

## 히스테리시스 현상의 일반화된 정량화 해석

홍 선 기      이 상 훈\*      원 종 수  
 서울대학교 전기공학과

### Generalized Quantitative Analysis of Hysteresis Processes

Sun-Ki Hong    Sang-Hoon Lee\*    Jong-Soo Won  
 Dept. of Electrical Engineering, Seoul National University

#### ABSTRACT

In the classical Preisach model for hard magnets, there break out several problems which are the asymmetry and negative domains of the distribution functions and the contradiction of the congruency.

In this paper, generalized hysteresis model is proposed by applying the molecular field theory to the classical Preisach model. And it is showed that the problems above are solved by the generalized hysteresis model. The experiments are compared with the simulations and we got acceptable results.

#### 1. 서론

모든 자성재료(magnetic material)는 히스테리시스(hysteresis) 특성을 갖고 있으며<sup>[2][4]</sup>, 자기기록 시스템, 가포화 리액터(saturable reactor) 및 히스테리시스 모터 등과 같이 시스템의 동작기구(mechanism)로 히스테리시스가 작용할 경우 필수적으로 히스테리시스 특성은 고려되어야 한다. 또한 전력기기 등에서 히스테리시스 손실 등을 정확히 계산하고자 할 때에도 히스테리시스 특성을 정확히 모델링하여야 할 필요가 있다.

그러나 히스테리시스(Hysteresis) 현상은 그 특성이 비선형이므로 자계에 따른 정량적 해석은 매우 곤란하다. 따라서 히스테리시스 특성을 해석하는 근사적인 방법으로는, 히스테리시스 루프의 타원근사화 또는 직각 쌍곡선 근사화<sup>[10]</sup> 등에 의한 해석법외에도 자화곡선 또는 보자력 및 잔류자속을 이용하는 근사적인 계산<sup>[13][15]</sup>, 또는 미시적 히스테리시스 모델인 스톤너 볼파스 (Stoner-Wohlfarth) <sup>[11]</sup> 모델 등이 있다. 그러나 이러한 해석법에서는 초기 자화곡선이나 마이너 루프를 표현할 수 없거나, 입자간의 상호작용 무시로 계산하지 못하는 부분 또는 계산 정확도 면등<sup>[5]</sup>에 문제가 있다.

이에 대해 프라이자흐(Preisach)모델<sup>[1]</sup>은 히스테리시스

특성을 정량적으로 해석하는 방법을 제시 하고 있고, 또한 에버렛 함수<sup>[8]</sup>를 이용하여 비교적 빠른 계산이 가능하나, 그 적용 범위에 있어서 연질 자성재료(soft magnet)만으로 국한된다고 보여진다.<sup>[3][7]</sup> 그러나 히스테리시스 모터, 자기기록장치등에 사용되는 자성재료 등은 반경질(semi-hard magnet) 또는 경질(hard magnet)재료가 사용되고 있어, 이런 재료에 대하여 고전적 프라이자흐 모델<sup>[9]</sup>을 적용하는 데는 다음과 같은 문제점이 생긴다.

- (1) 일차 전이곡선에서 구해진 분포함수는 격자간격이 세 밀치 않아 디지털 시뮬레이션에 사용되는 분포 함수로는 적절치 못하다. 이렇게 구한 프라이자흐 분포함수는 비대칭 및 음함수의 값을 갖는 영역이 존재하게 되어 응용에 어려운 점이 생긴다.<sup>[14]</sup>
- (2) 이제까지의 논문들은 마이너루프의 합동성을 가정하지만,<sup>[6][7]</sup> 경질 자성재료에서는 이와 같은 현상은 생기지 않으므로, 이에 따라 경질 자성재료에 적용하려면 프라이자흐 분포함수의 수정이 필요하다.
- (3) 전이곡선을 실측하지 않고 분포함수를 수학적 함수로 만들어 이를 시뮬레이션한 경우도 있으나<sup>[15]</sup>, 히스테리시스의 비선형을 단순히 보자력과 잔류자속만에 의한 수학적 함수로 해석한다는 것은 신뢰하기 어렵다.

따라서 이러한 문제점들을 해결하기 위해 본 연구에서는 실측된 전이곡선 데이터를 명확화 스플라인<sup>[16]</sup>하여 측정에서 오는 오차를 최대한 감소시키고, 또한 재료에 작용하는 전체자계(total field)는 외부 인가자계(applied field)와 자화에 비례하는 값과의 합이 된다는 분자장 이론(molecular field theory)<sup>[4][11]</sup>을 적용한다. 그리고, 자화가 전체자계에 의존하는 계산 알고리즘을 제시하여, 이로부터 계산값과 실험값을 비교하여 본 연구의 타당성 및 유용성을 확인한다.

2. 고전적 프라이자흐 모델의 문제점

2.1 합동성(congruency)의 모순

고전적 프라이자흐 모델의 가정은 인가자계에 대하여 자기 쌍극자의 분포가 대칭[1], 또는 에버렛 함수  $E(a, b)$ 의 분포가 그림 1처럼  $y = -x$ 에 대하여 대칭[8]을 가정한다. 이로부터 식(1)이 가정된다.

$$E(a, b) = E(-b, -a) \quad (1)$$

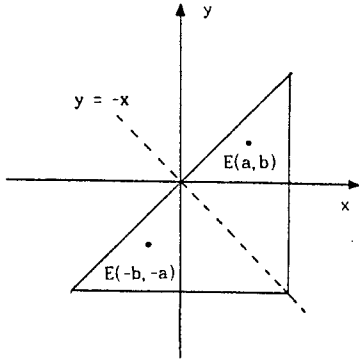
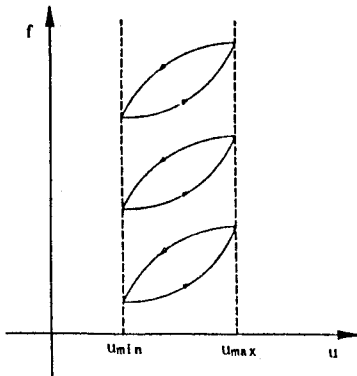


그림 1. 인가자계에 따른 에버렛 함수 분포의 가정.

이로부터 다시 동일한 입력의 극값에 따른 히스테리시스 루프는 합동성(그림 2)을 가정하게 된다.[7] 그러나, 실제로 경질 자성재료에서는 이러한 현상은 나타나지 않고, 입력 극값이 같더라도 이력에 따라 마이너 루프는 다른 형상을 취하게 된다. (그림6)



u : 입력      f : 출력

그림 2. 합동성

2.2 분포함수의 음함수 발생

그림 3은 경질 자성재료의 일차 전이곡선에서 얻어지는 분포함수가 음의 값을 갖을 수 있음을 보인다.

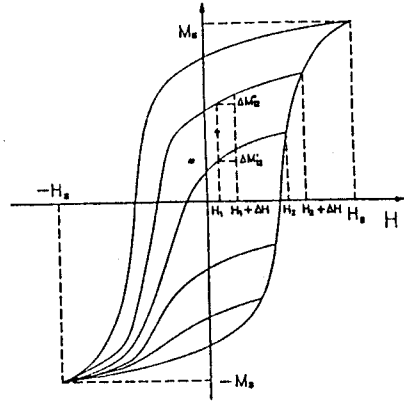


그림 3. 음함수 존재를 설명하는 일차 전이곡선

그림 3으로부터 분포함수  $K(H_1, H_2)$ 는 정의에 따라[7]

$$K(H_1, H_2) = \frac{\Delta M_{12}'' - \Delta M_{12}'}{2(\Delta H)^2} \quad (2)$$

으로 구해지고, 하강곡선군으로부터 아랫쪽에 위치한 곡선 군들이 윗쪽에 위치한 곡선보다 H감소에 대해 M감소가 윗쪽보다 더크게 되는 경우가 생긴다. 이로부터  $K(H_1, H_2) < 0$ 로 되는 경우가 발생한다. 즉, 이러한 재료에 고전적 프라이자흐 모델을 적용한다면, 실제 현상과는 다른, 자계가 증가할 때 오히려 지속은 감소하는 부분도 발생할 것이라는 예측이 가능하고, 직류 히스테리시스 루프보다 마이너 루프가 더 커지는 현상도 나타날 수 있다.(그림 8(a))

3. 일반화된 히스테리시스 모델

3.1 분자장 상수

고전적 프라이자흐 모델은 그 적용대상이 연질 자성 재료로 제한되어[3], 경질 자성재료에까지 일반적으로 적용할 수 없었다. 즉, 경질 자성재료의 해석을 기존 방법을 이용하여 계산할 경우에는 분자장의 작용을 무시하므로 오히려 큰 오차를 보일 수도 있다.(그림 8(a)) 따라서 본 논문에서는 프라이자흐 모델에 분자장 이론을 도입하여 자화를 계산한다.

분자장 상수  $\gamma$ 는 온도에 무관한 물질에 따라 결정되는 상수[4]이다. 다시 말하면,

$$H_m = \gamma M \quad (3)$$

$H_m$  : 분자장(molecular field)

이고, 물질에 작용하는 전체자계  $H_t$ 는

$$H_t = H_a + H_m \quad (4)$$

$H_a$  : 인가 자계

또한 큐리(Curie) 법칙에서,

$$\chi = M / \rho H = C / T \quad (5)$$

$\chi$  : 질량 자화율(mass susceptibility)  $\rho$  : 밀도(density)

$C$  : 큐리 상수  $T$  : 온도 (K)

큐리-바이스(Curie-Weiss) 법칙에서

$$\chi = C / (T - \theta) \quad (6)$$

$\theta$  : 상호작용 상수

즉, 식(4)로부터의 전체자계류 식(5)의 자계  $H$  대신에 대입하여, 이를  $M$ 에 대하여 풀면,

$$M = \frac{\rho C H}{T - \rho C \gamma} \quad (7)$$

식(7)을 다시 식(5)에 대입하여 식(6)과 비교하여 보면,

$$\chi = \frac{M}{\rho H} = \frac{C}{T - \rho C \gamma} = \frac{C}{T - \theta} \quad (8)$$

결국 분자장 상수  $\gamma$ 는

$$\gamma = \frac{\theta}{\rho C} \quad (9)$$

로 되어 물질 고유의 상수가 됨을 알 수 있다. 실제로 프 라이자흐 모델에서 분자장 상수를 완전히 고려하지 않아도 되는 경우는 상자성체(paramagnetics)중에서도  $\theta = 0$ 가 되는 물질(산소  $O_2$ ) 뿐<sup>[4]</sup>이고, 이 경우 분자장 상수  $\gamma$ 는 0이 된다. 그러나 페리마그네틱즘(ferrimagnetism) 중 연질 악자성체는  $\gamma$ 값이 상대적으로 작으므로, 그 영향을 무시한 경우도 만족할 수 있는 결과를 얻을 수 있었다.<sup>[3]</sup> 하지만 경질 자성재료의 경우는 반드시 분자장 상수의 고려가 필요하고, 그렇지 않은 경우는 오히려 프 라이자흐 모델은 마이너루프 등을 해석할 수 있는 장점을 갖고 있음에도 불구하고, 다른 근사적인 방법보다 생각지 않은 큰 오차를 만들 수 있다.(그림 7)

### 3.2 분자장 상수의 도입.

분자장 상수의 도입에 의해 전체 자계에 따른 에버렛 함수는 그림 4로부터 다음과 같이 정의한다.

$$E_t(a_t, b_t) = \frac{1}{2} (f_{at} - f_{abt}) \quad (10)$$

그림 3에서 설명되었듯이 식(2)에서 얻어지는 인가자계에 의한 전이곡선에서는, 분포함수의 값이 음이 될 수 있음을 알 수 있다. 그러나, 전체자계에 대한 전이곡선을 나타내는 그림 4에서는 항상 상부 전이곡선이 하부 전이곡선 보다는 경사가 커서 분포함수가 음이 되는 일이 제거된다. 그림 4의 전체자계에 따른 일차 전이곡선으로부터, 식(10)

을 이용하여 에버렛 함수 테이블을 구하고, 다음 절에서 제시하는 알고리즘에 의한 계산으로부터 히스테리시스 루프를 계산한다.

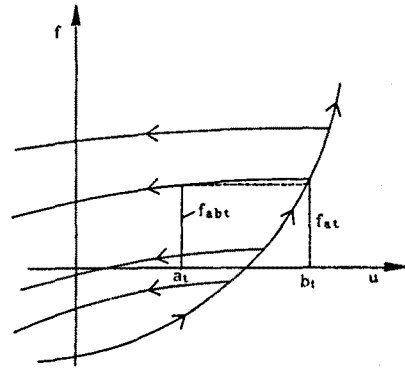


그림 4. 일차 전이 곡선

### 3.3 계산 알고리즘

인가 자계값이 주어지면, 이에 대한 자화값을 얻기 위하여는 전체 자계에 따른 에버렛 함수를 이용하여 자화값을 계산하여야 한다. 그러나, 전체 자계는 식(3) 및 식(4)에 주어지듯이 다시 자화값을 알아야 얻을 수 있다. 결국 인가자계에 따른 자화를 계산하려면 반복법(iteration)을 이용하여야 한다.

자계의 시간에 따른 변화를 계산하기 위해, 시점열을  $t_p$  ( $p = 0, 1, 2, \dots$ )로 표시하고, 시각  $t = t_p$ 에서 자계와 자속 밀도를  $H(p)$  및  $B(p)$ 로 표시한다.

주어진 자계의 시점계열 ( $H(p)$ )에 대한 자속밀도의 시점계열 ( $B(p)$ )를 구하는 알고리즘은 다음과 같다. 여기서, 임의의 시각  $t = t_p$ 에 있어서 미분 투자율을  $\mu_d(p)$ 로 표시한다. 스텝 3의 과정은 본 논문에서 제시한 전체자계에 따른 에버렛 함수에 의해 계산한다.

#### < 계산 알고리즘 >

- \*  $H(p)$ : 시각  $t_p$ 에서의 자계
- $H(p-1), B(p-1), \mu_d(p-1)$ : 초기값
- $H_{tk}$ : 전체 자계
- $\gamma$ : 분자장 상수
- $\mu_0$ : 진공 투자율
- $f$ : 자계에 대응하는 자화 크기
- $c$ : 수렴 반경

STEP 0 :  $k \leftarrow 1, H_k(0) = H(p-1), B_k(0) = B(p-1), \mu_{dk}(0) = \mu_d(p-1)$

STEP 1 :  $B(p) = B_k(k-1) + \mu_{dk}(k-1) \times [H(p) - H_k(k-1)]$

STEP 2 :  $H_{tk} = H(p) + \gamma [B(p) - \mu_0 H(p)]$   
 $= [1 - \mu_0 \gamma] H(p) + \gamma B(p)$

STEP 3 :  $M_k(k) = f(H_{tk}(k))$

STEP 4 :  $H_{tk}(k) = H_k(k)[1 - \mu_0 \gamma] + \gamma B_k(k)$

$M_k(k) = B_k(k) - \mu_0 H_k(k)$

이로부터  $B_k(k), H_k(k)$ 를 구함.

$$\mu_{dk}(k) = \frac{\Delta B_k(k)}{\Delta H_k(k)}$$

STEP 5 :  $|H_k(k) - H(p)| < \epsilon$  GOTO STEP 6

else  $k = k + 1$  GOTO STEP 1

STEP 6 :  $B(p) = B_k(k)$ ,  $\mu_d(p) = \mu_{dk}(k)$

STEP 7 :  $p \leftarrow p+1$ , goto STEP 0

이상의 알고리즘으로부터, 시간  $t_p$ 를 증가시키면서, 이에 따른 인가자계에 대한 자속밀도의 값을 계산한다.

#### 4. 시뮬레이션 및 검토

그림 5는 동조 자이로스코프에 이용되는 히스테리시스 모터 링의 실측한 인가자계에 따른 일차 전이곡선이다. 분자장 상수는 식(8)로 주어지나, 전이곡선 측정 데이터로부터 대략적인 값을 간편하게 얻을 수 있다. 이로부터 얻어진 값을 변화시켜 전체자계에 따른 에버렛 함수가 가장 대칭성을 이루게 되었을 때의 분자장 상수값을 취한다. 이 상태에서도 완전한 대칭이 이루어지지 않는 것은 데이터 측정 오차로 보여지며, 이 상태에서 대칭화시키는 방법을 이용하여 전체자계에 따른 에버렛 함수 테이블을 작성한다.

그림 6은 계산된 메이저 루프 및 동일 입력 극값에 대한 마이너 루프를 보인다. 여기서 알 수 있듯이 고전적 프라이어즈 모델이 갖는 합동성의 모순은 전체 자계에 따른 계산으로 제거될 수 있음을 보인다.

그림 7은 각각 분자장 상수값이 0, 3000, 6000 일 때의 에버렛 함수 분포, 그림 8은 이에 따른 히스테리시스 루프 계산 결과이다. 즉, 그림 7은 분자장이 고려되지 않은 경우(그림 7(a)), 고려는 되었으나 불충분한 경우(그림 7(b)), 대칭성이 가장 가깝게 이루어진 경우(그림 7(c)) 및 대칭화시킨 에버렛 함수(그림 7(d))의 3차원적 표시를 보인다. 즉, 분자장이 고려되지 않은 그림 7(a)는 좌우 비대칭이 심하여 분자장을 고려한 그림 7(d)와 비교하면 상당한 차이를 보이고 있다. 또한, 이에 따른 계산 결과인

그림 8(a)에서 알 수 있듯이 마이너루프가 직류루프보다 커지는 현상도 나타난다. 적절한 분자장 값이 고려되고 대칭화된 그림 7(d) 및 이에 따른 계산 결과인 그림 8(c)와 실측 파형인 그림 9에서 알 수 있듯이 분자장을 고려한 경우 실험과 잘 일치하여 그 타당성이 확인되었다.

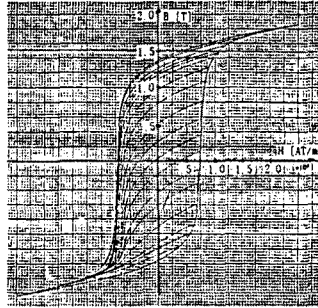
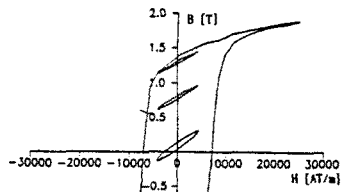
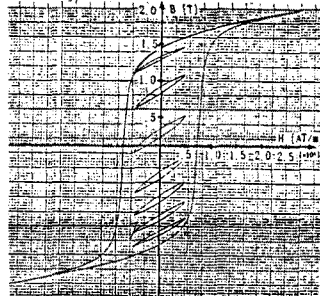


그림 5. 1차 전이곡선 (실측치)



(a) 계산치



(b) 실측치

그림 6. 동일 입력 극값에 대한 마이너 루프

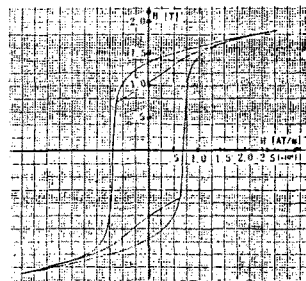


그림 9. 히스테리시스 루프 (측정치)

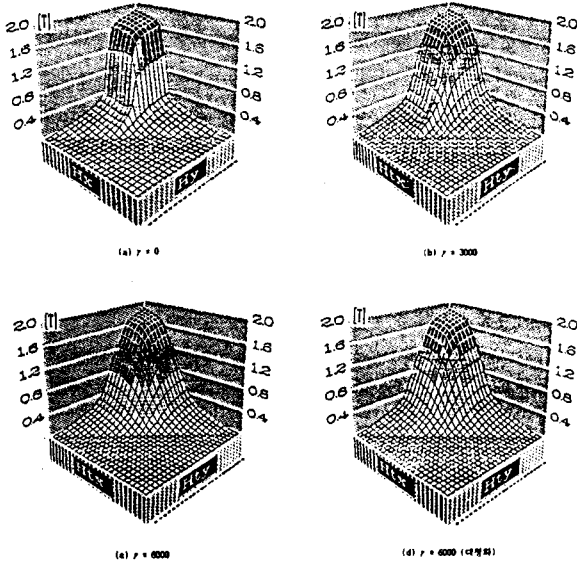


그림 7. 에버렛 함수

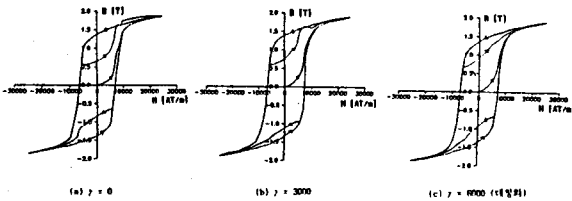


그림 8. 히스테리시스 루프 (계산치)

5. 결론

고전적 프라이어호 모델은 자화가 인가자계에만 의존한다고 가정하여 계산하기 때문에 분자장 역할이 크게 작용하는 경질 재료에 대하여는 합동성의 모순점과 음함수 발생 및 비대칭 분포함수에 따른 비대칭 뿐만 아니라 특이한 루프의 계산결과가 나타났다. 이에 대하여 분자장이 고려된 전체자계에 의존하는 자화를 프라이어호 모델 및 에버렛 함수를 이용하여 계산하는 알고리즘을 제시하였고, 실험 결과로부터 위에 발생한 문제점들이 제거됨을 보였다. 이로부터 히스테리시스를 갖는 전기계의 특성해석은 연질 자성재료 뿐만 아니라 경질 자성 재료에도 그 적용 분야가 확장되어 이용될 수 있다고 볼 수 있다.

6. 참고 문헌

1) F.R. Preisach "Über die Magnetische Nachwirkung," Zeitschrift für Physik, 277(1935)  
 2) Slemon, G. R. and Straughen, A., Electric machines, Addison-Wesley Publishing company, 1980

3) Jung, H., Hong, S. and Won, J., "Finite element analysis of magnetic fields with hysteresis characteristics," Journal of KIEE, Vol. 38 No. 12, pp.1033-1040, December 1989.  
 4) Cullity, B. D., Introduction to magnetic materials, Addison-Wesley Publishing Company, 1972.  
 5) Beardsley, I. A., "Modeling the record process," IEEE Transactions on magnetics Vol. MAG-22 NO.5, pp. 454-459, September 1986.  
 6) Mayergoyz, I. D., "Hysteresis models from the mathematical and control theory of view," Journal of applied physics., Vol.57, No.1, pp.3803-3805, April 1985.  
 7) Mayergoyz, I. D., "Mathematical models of hysteresis," IEEE Transactions on magnetics, Vol.MAG-22, No.5, pp.603-608, September.  
 8) Vecchio, R. M. D., "An efficient procedure for modelling complex hysteresis process in ferromagnetic materials," IEEE Transactions on magnetics, Vol.MAG-16 No.5, pp.809-811, September 1980.  
 9) Doong, T. and Mayergoyz, I. D., "On numerical implementation of hysteresis models," IEEE Transactions on magnetics, Vol.MAG-21, No.5, pp.1853-1855, September 1985.  
 10) 大川 光吉, 永久磁石磁氣 回路の設計・特性計算法, 総合電子リサーチ, 1987  
 11) D. Hadfield, Permanent Magnets and Magnetism, Iliffer Books Ltd., 1962  
 12) 田中, 大坪, "磁氣 記録機について," 日本電気學會誌, 81, 413(昭 36-3)  
 13) Kohshi Okumura and Akira Kishma, "Digital simulation of hysteresis characteristics and its Applications," JIEE Japan Transactions part B, Vol. 103, No.7, pp451-458, July 1983.  
 14) 市田浩三・吉本富士市, スプライン関數とその應用, 教育出版, 1979  
 15) Hool, S. R. and Straughen, A., Electric machines, Addison - Wesley Publishing company, 1980.