

# 강인성이 보장된 고속순환 최소자승 알고리즘

김의준\*, 고석용, 정양웅, 정찬수  
 숭실대학교 전기공학과

## Fast Recursive Least Squares Algorithm with Improved Robustness

Eui-Jun Kim\*, Seok-Yong Koh, Yang-Woong Jung, Chan-Soo Jung  
 Department of Electrical Engineering, Soong Sil University

**Abstract**

In this paper, it is proposed to improve the robustness of the Fast Recursive Least Squares(FRLS) algorithms with the exponential weighting, which is an important class of algorithms for adaptive filtering. It is well known that the FRLS algorithm is numerically unstable with exponential weighting factor  $\lambda < 1$ . However, introducing some gains into this algorithms, numerical errors can be reduced. An accurately choice of the gains then leads to a numerically stable FRLS algorithm with a complexity of  $8m$  multiplications and we show it by computer simulations.

$$J = \sum_{k=0}^n (y(k) - d(k))^2$$

또한 평가함수  $J$ 를 최소화하기 위한 정규방정식은 다음과 같다.

$$w(n) = R_m^{-1}(n)r_m(n)$$

여기서,  $R_m(n)$ 과  $r_m(n)$ 는

$$R_m(n) = \sum_{k=0}^n X_m(k)X_m^T(k), \quad r_m(n) = \sum_{k=0}^n X_m(k)d(k)$$

**1. 서론**

선형예측시스템의 모형화 방법중 정현신호의 처리를 위해서는 자기회귀(Autoregressive : AR)모형이 많이 사용된다. 이러한 AR 모형의 매개변수의 추정방법에 주로 사용되어 온 것이 최소자승법이다. 이 방법은 수렴속도가 빠른 반면 매개변수의 갱신을 위해서  $O(m^2)$ 의 계산량을 필요로 하기 때문에 시스템의 차수  $m$ 이 큰 경우 실시간처리는 실제 적용하는데 어려운 단점이 있다.

이러한 최소자승법의 단점을 개선하기 위해 개발된 것이 고속순차 최소자승(Fast Recursive Least Square : FRLS)알고리즘이다. 이 방법은 입력신호의 이동특성을 이용하므로 계산량을  $O(m)$ 으로 줄일 수 있게 된다. 그러나 이 알고리즘을 시변시스템에 적용하기 위해 망각계수  $\lambda$ 를 1보다 작은 값을 사용하게 되는데 이 때 강인성이 보장되지 않는 새로운 문제가 대두된다.

이러한 FRLS의 단점을 개선하기위해 많은 연구가 진행되어 왔다. [1], [2], [3], [13], [14] 본 논문에서는 이러한 연구를 토대로 하여 강인성이 보장되는 새로운 FRLS 알고리즘을 제시하고자 한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서 FRLS의 기본개념과 강인성 보강문제에 대해 서술하고, 본 논문의 주제인 강인성이 보장된 FRLS알고리즘은 3장에서 설명한다. 4장에서는 이 알고리즘에 대한 모의실험 결과를 제시했다.

**II. 고속순차 최소자승법과 강인성문제**

최소자승법은 측정치  $d(n)$ 와 추정치  $y(n)$ 간 오차의 제곱합이 최소가 되도록 추정치  $y(n)$ 의 매개변수를 결정하는 방법이다. 이를 위해 평가함수  $J$ 를 다음과 같이 한다.

이고,  $X_m(n)$ 은 입력신호 벡터,  $d_m(n)$ 은 추정열,  $w_m(n)$ 은 필터의 계수벡터이다.

이 정규방정식의 해를 얻기위해 LS는 역행렬의 계산에  $O(m^2)$ 의 계산량이 필요로 하다. 역행렬을 구하는 과정에서의 계산량을 줄이기 위해 역행렬의 정리를 이용하는 것이 일반형 순차최소자승(Recursive Least Square: RLS)알고리즘인데 이는  $O(m^2)$ 의 계산량이 소요된다. 그러나 이 알고리즘도 시스템의 차수  $m$ 이 큰 경우에는 막대한 계산량이 필요하므로 실시간 처리에는 이용에 무리가 있다. 이러한 계산량문제를 해결하고자 제시된 FRLS은  $O(m)$ 의 계산량만이 필요할 뿐이다. 이는 곱셈의 횟수에 따라  $8m$ 형태와  $5m$ 형태가 있으며 그 알고리즘은 표 2-1, 2-2와 같다. [4], [5], [6], [7], [8]

표 2-1.  $8m$  FRLS 알고리즘

이득벡터의 시간갱신 공식	계산량
$e_m^f(n+1) = x(n+1) + a_m^f(n)x_m(n)$	(1) $m$
$a_m^f(n+1) = a_m^f(n) + w_m^f(n)e_m^f(n+1)$	(2) $m$
$e_m^f(n+1) = x(n+1) + a_m^f(n+1)x_m(n)$	(3) $m$
$a_m^f(n+1) = a_m^f(n) + e_m^f(n+1)e_m^f(n+1)$	(4) 1
$w_{m+1}^*(n+1) = \begin{bmatrix} 0 \\ w_m^*(n) \end{bmatrix} - \frac{e_m^f(n+1)}{a_m^f(n+1)} \begin{bmatrix} 1 \\ a_m^f(n+1) \end{bmatrix}$	(5) $m+1$
분할식 $w_{m+1}^*(n+1) = \begin{bmatrix} d_m^*(n+1) \\ \delta_m^f(n+1) \end{bmatrix}$	(6) 0
$e_b^m(n+1) = x(n+1-m) + b_m^f(n)x_m(n+1)$	(7) $m$
$w_m^*(n+1) = \frac{d_m^*(n+1) - \delta_m^f(n+1)b_m(n)}{1 + \delta_m^f(n+1)e_b^m(n+1)}$	(8) $2m$
$b_m(n+1) = b_m(n) + w_m^*(n+1)e_b^m(n+1)$	(9) $m$
전체 계산량	$8m+2$

표 2-2. 5m FRLS 알고리즘

이득 시간 갱신	계산량
$e_f^m(n+1) = x(n+1) + a_m^m(n) x_m(n)$	(10) m
$e_f^m(n+1) = e_f^m(n+1) / a_m(n)$	(11) 1
$a_m(n+1) = a_m(n) + w_m(n) e_f^m(n+1)$	(12) m
$a_f^m(n+1) = a_f^m(n) + e_f^m(n+1) e_f^m(n+1)$	(13) 1
$w_{m+1}(n+1) = \begin{bmatrix} 0 \\ w_m(n) \end{bmatrix} - \frac{e_f^m(n+1)}{a_f^m(n+1)} \begin{bmatrix} 1 \\ a_m(n) \end{bmatrix}$	m+1
분할식: $w_{m+1}(n+1) = \begin{bmatrix} d_m(n+1) \\ \delta_m(n+1) \end{bmatrix}$	(14) 0 (15) 0
$e_b^m(n+1) = -\delta_m(n+1) a_b^m(n)$	(16) 1
$w_m(n+1) = d_m(n+1) - \delta_m(n+1) b_m(n)$	(17) m
$a_{m+1}(n+1) = a_m(n) + \frac{e_f^m(n+1)}{a_f^m(n)} e_f^m(n+1)$	(18) 1
$e_b^m(n+1) = e_b^m(n+1) / a_m(n+1)$	(19) 1
$a_b^m(n+1) = a_b^m(n) + e_b^m(n+1) e_b^m(n+1)$	(20) 1
$b_m(n+1) = b_m(n) + w_m(n+1) e_b^m(n+1)$	(21) m
전체 계산량	5m+8

그러나, 잡음에 대한 감도를 증가시켜 시스템에 사용하기 위해서는 망각계수  $\lambda$ 를 1보다 작은 값으로 사용하게 되는데, 이때 FRLS는 수치적으로 불안정하여 정상상태에서는 급격히 발산하게 된다. [9], [13] 이러한 문제점을 개선하기 위해 Normalization FRLS 알고리즘 [9], [10]과 배경도 계산을 사용할 것 [12] 등이 제시 되기도 하였고, 특히 다음과 같이 보정 상수를 사용한 방법이 제시 되기도 하였다. [14]

표 2-1의 (4)식을 다음과 같이 수정하면

$$a_f^m(n+1) = a_f^m(n) + e_f^m(n+1) e_f^m(n+1) \cdot k$$

이 된다. 즉 여기서 모형의 차수 m과 잡음의 크기 등에 따라 결정되는 보정상수 k를 이용하여 강인성을 개선하였다. 그렇지만 위의 어떠한 방법도 입력신호의 성질에 따라 강인성이 보장되지 않으므로 구조변수(rescue value)를 사용하여 이 변수를 감시하고 있다가 발산이 시작되면 이를 감시하고 알고리즘을 초기화하는 방법이 있다. 그러나 이러한 방법은 초기화시킬 때마다 상당한 양의 출력은 신뢰성이 없는 자료가 되어 수치적으로 불안하게 되므로 FRLS의 응용범위가 크게 제한받게 된다.

### III. 강인성이 보강된 고속 순차 최소자승 알고리즘

FRLS가 강인성이 약한 이유는 계산량을 줄이기 위해 과거의 자료에 대한 정보를 행렬로 보관하지 않고 벡터로 처리하기 때문에 이로 인한 계산오차가 누적되기 때문이다. [2] 즉, 이론적으로는 8m형태와 5m형태 변수의 계산값이 일치해야 하나, 사용된 디지털 계산기의 어장에 의한 반올림오차 및 절단오차 등으로 인해 실제로는 일치하지 않는다. 이러한 점으로 인해 Botto 등은 이 오차를 최소화하는 보상방법을 제시하였다. [2], [13]

본 연구에서는 이론적으로 같아야 하는 이들 변수들에 적당한 값의 가중치를 줌으로써 상호 보완작용을 유도하여 오차의 누적현상을 막고, FRLS의 단점인 수치적 불안정성을 개선하여 강인성을 보완한 것이다. 즉, 전향예측기  $A_m(n)$ 와 후향예측기  $B_m(n)$ , 칼만이득  $w_m(n)$ 의 계산식이 8m형태와 5m형태에서 각각 다른 계산식을 갖는 것에 착안하여 표 2-1, 2-1에 있는 식을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$e_f^m(n+1) = x(n+1) + a_m^m(n) x_m(n) \quad (3)$$

$$e_f^m(n+1) = e_f^m(n+1) / a_m(n) \quad (11)$$

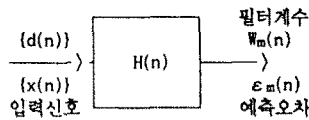
$$w_{m+1}(n+1) = \begin{bmatrix} 0 \\ w_m(n) \end{bmatrix} - \frac{e_f^m(n+1)}{a_f^m(n+1)} \begin{bmatrix} 1 \\ a_m(n+1) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$w_{m+1}(n+1) = \begin{bmatrix} 0 \\ w_m(n) \end{bmatrix} - \frac{e_f^m(n+1)}{a_f^m(n+1)} \begin{bmatrix} 1 \\ a_m(n) \end{bmatrix} \quad (14)$$

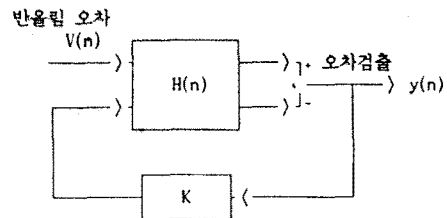
$$e_b^m(n+1) = x(n+1-m) + b_m^m(n) x_m(n+1) \quad (7)$$

$$e_b^m(n+1) = -\delta_m(n+1) a_b^m(n) \quad (16)$$

만일 무한정도를 갖는 디지털 계산기를 사용한다면 각각 같은 물리량을 의미하는 위의 계산식 (1)과(2), (3)과(4), (5)와(6)이 각기 다른 방법으로 표현되었다 하더라도 그 결과는 일치할 것이다. 그러나 실제로 구현함에 있어서 그 결과는 다르게 되는데 그 이유는 수치 계산상의 오차로 볼 수 있다. 그러므로 각기 다른 이들 계산결과는 오차 누적현상의 출력으로 볼 수 있으므로, 본 논문에서는 오차의 누적현상을 막기 위해 그림 1.과 같은 피드백구조를 제안한다.



(a) FRLS 알고리즘



(b) 오차 귀환 시스템

그림 1. FRLS 알고리즘과 오차 귀환 시스템

또한, 귀환상수 K를 고려한 새로운 알고리즘의 변수들은 표 3.과 같다.

표 3. 귀환상수 K를 갖는 새로운 변수

$$e_f^m(n+1) = K_3 e_f^m(n+1) + (1-K_3) e_f^5(n+1)$$

$$w_m(n+1) = K_4 w_m^8(n+1) + (1-K_4) w_m^5(n+1)$$

$$e_b^m(n+1) = K(i) e_b^8(n+1) + (1-K(i)) e_b^5(n+1) \quad i=1, 2, 5$$

여기에서 특정한 K의 선택은 실험적 경험과 시행착오법으로 결정하게 되는데 일반적으로 최적 K의 선택은 망각계수  $\lambda$ 와 시스템 차수  $m$ , 신호의 특성에 따라 결정된다.

IV. 모의실험 및 결과

모의 실험에 사용한 입력신호는 각기 SNR=20[dB]와 14[dB]를 갖는 두개의 정현파를 이용했으며 잡음신호는 공분산이 1인 백색잡음(White Noise)을 이용하였다. 또한  $m=12$  이며  $\lambda=0.995$ 로 하였다. 또한 이득 K는 각각  $k_1=1.25, k_2=1.25, k_3=0.75, k_4=0.0, k_5=1.25$ 으로 하였다. 아래 그림에서 매개변수  $a_m(n)$ 의 추정과정을 도시했다.

그림 2.는 최초의 수렴과정이며, 그림 3.과 4.는 각각 1만, 2만번째의 이산시간에서 매개변수가 발산하지 않고 참값을 유지하고 있음을 보인것이다. 그림에서처럼 2만번째에서도 위에서 제시한 알고리즘이 강인성을 가지고 있음을 알 수있다.

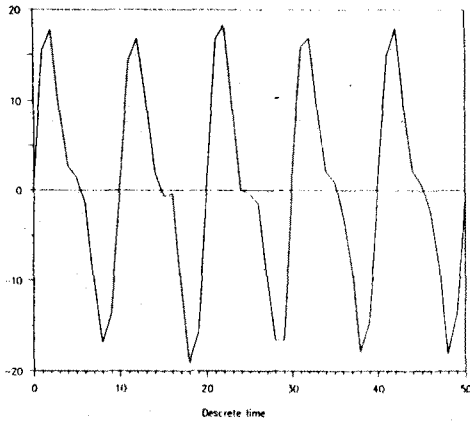


그림 2. 측정신호 d(n)

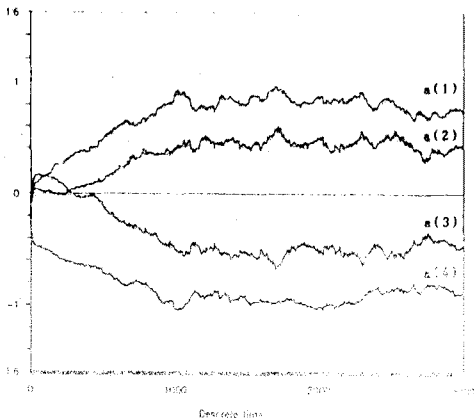


그림 3. 매개변수 A(n)의 초기 수렴특성

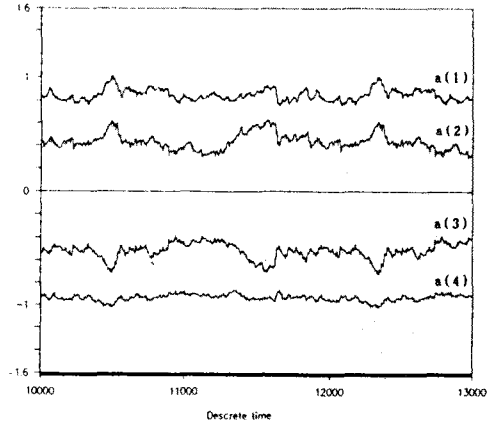


그림 4. 매개변수 A(n)의 1만번째 수렴특성

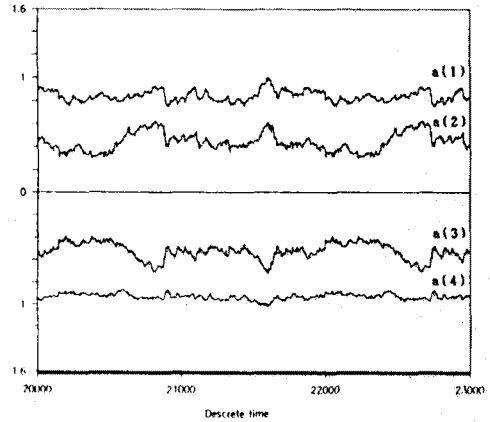


그림 5. 매개변수 A(n)의 2만번째 수렴특성

V. 결론

신호처리에 많이 사용되는 AR 모형의 매개변수의 추정 방법중 FRLS알고리즘은 적은 계산량과 빠른 수렴속도를 갖지만 수치적으로 불안정하므로 본 논문에서는 이를 개선하기 위해 과환이득 K를 사용하여 이론적으로 같아야 하는 FRLS의 변수들에 적당한 값의 가중치를 줌으로써 오차의 누적현상을 막고 FRLS의 단점인 수치적 불안정성을 개선하여 강인성을 보완하는 방안을 제시하였다. 제안된 알고리즘의 안정성을 확인하기 위하여 컴퓨터 시뮬레이션을 하였으며 좋은 결과를 얻었다.

VI. 참고문헌

[1] M. Bellenger, "Engineering aspects of fast least squares algorithm in transversal adaptive filters," in Proc. ICASSP 87 Conf., (Dallas, TX), Apr. 1987, pp2149-2152.  
 [2] J.L. Bette and G.V. Moustakides, "Stabilization of fast Kalman algorithms," IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP-37, pp. 1342-1348, Sept., 1989.

- [3] J.L.Botto and G.V.Moustakides, "Stabilization of fast recursive least-squares transversal filters for adaptive filtering," in Proc. ICASSP 87 Conf. (Dallas, TX), Apr. 1987, pp. 403-407.
- [4] G. Carayannis, D. Manolakis, and N. Kalouptsidis, "A fast sequential algorithm for best filtering and prediction," IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP-31, no. 6, pp. 1394-1402, 1983.
- [5] J.M. Cioffi and T. Kailath, "Fast, recursive least squares transversal filters for adaptive filtering," IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP-32, no. 2, pp. 304-337, Apr. 1984.
- [6] L. Ljung, M. Morf, D. D. Falconer, "Fast calculation for gain matrices for recursive estimation schemes," Int. J. Control, Vol. 27, no. 1, 1978.
- [7] D. D. Falconer and L. Ljung, "Application of fast Kalman estimation to adaptive equalization," IEEE Trans Commun., vol. COM-26, pp. 1439-1446, Oct. 1978.
- [8] C. Halkias, G. Carayannis, J. Dologlou, and D. Emmanoulopoulos, "A new generalized recursion for the fast computation of the Kalman gain to solve the covariance equations," in Proc. ICASSP 82, Paris, France, May 1982, pp. 1760-1763.
- [9] P. Fabre, C. Gueguen, "Improvement of the fast recursive least squares algorithms via normalization: A comparative study," IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol. ASSP-34, no. 2, April, 1986.
- [10] F. Ling, J. G. Proukis, "Numerical accuracy and stability of adaptive estimation algorithms caused by round-off error," Proc. ICASSP 84, San Diego.
- [11] S. Ljung, L. Ljung, "Error propagation properties of recursive least-squares adaptation algorithms," Automatica Vol. 21, no. 2, 1985.
- [12] D. W. Lin, "On digital implementation of the fast kalman algorithms," IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP-32, no. 5, Oct. 1984.
- [13] D. T. M. Slock and T. Kailath, "Numerically stable fast transversal filters for recursive least squares adaptive filtering," IEEE Trans., Acoust., Speech, Signal Processing, vol. 39, no. 1, pp. 92-114, January, 1991.
- [14] 정찬수, "적용잡음제거시스템을 위한 고속 칼만알고리즘에 관한 연구", 서울대학교 전기공학과, 1986. 박사학위논문