

비선형 궤환 선형화 기법을 이용한 자기 부상 열차의 부상 및 안내제어기의 개발.

주성준

서진현

서울대학교 전기공학과

Development of controller for a lateral motion of a staggered type Magnetic wheel with EMS system using feedback linearization.

Joo, Sungjun

Seo Jinheon

Electrical Engineering Dept. Seoul National University

Abstract- A nonlinear controller based on feedback linearization method is proposed for an electromagnetic suspension system. After exactly linearizing the system with nonlinear feedback linear control technique is applied. Modeling of stagger typed magnet is introduced and controlled for not only levitation but guidance. By the feedback linearization, the nonlinear, MIMO system is linearized and decoupled, so we can use linear control law. The simulation of this system control skim is demonstrated. Robustness properties of the proposed controller with respect to the load variations and external disturbance is also analyzed for a multi input multi output system. In this properties, the boundary of variation is proposed.

1. 서론

흡인식 자기 부상열차를 제어하는데 있어서 비선형 궤환 선형화 기법[3]을 도입하여 부상 및 안내제어를 연구하였다. 본 연구에서는 편치 배치된 두개 자석을 도입하여 z방향의 거리, 속도, y방향의 거리, 속도, 자석1의 전류, 자석2의 전류를 각각 상태변수로 잡고, 이 상태 변수로 이루어진 MIMO의 비선형 시스템이 궤환 선형화가 가능함을 보이고, 모형화된 식에 비선형 궤환식을 인가하여 선형화된 상태방정식으로 비선형 제어를 구성하였다. 또한 제시한 비선형 제어기가 무제변화와 수직 방향, 수평방향의 외란에 대해서 안정함을 보이고 그에 따른 시뮬레이션 결과를 보였다.

2. 모형화와 비선형 궤환선형화에 의한 선형제어기 구성

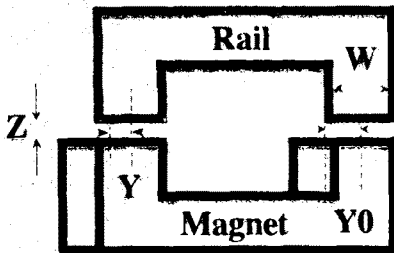


그림 1 편치배치된 자석

하나의 자석에 대한 y 방향의 힘 F_y 와 z방향의 힘 F_z 는 다음과 같이 나타낼 수 있다. [1]

$$F_{z1} = \alpha_z \left[\frac{i_1^2}{z_c} \right]^2 \left[1, \frac{2z_c}{\pi W}, \frac{2y_{c1}}{\pi W} \tan^{-1} \frac{y_{c1}}{z_c} \right] \quad (2.1)$$

$$F_{z2} = \alpha_z \left[\frac{i_2^2}{z_c} \right]^2 \left[1, \frac{2z_c}{\pi W}, \frac{2y_{c2}}{\pi W} \tan^{-1} \frac{y_{c2}}{z_c} \right] \quad (2.2)$$

$$F_{y1} = -\alpha_y \frac{i_1^2}{z} \tan^{-1} \frac{y_{c1}}{z} \quad (2.3)$$

$$F_{y2} = -\alpha_y \frac{i_2^2}{z} \tan^{-1} \frac{y_{c2}}{z} \quad (2.4)$$

$$\alpha_z = \frac{\mu_0 1m^4 N^2}{4}, \alpha_y = \frac{\mu_0 1m^4 N^2}{2\pi}, y_{c1} = y_0 + y, y_{c2} = y_0 - y$$

한편 전기회로에 관한 식을 유도하기 위하여 전자석의 고유저항을 R, y와 z에 따라서 변하는 자석의 인덕턴스를 $L(y, z)$ 라고 하면 다음식이 성립한다.

$$V(t) = R i(t) + \frac{d}{dt} [L(z, y) i(t)] \quad (2.5)$$

$$L(z, y) = \mu_0 N^2 A(t) / 2z(t), A(t) = l_m (W - y_c) \quad (2.6)$$

$$V(t) = R i(t) + \alpha_i \frac{y_c(t)z(t) + Wz(t) - y_c(t)z(t)}{z^2} i(t) + \frac{di}{dt} \alpha_i \frac{W - y_c(t)}{z(t)} \quad (2.7)$$

$$\alpha_i = \frac{\mu_0 N^2 A}{2}, y_c: \text{마그네트 중심과 레일 중심의 거리}$$

그림 2는 2.1 ~ 2.4식들을 이용해서 y와 z에 관하여 F를 도시한 그림이다. 여기서 F_y 는 open loop stable이고 F_z 는 open loop unstable임을 알 수 있다.

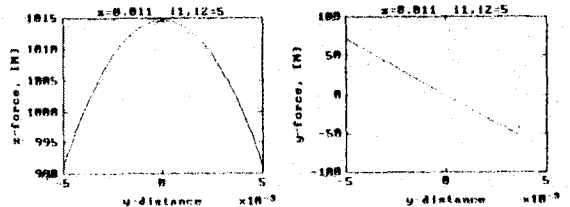


그림 2. $z = 0.011[m], i = 5[A]$ 로 고정하고 $y = 0.01 \sim 0.01[m]$ 인데 두개자석의 부상력 및 안내력

모형화된 편치배치 단일 자석의 식은 다음과 같다.

$$\begin{matrix} x_1 = z & x_2 = \dot{z} & x_3 = y & x_4 = \dot{y} & x_5 = i_1 & x_6 = i_2 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -2 [F_{z1} + F_{z2}] / m + g \\ x_4 \\ 2 [-F_{y1} + F_{y2}] / m \\ -R x_1 x_5 + y_0 x_2 x_5 + x_3 x_2 x_5 + W x_2 x_5 + x_1 x_4 x_5 \\ \alpha_i (W - y_0 - x_3) (W - y_0 - x_3) x_1 \\ R x_1 x_6 + y_0 x_2 x_6 + x_3 x_2 x_6 + W x_2 x_6 + x_1 x_4 x_6 \\ \alpha_i (W - y_0 - x_3) (W - y_0 - x_3) x_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_1 \\ \alpha_1(W-y_0-x_3) \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_1 \\ \alpha_1(W-y_0-x_3) \end{bmatrix} u_2 \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_3 \end{aligned} \quad (2.9)$$

먼저 위의 모형화된 식이 선형화가 가능함을 보이려면 $[g_1 \text{ ad}r g_1 \text{ ad}r^2 g_1 \ g_2 \text{ ad}r g_2 \text{ ad}r^2 g_2]$ 가 서로 선형 독립이어야 한다. Lie bracket 의 정의에 따라 전개하여 보면 위의 각 식들은 서로 선형 독립임을 알 수 있고 따라서 우리가 구한 상태 방정식은 선형화가 가능하다.

각 입력에 대한 출력의 상대차수 (relative degree)를 구하기 위해 출력 y_1 과 y_2 를 각각 미분해보면 $\dot{y}_1 = \dot{x}_2 =$

$$\frac{d}{dt} \left[\begin{array}{c} \alpha_7 \\ m x_1^2 \end{array} \left[\begin{array}{c} 1 \\ \frac{2x_1}{\pi W} \end{array} \right] (x_5^2 + x_6^2) - \frac{2y_0}{\pi W} P - \frac{2x_3}{\pi W} Q \right] + g$$

$$y_2 = \dot{x}_4 = \frac{d}{dt} \left[\begin{array}{c} \alpha_7 \\ m x_1 \end{array} \left[\begin{array}{c} 0 \\ Q(x_1, x_2, x_5, x_6) \end{array} \right] \right] \quad (2.10)$$

여기서

$$P = x_5^2 \tan^{-1} \frac{y_0 + x_3}{z_c} + x_6^2 \tan^{-1} \frac{y_0 - x_3}{z_c} \quad (2.11)$$

$$Q = x_5^2 \tan^{-1} \frac{y_0 + x_3}{z_c} - x_6^2 \tan^{-1} \frac{y_0 - x_3}{z_c} \quad (2.12)$$

와 같이 되며 y_1, y_2 를 각각 3번 미분하였을때 x_5, x_6 의 함수인 P와 Q에 의하여 x_5, x_6 가 처음으로 나타난다. 그리고 위의 모형화된 식에서 보이는 것처럼 이들은 input v_1, v_2 의 함수이다.

따라서 $r_1, r_2 = 3$ 이고 [4] decoupling matrix $E(x)$ 는

$$E(x) = \begin{bmatrix} L_{g1} L_f^2 h_1 & L_{g2} L_f^2 h_1 \\ L_{g1} L_f^2 h_2 & L_{g2} L_f^2 h_2 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

여기서

$$\begin{aligned} L_{g1} L_f^2 h_1 &= \frac{2W}{m x_1 (W - y_0 - x_3)} \\ &\times \left[x_5 \left(1 + \frac{2x_1}{\pi W} \right) - \frac{2x_5}{\pi W} \tan^{-1} \left(\frac{y_0 + x_3}{x_1} \right) \right] (y_0 + x_3) \\ L_{g2} L_f^2 h_1 &= \frac{2W}{m x_1 (W - y_0 - x_3)} \\ &\times \left[x_6 \left(1 + \frac{2x_1}{\pi W} \right) - \frac{2x_6}{\pi W} \tan^{-1} \left(\frac{y_0 - x_3}{x_1} \right) \right] (y_0 - x_3) \\ L_{g1} L_f^2 h_2 &= \frac{4x_5}{\pi m (W - y_0 - x_3)} \tan^{-1} \left(\frac{y_0 + x_3}{x_1} \right) \\ L_{g2} L_f^2 h_2 &= \frac{4x_6}{\pi m (W - y_0 - x_3)} \tan^{-1} \left(\frac{y_0 - x_3}{x_1} \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

det $E(x)$ 는 동작점에서 non-singular 이므로 $E^{-1}(x)$ 가 존재하여 non-interacting control Law는 다음과 같이 된다.

$$u = E^{-1}(x) \begin{bmatrix} L_f^3 h_1 \\ L_f^3 h_2 \end{bmatrix} + E^{-1} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

새로운 input v 와 output y 와의 관계는

$$\begin{bmatrix} y_1(3) \\ y_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

total relative degree $r = 3+3=6$ 이고 기저좌표를 T로 치환하여

$$\begin{aligned} T_1^1 - h_1(x) &= x_1 \\ T_2^1 - L_f h_1(x) &= x_2 \\ T_3^1 - L_f^2 h_1(x) &= 2 [F_{21} + F_{22}] / m + g \\ T_1^2 - h_2(x) &= x_3 \\ T_2^2 - L_f h_2(x) &= x_4 \\ T_3^2 - L_f^2 h_2(x) &= 2 [-F_{y1} + F_{y2}] / m \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} T_1^1 &= T_2^1 \\ T_2^1 &= T_3^1 \\ T_3^1 &= L_f^3 h_1(x) + \sum_{i=1}^2 L_{g_i} L_f^2 h_1(x) u_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_1^2 &= T_2^2 \\ T_2^2 &= T_3^2 \\ T_3^2 &= L_f^3 h_2(x) + \sum_{i=1}^2 L_{g_i} L_f^2 h_2(x) u_i \end{aligned} \quad (2.18)$$

최종적으로 구한 선형 시스템은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v_2 \quad (2.19)$$

비선형이 제거된 모델(2.19)을 이용하여 선형제어기

$$v_1 = r_1 + k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 \dot{x}_2 \quad (2.20)$$

$$v_2 = k_4 x_3 + k_5 x_4 + k_6 \dot{x}_4 \quad (2.21)$$

(단, $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6 < 0$)

를 대입시켜서

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 & k_5 & k_6 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

제어기가 취부된 상태방정식을 얻을 수 있다.

3. 비선형 변환 선형화 제어기의 안정성 검토

3.1 무계변화에 관한 안정성

실제 시스템에 있어서 무계는 변화가 매우 심한 요소가 되기 때문에 본 논문에서 제시한 제어기가 무계의 변동에 대해서 어느정도 안정성을 가질 수 있는지 검토되어야 한다. 제시된 제어기는 시스템의 무계 m 에 대해서 설계한 것이므로 실제의 무계가 m 에서 m' 으로 변할때에도 비선형성이 제거되는 것을 보임으로써 안정성을 선형 시스템에서의 m 의 변화로 해석할 수 있다.

먼저 계산을 간단히 하기위해 다음 기호를 정의한다.

정의 1.

$$\begin{aligned} L_{GF11} &= m L_{g1} L_f^2 h_1, & L_{GF12} &= m L_{g2} L_f^2 h_1 \\ L_{GF21} &= m L_{g1} L_f^2 h_2, & L_{GF22} &= m L_{g2} L_f^2 h_2 \\ L_{H1} &= m L_f^3 h_1, & L_{H2} &= m L_f^3 h_2 \end{aligned}$$

식 2.18에서 무계가 m' 으로 변했을 때의 식은

$$T_3^1 = L_{H1}/m' + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{m'} L_{GF1i} u_i \quad (3.1.1a)$$

$$T_3^2 = L_{H2}/m' + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{m'} L_{GF2i} u_i \quad (3.1.1b)$$

$$\begin{bmatrix} T_3^1 \\ T_3^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{m'} \begin{bmatrix} L_{H1} \\ L_{H2} \end{bmatrix} + \frac{1}{m'} \begin{bmatrix} L_{GF11} & L_{GF12} \\ L_{GF21} & L_{GF22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (3.1.2)$$

무게가 m 으로 설계한 제어식 (2.15)을 [$u_1 \ u_2$]'에 대입하면

$$\begin{bmatrix} T_{31} \\ T_{32} \end{bmatrix} = \frac{m}{m'} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (3.1.3)$$

식 2.18을 3.1.1 식을 이용해서 고치면 무게 m' 인 좌표변환식 이 얻어지고 무게 m 으로 설계한 제어식을 인가하면

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m/m' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ m/m' \end{bmatrix} v_2 \quad (3.1.4)$$

선형 시스템의 제어식 2.20, 2.21를 변환하여

$$v_1 = r_1 - k_1 s_1 - k_2 s_2 - k_3 (m'/s_3/m) - k_3 g(1/m'/m) \quad (3.1.5a)$$

$$v_2 = k_4 s_3 - k_5 s_4 - k_6 (m'/s_6/m) \quad (3.1.5b)$$

제어식을 인가 하면

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 & k_5 & k_6 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} * km \quad (3.1.6)$$

$k_1 = (m/m')k_1$, $k_2 = (m/m')k_2$, $k_3 = (m/m')$
 $k_5 = (m/m')k_5$, $km = (m/r_1/m)k_3 g(1/m'/m)$
 따라서 m' 이 적정 범위에 있을때 참고문헌 [6]에서와 같은 방법으로 k 를 잘 선정해주면 시스템이 안정범위에 있게된다.

3.2 외란에 관한 안정성

Z,Y방향의 외란을 고려하면 2.8식 중 둘째, 네째 열은

$$x_2 = -2 [F_{z1} + F_{z2}]/m + g + F_{zd}/m \quad (3.2.1)$$

$$x_4 = -2 [F_{y1} + F_{y2}]/m + F_{yd}/m \quad (3.2.1)$$

와 같이되어 좌표변환식 2.17와 2.18은 식(3.2.2), 식(3.2.3)과 같이 새로운 식으로 바뀐다.

$$\begin{aligned} T_1^1 &= h_1(x) = x_1 \\ T_2^1 &= L_r h_1(x) = x_2 \\ T_3^1 &= L_r^2 h_1(x) = -2 [F_{z1} + F_{z2}]/m + g + F_{zd}/m \\ T_1^2 &= h_2(x) = x_3 \\ T_2^2 &= L_r h_2(x) = x_4 \\ T_3^2 &= L_r^2 h_2(x) = -2 [F_{y1} + F_{y2}]/m + F_{yd}/m \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

$$\begin{aligned} T_1^1 &= T_2^1 \\ T_2^1 &= T_3^1 + F_{zd}/m \\ T_3^1 &= L_r^2 h_1(x) + \sum_{i=1}^2 L_{g_i} L_r^2 h_1(x) u_i \\ T_1^2 &= T_2^2 \\ T_2^2 &= T_3^2 + F_{yd}/m \\ T_3^2 &= L_r^2 h_2(x) + \sum_{i=1}^2 L_{g_i} L_r^2 h_2(x) u_i \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

3.2.3식 으로 구한 상태방정식은 3.2.4 와 같다.

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} p + \begin{bmatrix} 0 \\ F_{zd}/m \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_{yd}/m \\ 1 \end{bmatrix} v_2 \quad (3.2.4)$$

제어기를 구성하면

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 & k_5 & k_6 \end{bmatrix} p + \begin{bmatrix} 0 \\ F_{zd}/m \\ 1 \\ 0 \\ F_{yd}/m \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.5)$$

와 같고 3.1결과 같이 k 값을 잘 조절하면 외란의 영향을 줄일 수 있다.

4. 시뮬레이션

위의 (2.22)식에서 보는 바와 같이 선형 시스템은 완전히 decouple되어 있고 $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ 를 조정하면 전체 시스템의 동작형태를 임의로 조절이 가능하게 되어있다.

시뮬레이션에서는 각종 외란과 다양한 초기조건에서 본 논문이 제시한 제어기를 시험해 보았다. 여기서 선형 시스템의 pole을 -1, -1, -15에 있도록 임의로 정하였고 시뮬레이션상에 사용한 수식의 데이터는 실제 설계된 전자식의 데이터로서 그 값은 $G_{ab} = 0.011[m]$, $y_0 = 0.005[m]$, 저항(R)=1.344[Ω] 무게=137[kg], $W = 0.028[m]$, $L_m = 0.94[m]$, $N = 506$ 로 하였다.

5. 결론

비선형의 자기 부상열차 부상제어와 안내제어를 하기위해서 궤환 선형화 기법을 사용한 제어기를 제시하였다. 본 제어기는 시뮬레이션 결과에서 보는 바와 같이 다양한 초기조건과 무게 변동 및 외란에 대해서 선형 시스템처럼 안정하게 동작하고 제시된 동작점으로 잘 수렴함을 알 수 있다.

4장에서는 본 제어기가 무게변화의 외란에 무관하게 선형화가 유지됨을 수학적으로 보였다. 선형 근사화 기법이 아니고 정확한 선형화방법이기 때문에 어떤 원인에 의해서 선형화가 깨지면 반산할 수 있는 위험이 있기 때문에 선형성 유지는 큰 의미를 갖는다.

제안된 제어기는, 실제로 구현하는데 있어서 있을 수 있는 문제점들 즉, 전력공급장치의 한계와 시간 뒤짐, 디지털 구현시 문제점등에 관한 검토가 이루어지지 않아서 제어기를 실제 적용할 때 이에 관한 깊은 연구가 요구 된다.

7. 참고 문헌

[1] 權内 - "電磁 吸引式 磁氣浮上車兩 の 左右案内制御", 東京 大學 大學院 電氣工學科 學位論文, pp. 20-29, 1989

[2] K.J. Binns and P.J. Lawrenson, "Analysis and computation of electric Field Problems", New York, Macmillan, 1963, chapter 8

[3] A. Isidori, "Nonlinear control systems", New York, Springer-Verlag, 1989, pp. 234-266

[4] J. Jacques, E. Slotine "Applied nonlinear control", Prentice-Hall Inc., 1991, chapter 6

[5] Takafumi Koseki and Eisuke Masada, "Lateral motion of a short stator type magnetic wheel with electromagnetic suspension system", dept. Electrical Engineering, The Univ. of Tokyo, Tokyo 113

[6] 진주화, "비선형 궤환 선형화기법을 사용한 자기부상열차의 제어기 개발", 서울대학교 전기공학과 석사학위논문, pp. 15-21, 1991

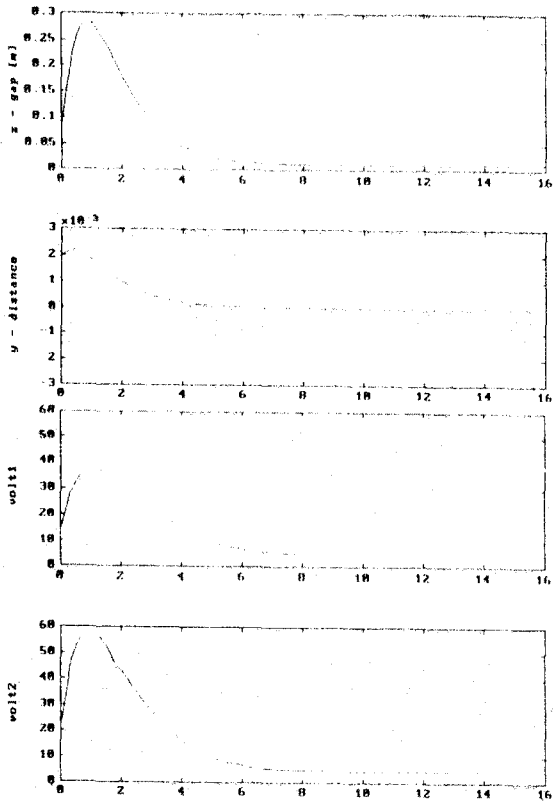


그림 3.
 $z_0=9[cm]$, $y_0=2[mm]$ 일때의 $z, y, v1, v2$ 파형

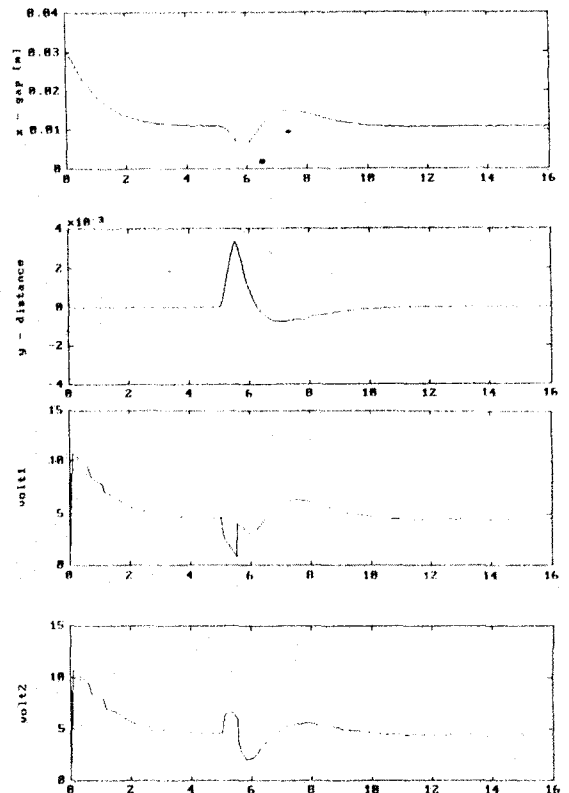


그림 5.
 $t=5$ 에서 y 방향에 0.5초 동안 20N의 힘을 가한 파형

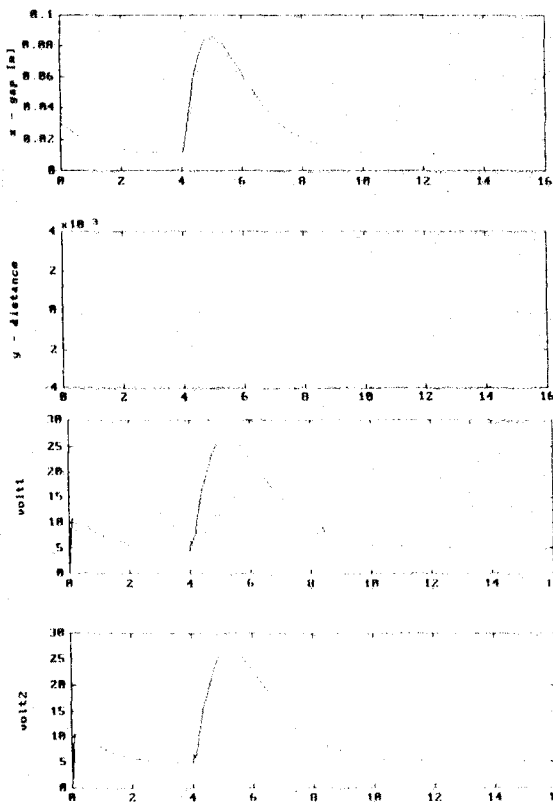


그림 4.
 $t=4$ 에서 무게를 30% 증가시 파형

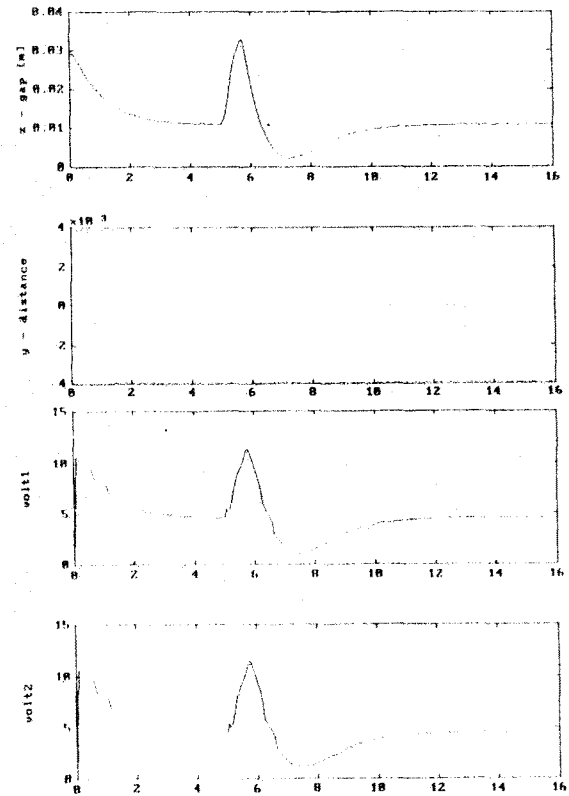


그림 6.
 $t=5$ 에서 z 방향에 0.5초 동안 100N의 힘을 가한 파형