의 범위를 큰쪽으로 조정하여 단계 1부터 다시 시도한다. 그렇지 않으면 $t = t + \tau$로 하고 단계 3으로 돌아간다.

4. 시뮬레이션 결과

다음과 같이 주어진 불안정한 선형 시불변 연속시간 시스템을 생각하자.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

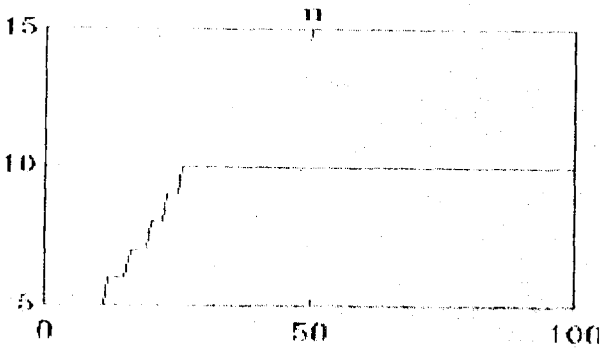
$$x(0) = [\ 1\ -1\ 1\ ]^T$$

이 시스템은 가제어하고, 고유치(eigenvalue)를 (2.05+0.56i, 2.05-0.56i, -1.1)에 가지고 있다. 또한 시뮬레이션 목적 이외에는 A를 모르는 것으로 간주한다. (2)식에 주어진 안정한 행렬 A_m을 아래와 같이 선정하였을때,

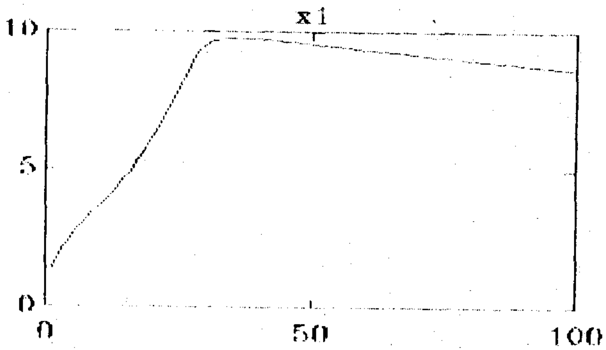
$$A_m = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

일치조건이 충족되지않음을 쉽게 알수있다.

먼저 설계변수들로서 상대안정도 μ값의 범위를 5부터 12까지의 정수로 잡고, (3.b)의 spd 행렬 Q를 단위(identity)행렬로 선택하였다. 아울러 각 μ 값에 대응되는 상태 궤환이득을 (3.b)의 Riccati 방정식을 풀어서 미리 계산해 놓았다. 이제 예제 시스템에 대해 본 스위칭 제어 알고리즘을 적용한 컴퓨터 모사가 수행되었다. 대기시간 τ를 0.1초로 하였을때의 결과가 그림 1) - 2)에 나타나 있다. 그림 1) 에서 보는바와 같이 상대안정도 μ값이 10 이후에서는 더이상 스위칭 되지않고 스위칭이 멈춘뒤에는 스위칭 제어기가 선형 상수이득 상태 궤환 제어기로 작용하여 대상시스템이 안정화된을 그림 2)의 상태변수 궤적들로 부터 알 수 있다. 이와 별도로 μ가 10을 포함하여 10 보다 큰값을 가질때는 충분조건 (5)가 만족됨을 확인하였다.



[그림 1] 상대안정도 μ의 스위칭



(a)

5. 결 론

본 논문에서는 시스템 행렬이 알려져 있지 않고, 일반적 으로 일치조건이 성립되지않는 일련의 선형 시불변 연속시간 시스템을 안정화하기 위한 제어형태로서, 스위칭 기능을 갖춘 선형 구간 상수이득(piecewise)상태 궤환 제어법칙이 제시되었다.

스위칭은 Lyapunov 함수값의 추이가 감소성질로 진입하였을 때 더이상 일어나지 않으므로 스위칭 횟수는 유한하고, 스위칭이 멈춘뒤에는 기존의 선형 상수이득 상태 궤환제어기로 귀착하여 시스템의 안정을 도모한다. 확립된 스위칭 알고리즘을 사용하면 시스템의 안정을 보장하는 최소한도의 상대안정도를 구할수 있다.

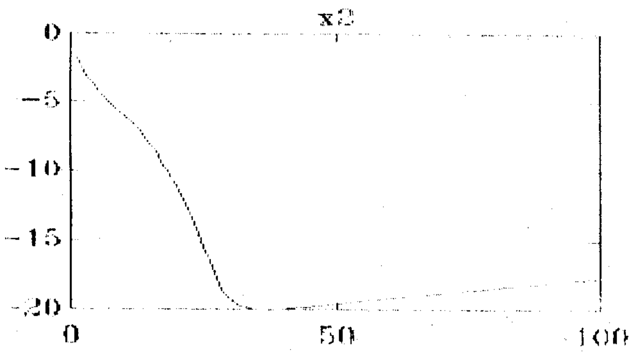
6. 참고 문헌

[1]. K.S Narendra and A.M Annaswamy, Stable Adaptive Systems, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1989.

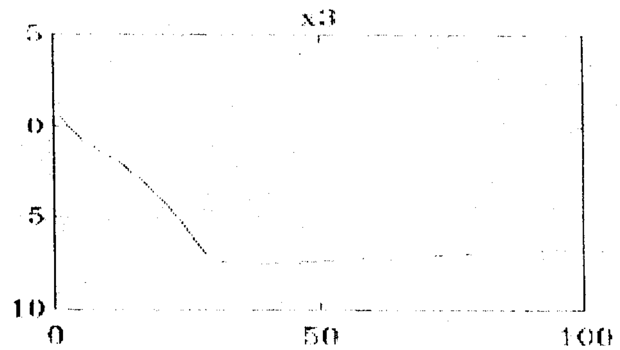
[2]. B. Ross Barmish and Minyue Fu, "Adaptive stabilization of Linear Systems via Switching Control", IEEE Trans. Auto. Control. Vol AC-31, NO-12, Dec. 1986.

[3]. Brain D.O. Anderson and John B. MOORE, Linear Optimal Control, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs. 1971.

[4]. P. Dorato and R.K. Yedavalli(eds.), Recent Advances in Robust Control, IEEE Press, 1990.



(b)



(c)

[그림 2] 상태변수들의 궤적 : (a) x1 (b) x2 (c) x3