

최적 수렴인자를 갖는 LMS 에 의한 적응 월쉬 등화기 설계에 관한 연구

안두수*, 김종부⁰

* 성균관대학교 공과대학 전기공학과
⁰ 인덕전문대학 전자과

The Design of Adaptive Walsh Equalizer via LMS Algorithm with the Optimal Convergence Factor

Ahn, Doo-Soo*, Kim, Jong-Boo⁰

* Dept. of Electrical Eng. Sung Kyun Kwan Univ.
⁰ Dept. of Electronic Eng. In Duk Institute of Design

ABSTRACT

In this paper, we have introduced a network and showed how this can be realised as an adaptive equalizer. The walsh equalizer is built from a set of Walsh-Block pulse functions and LMS algorithms with the optimal convergence factor(C.F.). The convergence and the adaptation speed of this algorithms depends on the proper choice of a design factor μ called the C.F.. Conventional adaptation techniques use the fixed time constant C.F. by the method of trial and error. In this paper, we propose to adaptive C.F. which are optimally tailored to adapt C.F. in real time so that their values are kept optimum for a new set of input variables.

1. 서론

채널의 왜곡으로 인한 수신 신호의 Timing discrepancy 나 Phase jitter 등은 등화기에서 Filtering 해줌으로써 보다 정확한 정보 전송이 가능하다.

그래서, 본 논문에서는 채널의 출력신호를 Walsh-Block Pulse 함수에 의해 직교 변환 (Orthogonal Transform) 하므로써³⁾, 공분산 행렬의 구성을 간단히 할수있는 Walsh network를 구성하여, Filtering의 효율을 증대시키고, 기존의 등화기의 Adaptation 부분에서 사용되는 Direct Method 나 Steepest Descent Method의 경우에 있어 채널의 왜곡이 심할 경우 흔히 발생하는 안정도 및 실행 속도가 저하되는 문제점을 개선하기 위하여 실시간 반복 처리가 가능한 LMS Algorithm 을 도입하여 등화기의 안정도 및 실행 속도를 향상시키고자 한다^{2, 4)}.

그러나, LMS 이론의 가장 중요한 문제는 적응 수렴인자의 결정에 있는 만큼 LMS 의 적응인자 결정에 있어서 시행 착오법을 거쳐야 하는 문제점을 개선하기 위하여, 최적 적응인자(Optimal Convergence Factor)의 결정법을 제시하여¹⁾, 등화기의 안정도 및 실행 속도를 향상시키므로써 성능을 개선하고 향후 데이터 통신 분야에 Walsh 함수의 적용 가능성을 제시하고자 한다.

2. Walsh-Block Pulse Network 구성

어떤 통신시스템에서 송신신호 S(t)는 1/Ts(symbol/sec)로 채널을 통하여 전송되어진다고 하자. 이때, S(t)는 전송되는 과정에서 채널 distortion이나 잡음성분 등의 부가로 인해 채널에서 검출된 신호 X(t)와는 차이가 난다. 이때 등화기는 수신신호 X(t)와 전송매체에 대한 일반적인 정보를 토대로 송신신호 S(t)의 본래형태를 추정한다. 이때 적응등화기의 Impulse 응답은

$$h(t) = \sum_{i=0}^{N-1} c_i h_i(t) \quad (2.1)$$

c_i : 탭의 이득 하중치(Tap gain weights)

로 표현된다³⁾. 등화기는 c_i 를 조절하여 평균자승오차가 최소화 되도록 수신 신호를 보정한다.

Network을 구성하는데 이용되는 Walsh 함수는 정의구간 [0, 1]에서 i 의 값을 가지는 직교함수 (Orthogonal Function)이며, Network 에 이용되는 이산 Walsh 함수는 다음과 같다⁵⁾.

$N = 2^m$ 의 항을 가지는 이산 Walsh 함수는 다음과 같다⁴⁾.

$$WAL(i_{m-1}, i_{m-2}, \dots, i_0 : t_{m-1}, t_{m-2}, \dots, t_0)$$

$$= \prod_{r=0}^{m-1} (-1)^{i_{m-1-r}(t_r + t_{r+1})} \quad (2.2)$$

i, t : 이진 기수법(binary notation)으로 표현된 변수
 $i = 0, 1, \dots, 2^m - 1$

위의 형식의 2개의 이산Walsh함수의 곱(Product)은 다음과 같다.

$$Wal(i, t)WAL(j, t) = \prod_{r=0}^{m-1} (-1)^{(i \oplus j)_{m-1-r}(t_r + t_{r+1})} \quad (2.3)$$

\oplus : modulo-2-addition, $i, j = 0, 1, \dots, 2^m - 1$

Walsh 함수의 직교성을 주기 T의 구간에 대해 적용하여, 구간 $0 \leq t < T$ 외에선 0 이 되는 Walsh Impulse 함수를 구하여 보자³⁾.

$$WAL(i, t) = 0, \quad t < 0, \quad i = 0, 1, \dots, 2^m - 1 \quad (2.4)$$

$$\int_0^T WAL^2(i, t) dt = T \quad (2.5)$$

이와 같은 성질은 채널에서 필요한 대역의 Sampling 과 선형 Filter 의 기저함수로 사용될 수 있다. 선형 Filter를 구성하고 특정 Sampling 구간에서만 Filtering 값을 갖게하기 위해서 Block Pulse 함수를 도입한다. 구간 $0 \leq t < T$ 에서 정의되는 Block Pulse 함수의 집합은 $\{b_i(T/2^m, t)\}$ 로써 표현되며, 이 Block Pulse 함수는 i 번째 구간에서 다음과 같이 표현된다.

$$b_i(T/2^m, t) = \begin{cases} 1, & \frac{iT}{2^m} \leq t < \frac{(i+1)T}{2^m}, \quad i = 0, 1, \dots, 2^m - 1 \\ 0, & \text{그 외 구간} \end{cases} \quad (2.6)$$

이와 같은 Block Pulse 함수의 특징을 이용하여 Walsh Impulse 함수를 표현하면

$$WAL(i, t) = \prod_{r=0}^{p-1} \sum_{j_r=0}^{2^m-1} (-1)^{i_{p-1-r}(j_r + j_{r+1})} \cdot B_j\left(\frac{T}{2^m}, t\right) \quad (2.7)$$

와 같다. Walsh Impulse 함수로 h(t)를 표현하면 다음과 같다.

$$h(t) = \prod_{r=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{j_r=0}^{2^m-1} (-1)^{i_{p-1-r}(k_r + k_{r+1})} \cdot b_k\left(\frac{T}{2^m}, t\right) \quad (2.8)$$

식(2.8)은 Walsh Block Pulse 함수 형태로 나타낸 등화기의 Impulse 응답으로서 적응 Walsh 등화기의 Walsh Network 부분의 구성을 의미한다.

3. Adaptive Walsh Filter 설계

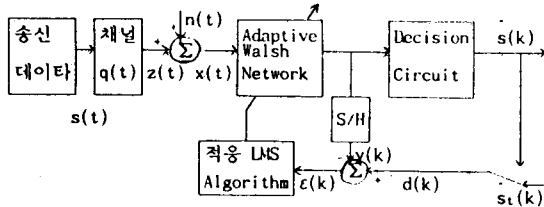


그림 3-1 LMS 에 의한 적응 Walsh 등화기
FIG. 3-1 LMS Adaptive Walsh Equalizer

여기에서 이용된 Band-Limited 된 데이터 통신 Channel 은 Nyquist 속도의 전송속도를 가지며, 다음과 같은 Raised-Cosine 형태의 주파수 응답 (frequency response) 특성을 갖는다³⁾.

$$Q(f) = \begin{cases} T_s & 0 \leq |f| \leq (1-\beta) \frac{1}{2T_s} \\ \frac{T_s}{2} \left[1 - \sin \left(\frac{\pi T_s}{\beta} \left(f - \frac{1}{2T_s} \right) \right) \right] & (1-\beta) \frac{1}{2T_s} \leq |f| \leq \frac{(1+\beta)}{2T_s} \end{cases} \quad (3.1)$$

여기서 β 는 secondary이상의 robe에 영향을 주는 roll off parameter이다. 이러한 Spectrum을 가지는 신호(Pulse)의 Impulse 응답은 다음과 같다.

$$q(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T_s}\right) \cos\left(\beta \frac{\pi t}{T_s}\right)}{\frac{\pi t}{T_s} \left(1 - \frac{4\beta^2 t^2}{T_s^2}\right)} \quad (3.2)$$

$T/2^m$ 의 de.ay 를 가지고, 2^m 개의 Tap 을 가지는 Walsh Network 의 채널입력신호 $x(t)$ 에 대한 i 번째 Walsh Network의 출력은

$$y(i, t) = x(t) * \text{WAL}(i, t), \quad * : \text{Convolution} \quad (3.3)$$

와 같다. 채널 출력 $z(t)$ 와 Zero-mean Gaussian Noise $n(t)$ 는 ergodic, Uncorrelated로 가정하자. $\text{WAL}(i, t)$ 는 Walsh Impulse 함수이며, T_s 는 $T/2^m$ 와 같은 Sampling 주기를 가진다. 등화기의 출력 신호는

$$y(t) = \sum_{i=0}^M c_i y(i, t) \quad (3.4)$$

이다. 수신단에서 전송속도 $1/T_s$ 의 데이터류 $t = kT_s + \tau$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, τ : timing error)로 Sampling하여 검출된 데이터는 Tracking Mode에서 요구응답(Desired Response)으로 사용하고 Training Mode에서는 Test Data를 이용하여 등화기를 초기화 시킨다. ISI를 제거하기 위해서는 Sinc Criterion을 만족해야하는데 이를 위해 사용된 식(3.2)는 Roll off Parameter 가 증가할수록 대역폭이 증가한다는 단점이 있다. 이러한 점을 개선하기 위해 대역폭을 Sinc 함수 그래프와 같이 하면서 $(1/2T)$, ISI를 줄이는 방법이 고안되었는데 두개의 Sinc 함수가 중첩된 형태이고 전송 속도도 Nyquist 속도로 전송이 가능하며 ISI는 0이 되는 다음과 같은 특성을 갖는 Duobinary 신호를 원하는 응답 (Desired Response)으로 잡는다.

$$d(\omega) = \begin{cases} 2T_s \cos(\omega T_s / 2) & |\omega| \leq \pi / T_s \\ 0 & \text{그 외 구간} \end{cases} \quad (3.5)$$

$$d(t) = \frac{4}{\pi} \frac{\cos \frac{\pi t}{T_s}}{1 - \frac{4t^2}{T_s^2}} \quad (3.6)$$

입력신호와 요구 응답 $d(k)$ 를 Stationary Ergodic Process 라고 가정하면 k 번째 시간에 대한 오차(Error)는

$$\begin{aligned} e(k) &= d(k) - y(k) \\ &= d(k) - C^T Y(k) \end{aligned} \quad (3.7)$$

이 오차에 대한 평균 지승 오차는

$$\begin{aligned} \epsilon_{\text{MSE}} &= E[d^2(k)] - 2E[d(k)Y^T(k)]C + C^T E[Y(k)Y^T(k)]C \\ &= E[d^2(k)] - 2P^T C + C^T R C \end{aligned} \quad (3.8)$$

와 같이 된다. 이 식에서

$$E[d(k)Y(k)] = P, \quad E[Y(k)Y^T(k)] = R \quad (3.9)$$

는 Cross-Correlation 및 공분산(Covariance)행렬을 나타낸다. 또한 Y_k 에 대한 공분산행렬은 다음과 같은 $M \times M$ 행렬이 된다. 공분산행렬(Covariance Matrix) R 은

$$R_{ij} = y(i, kT_s + \tau)y(j, kT_s + \tau) = Z_{ij} + N_{ij} \quad (3.10)$$

와 같이 채널 입력신호와 잡음성분으로 나타낼수 있다. 신호와 잡음(Noise)이 Ergodic하고, Band-Limited 된 채널을 Nyquist 속도로 전송되어진다면 공분산 행렬은 Real, Symmetric, Positive Definite한 다음과 같은 특성을 가진다.

$$R_{ij} = \begin{cases} 0 & (i+j) \text{ odd} \\ R_{ji} & (i+j) \text{ even} \end{cases} \quad i, j = 0, 1, \dots, 2^m - 1 \quad (3.11)$$

이와 같은 R 의 특성을 Walsh Network의 출력(Output)으로 나타내어 보면

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \{ (x(kT_s + \tau) * \text{WAL}(i, kT_s + \tau)) (x(kT_s + \tau) * \text{WAL}(j, kT_s + \tau)) \} \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^M (x(kT_s + \tau) * \text{WAL}(i, kT_s + \tau)) \\ &\quad \cdot (x(kT_s + \tau) * \text{WAL}(j, kT_s + \tau)) \end{aligned} \quad (3.12)$$

와 같이 된다. 식(3.8)에서 R 을 포함한 Quadratic형태는 Walsh Network의 출력으로 표시할수 있다.

$$\begin{aligned} C^T R C &= \sum_{i=0}^M \left[(C_i \text{WAL}(i, kT_s + \tau)) * n(kT_s + \tau) \right]^2 \\ &\quad + (C_i \text{WAL}(i, kT_s + \tau)) * n(kT_s + \tau) \right]^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

식(3.8)과 식(3.13)을 살펴보면 평균 지승 오차 평가함수가 하중치의 Quadratic함수이므로 Convex한 Performance Surface를 가진다. 적응 등화기는 탭 이득 하중치를 연속적으로 조정하여 ϵ_{MSE} 가 최소인 점을 찾는다. 이와같은 적응 처리 (Adaptive Processing)를 하는 방법으로써 본 논문에서는 Wiener-Hopf Solution인 Direct Method 와 LMS 방법을 도입하고자 한다.

4. 적응 알고리즘(Adaptation Algorithm)

4.1 Direct Method

최소의 오차를 찾기 위해서는 Performance Surface 에 대하여 Gradient를 취하므로써 얻어진다. Performance Surface 에 대한 Gradient는 탭 이득 하중치에 대하여 ϵ_{MSE} 의 함수를 미분하므로써 얻을 수 있다.

$$\nabla \epsilon_{\text{MSE}} = \frac{\partial \epsilon_{\text{MSE}}}{\partial C} = -2P + 2RC \quad (4.1)$$

최적 하중치 C^* 를 찾기 위해서는 Gradient를 '0'으로 놓으면 얻을 수 있고 이렇게하여 얻은 최적 탭 이득 하중치 C^* 는

$$C^* = R^{-1}P \quad (4.2)$$

와 같이 행렬형태로 표시된 Wiener-Hopf 방정식으로 나타낼 수 있다. 최소의 ϵ_{MSE} 는 (4.2)와 (3.8)에 의해서

$$\epsilon_{\text{MIN}} = [d]_j - P^T C^* \quad (4.3)$$

가 같이 되고, (4.3)과 (3.8)에 의해서

$$\epsilon_{\text{MSE}} = \epsilon_{\text{MIN}} + (C - C^*)^T R (C - C^*) \quad (4.4)$$

와 같이 나타내어 진다. ϵ_{MSE} 는 위와같이 Quadratic 형태로 나타 내지므로 C에 대해 볼록함수임을 알 수 있다. 그러므로 ϵ_{MSE} 가 최소가 되는 C'을 Wiener-Hopf Solution에 의하여 구할 수 있다.

4.2 LMS Algorithm

Direct Method는 식이 간단하고 가장 이상적인 적응방법이나, 실제 계에서는 탭이 늘어날 경우 역행렬을 실행하는데 적응속도가 너무 느려지고 채널의 왜곡이 심해서 R이 나쁜 조건일 때는 적응처리하는데 수렴에 문제가 발생하여 동화를 하는데 부적합한 경우가 발생한다.

그래서 본 논문에서는 계산상으로도 간편하고 적응속도 및 안정도가 우수하며 또한 실제 시스템에서 구현하기에도 용이한 반복적인 알고리즘인 LMS(Least Mean Square)를 도입하여 동화기를 설계함으로써 Walsh Network과 LMS방법에 의해 동화기의 성능을 향상시키고자 한다. LMS 방법의 기초가 되는 Steepest Descent(SD) Algorithm은 다음과 같다²⁾.

$$C^{j+1} = C^j + \mu(-V_j) \tag{4.5}$$

C^j : j 번째 iteration에서의 하중 벡터
 V_j : j 번째 iteration에서의 Gradient
 μ : 수렴인자(Convergence Factor)

실제 Gradient의 사용은 실시간 처리에 어려우므로 Gradient의 추정치를 사용하는 LMS는 다음과 같이 나타낸다.

$$C^{j+1} = C^j + \mu(-V_j) \tag{4.6}$$

V_j : 실제 Gradient의 추정치

식(4.6)에서 Gradient 추정치는

$$\nabla \epsilon_j = \frac{\partial \epsilon_j^2}{\partial C} = -2\epsilon_j Y_j \tag{4.7}$$

ϵ_j : j번째 반복에서의 오차값
 Y_j : j번째 반복에서의 Walsh Network의 출력값

와 같다. 그래서 식(4.7)은 다음과 같이 표현된다.

$$C^{j+1} = C^j + 2\mu\epsilon_j Y_j \tag{4.8}$$

식(4.5)와 식(4.8)에서 알고리즘이 안정하기 위한 수렴인자 μ 의 필요 충분 조건은 다음과 같이 알려져 있다²⁾.

$$0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{max}}, \lambda_{max}: \text{공분산행렬의 최대 고유치} \tag{4.9}$$

식(4.9)와 같이 수렴인자 μ 를 구하는데, R의 고유치를 구해야 하므로, 실제의 차수가 큰 계에서는 계산량이 증대되어 동화기의 적응속도를 감소시킨다. 이러한 고유치 계산 문제를 개선하기 위해서 다음과 같은 충분조건을 수렴인자의 범위로 사용합수 있다⁴⁾.

$$0 < \mu < \frac{1}{\text{tr } R} \tag{4.10}$$

그러나, R 자체가 기대값이기 때문에 정확한 값을 알기가 쉬지 않으며, 또한 μ 의 경계가 클 경우는 최적한 값을 얻기 위해서 많은 시행 착오법(Trial and Error Method)을 거쳐야 하기 때문에 동화기의 성능을 저해한다. 그래서, 본 논문에서는 Walsh Network에 도입한 LMS에 속도 및 안정도를 향상시키기 위해 새로운 최적 수렴인자를 구하는 방법을 도입하고자 한다.

4.3 적응인자의 최적화법

LMS에서 μ 를 결정하기 위한 시행착오 문제를 해결하기 위해 본 논문에서는 동화기의 성능을 크게 좌우하는 μ 의 최적한 시변치를 구하는 방법을 제시하고자 한다. 우선 최적 μ 의 Constraint를 구하여 보자. $j+1$ 번째 오차 $\epsilon(j+1)$ 는 j 번째의 오차 $\epsilon(j)$ 로 Taylor 급수를 이용 표현할 수 있다⁴⁾.

$$\begin{aligned} \epsilon(j+1) &= \epsilon(j) + \sum_{i=0}^M \frac{\partial \epsilon(j)}{\partial c_i(j)} \Delta c_i \\ &= \epsilon(j) - 2\mu_i(j)\epsilon(j) \frac{\partial \epsilon(j)}{\partial c_i(j)}, \quad i=0, 1, \dots, M \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\Delta c_i = c_i(j+1) - c_i(j)$$

식(4.11)에서 H, O, T은 오차함수가 선형이므로 무시하였다. 그래서 식(4.11)에 자승을 취하면 다음과 같다.

$$\epsilon^2(j+1) = \epsilon^2(j) \left\{ 1 - 2 \sum_{i=0}^M \mu_i(j) \left[\frac{\partial \epsilon(j)}{\partial c_i(j)} \right]^2 \right\}^2 \tag{4.12}$$

$\epsilon^2(j+1)$ 의 μ_i 에 관한 편미분치를 0으로 놓아 최적 수렴인자를 구하면 다음과 같다.

$$2\epsilon^2(j) \left\{ 1 - 2 \sum_{i=0}^M \mu_i(j) \left[\frac{\partial \epsilon(j)}{\partial c_i(j)} \right]^2 \right\} \left[\frac{\partial \epsilon(j)}{\partial c_i(j)} \right]^2 = 0 \tag{4.13}$$

$$\mu^*(j) = \frac{1}{2 \sum_{i=0}^M \left[\frac{\partial \epsilon(j)}{\partial c_i(j)} \right]^2} \tag{4.14}$$

식(3.7)에서 $\partial \epsilon(j)/\partial c_i(j)$ 를 구해 식(4.15)에 대입하면 다음과 같은 j 시각에서의 최적 수렴인자를 구할수 있다.

$$\mu^*(j) = \frac{1}{2 \sum_{i=0}^M y^2(j-i)} \tag{4.15}$$

즉 식(4.15)를 식(4.8)에 대입하면 시변 최적 적응인자를 갖는 LMS 알고리즘이 유도된다.

$$C^{j+1} = C^j + \mu^*(j)\epsilon_j Y_j \tag{4.16}$$

5. 시뮬레이션

동화를 위한 통신채널 응답은 식(3.1), 식(3.2)와 같으며 요구 응답은 식(3.5), 식(3.6)과 같다(그림 5-1). 이미 TDL 등과 비교하여 성능면에서 우수한것으로 인정받은³⁾, Walsh network을 이용하여 16 tap (Walsh network에서의 tap의 수 = 2^m)의 Network을 구성한다. 탭이득의 초기치는 0이다. 동화기의 수렴특성 및 안정도는 LMS와 Direct법의 응답특성을 비교하므로써 알수 있다(그림 5-2, 3). 시행 착오법과 최적화법에 의한 응답특성은 잡음의 유무에 따라 그림 5-4, 5의 학습곡선에 나타냈다. 최적 LMS에 의한 동화기의 MSE와 Mean Pulse Distortion은 다음과 같은식에 의해서 구할수있으며³⁾, 그결과는 표 5.1과 같다.

$$\Delta = \sqrt{\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} (d(t)-y(t))^2 dt} \tag{5.1}$$

이상에서 사용한 잡음은 표준편차 1.0의 Gaussian잡음을 사용하였다.

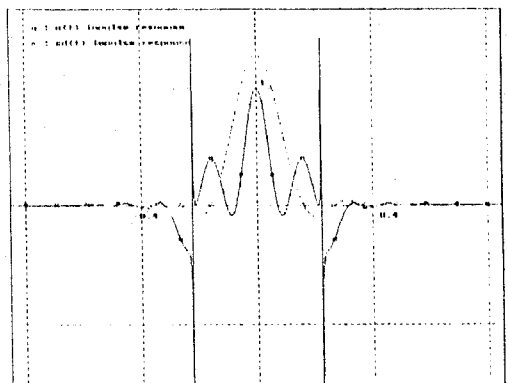


그림 5-1 채널 및 출력 요구 응답
 Fig. 5-1 Channel and Desired Response

표 5-1 평균 자승 오차와 평균 신호 왜곡
Table 5-1 MSE and Mean Pulse Distortion

	Noise On		Noise Off	
	MSE	△	MSE	△
$\mu^*=2.977E-4$	5.408E-3	7.354E-2	5.607E-3	7.565E-2
$\mu =4.517E-4$	5.554E-3	7.479E-2	5.717E-3	7.861E-2

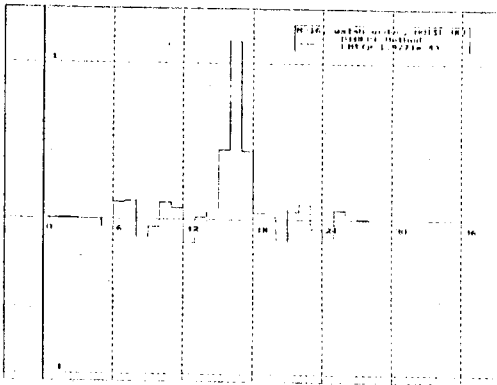


그림 5-2 LMS와 Direct응답 특성(잡음 없음때)
Fig. 5-2 Response Characteristics of LMS and Direct Method(Noise Free)

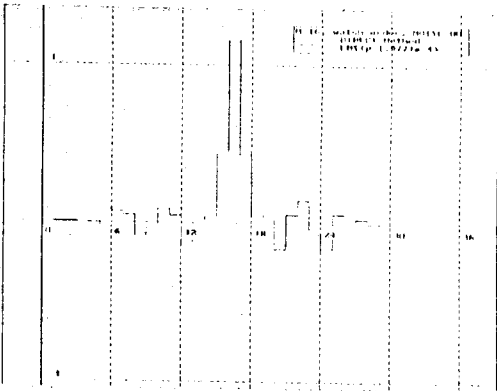


그림 5-3 LMS와 Direct응답 특성(잡음 있음때)
Fig. 5-3 Response Characteristics of LMS and Direct Method(With Noise)

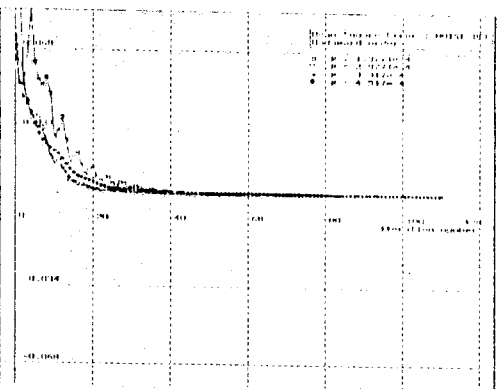


그림 5-4 시행착오법과 최적화법에 의한 학습곡선(잡음 없음때)
Fig. 5-4 Learning Curve of Trial and Error Method and Optimal Method(Noise Free)

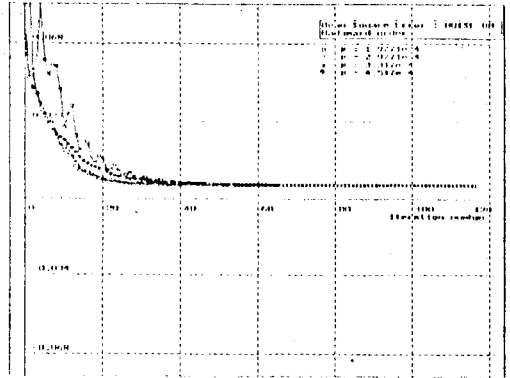


그림 5-5 시행 착오법과 최적화법에 의한 학습곡선(잡음 있음때)
Fig. 5-5 Learning Curve of Trial and Error Method and Optimal Method(With Noise)

6. 결론

통신 속도와 잡음성분의 증가로 성능이 우수한 등화기의 필요성은 더욱 증대되고있으며 그간 등화기는 안정도와 실행 속도의 향상 측면에서 실시간 알고리즘에 대한 연구가 계속 되어지고 있다. 그래서 본 연구에서는 직교변환의 특성을 가지는 Walsh-Block Pulse함수를 이용, Walsh Network을 구성함으로써 공분산 행렬을 쉽게 결정할 수 있었고, 계산상 등화기의 효율을 크게 증대시킬 수 있었으며, H/W 적으로도 쉽게 구현이 가능하리라고 본다. 또한 등화기의 안정도 및 실행속도에 큰 영향을 미치는 적응부분에 대해서는 기존의 Direct나 SD방법이 채널 왜곡이 심할경우 안정도 및 성능에 문제점이 있었으므로, 반복적이고 실시간 처리가 가능한 LMS법을 도입하여 적응성능을 증가시켰다. 그러나, LMS방법에 의한 수렴인자 결정은 시행착오법에 의해 결정해야 하므로 이 문제점을 해결하기 위해서, 최적 수렴인자 결정법을 도입함으로써 적응성을 향상시켜, 향후 속도의 증가에 대한 실시간 등화기 설계에 기여할수 있으리라 기대된다.

참고 문헌

1. Bernard Widrow, Samuel D. Stearns, "ADAPTIVE SIGNAL PROCESSING", Prentice-Hall, inc., 1985.
2. BERNARD WIDROW et. al. " Stationary and Nonstationary Learning Characteristics of the LMS Adaptive Filter", IEEE Proc. Vol 64, no. 8, August 1976.
3. K.M. Wong et. al., " Adaptive Walsh equaliser for data transmission", IEEE Proc., Vol.130, no.2, March 1983.
4. FATHY F. YASSA, , " Optimality in the Choice of the Conver. Factor for Gradient-Based Adaptive Algorithms", IEEE TRANS. ASSP-35, no.1, January 1987
5. K. G. BEAUCHAMP, " Applications of Walsh and Related Functions", ACADEMIC PRESS, 1984
6. SIMON HAYKIN, " ADAPTIVE FILTER THEORY ", Prentice-Hall, 1991.
7. WASFY B. MIKHAEL et.al., "Adaptive Filters with Individual Adaptation of Parameters", IEEE TRANS. CAS-33, 1986.
8. Shuenn-Shyang Wang, " LMS Algorithm and Discrete Orthogonal Transforms", IEEE TRANS. CAS-38, August 1991.
9. S. Chen et al., " Adaptive channel equalisation using a polynomial perceptron structure", IEE PROC. 1990.
10. P. Schier et al., "Adaptive equaliser for differentially coherent receiver", IEE PROC. 1990.
11. GOTTFRIED UNGERBOECK, "Fractional Tap-Spacing Equalizer and Consequences for Clock Recovery in Data Modems", IEEE TRANS. COM-24, August 1976.