

유한요소법에 의한 영구 자석형 동기 전동기의 특성해석

김진부*, 원종수
서울대학교 전기공학과

Analysis of interior-type permanent magnet synchronous motor using finite element method

Kim jin - boo*, Won jong - soo
Department of electrical engineering, Seoul National University

Abstract

In this paper, the characteristics of IPMSM (Interior -type Permanent Magnet Synchronous Motor) are simulated using 2-Dimensional finite element method. This paper deals with the following characteristics: Air gap flux density considering skew, Back E.M.F , Torque and Inductance. Torque is calculated using current angle which is known from the controller. Direct axis inductance and Quadrature axis inductance are also calculated using energy perturbation method. This results can be used for the computation of the saliency of IPMSM. Computed results are found in satisfactory agreement with experimental ones.

1. 서론

고성능 영구자석이 개발됨에 따라 영구자석이 모타에 많이 사용되고 있으며, 그에 따라 영구자석형 고성능 모타의 수요가 급증하고 있다. 영구 자석형 동기 전동기에는 자석을 회전자 표면에 부착한형(surface形)과 자석을 회전자 내부에 삽입한형(interior形)등이 있다. SPMSM(표면부착형)은 자석을 회전자에 접촉제로 고정시키는 것으로 고속 회전시 이탈방지를 위한 특별한 고안이 필요하다. 이에 반해, IPMSM(회전자 매입형)은 구조상 견고하며, 구조상 돌극(saliency)성질을 가지게된다.

따라서, IPMSM의 돌극 성질을 분석하고 중요한 변수들인 여기전력, 토크, 인덕턴스를 계산하는 것이 필요하다. 기존의 논문들은 여기전력, 인덕턴스 계산에 공극자속밀도 [1] 및 입력[8]을 이용한 근사적인 방법을 사용했다. 또, 기존의 토크 계산은 적분로 선택에 기인하는 오차가 크다. [6] 본 논문에서는 여기전력, 인덕턴스계산에 유한요소법을 이용하여 직접 계산한다. 토크계산은 적분로 선택에 무관한 방법을 채택하여 정확성을 높인다.

본논문에서는 위 계산방법에 의해 IPMSM에 있어서 인덕턴스를 계산해서 돌극성질을 분석하고, dq축이론에 의한 전류각에서의 토크를 계산한다.

2. 본론

2.1 지배방정식

장자장문제에서의 지배방정식을 도출하기 위한 맥스웰방정식 및 보조방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \nabla \times H &= J & (2.1) \\ B &= \mu_0 (H + M) & (2.2) \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (2.3)$$

$$M = \chi H \quad (2.4)$$

벡터포텐셜 A와 벡터항동식을 이용하여 윗식을 정리하면, 다음과 같이 된다.

$$\nabla \times (\nu_0 \nabla \times A) = J - \nabla \times M \quad (2.5)$$

가중함수로는 요소의 형상함수를 사용하는 갤러킨법을 사용하여 식(2.5)를 정식화하면, 다음과 같은 선형연립 방정식을 얻을수 있다.

$$[S_{ij}] [A_j] = [F_i] \quad (2.6)$$

$$S_{ij} = \int_S \nu_0 \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy \quad (2.7)$$

$$F_i = \int_S \nu_r \left(M_{rx} \frac{\partial N_i}{\partial y} - M_{ry} \frac{\partial N_i}{\partial x} \right) dx dy + \int_S N_i \cdot J dx dy \quad (2.8)$$

S_{ij} 는 요소계수행렬, A_j 는 각절점에서의 벡터포텐셜, F_i 는 요소구동행렬, N_i 는 요소의 형상함수, ν_0 는 공기의 자기 저항률, ν_r 는 자상체의 비자기 저항률, M_{rx} 및 M_{ry} 는 자석의 X축 및 Y축 자화량이다.

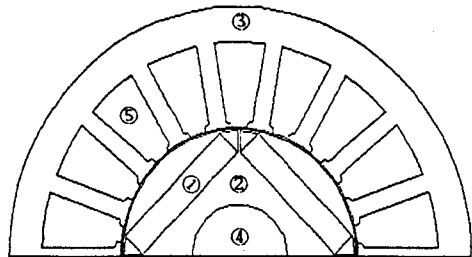
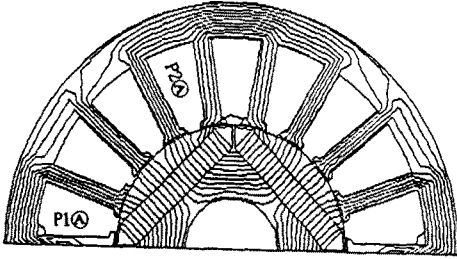


그림 1. 유한요소 해석하기 위한 모타 절반영역

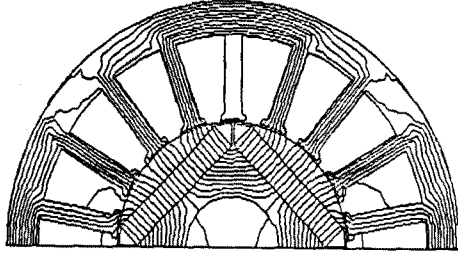
- ①자석 ②회전자 ③고정자 ④회전자의 축 ⑤슬롯
- 3. 공극자속밀도 및 여기전력

(1)공극자속밀도

유한요소법으로 스큐를 고려하여 공극자속밀도를 해석한다. 스큐를 고려하기 위해서는 3차원으로 해석해야 한다. 2차원 유한요소법으로 스큐를 해석하는 경우에는 모타의 축 방향으로 여러개의 부분(Section)으로 잘라서 각부분의 자속밀도를 평균하는 방법으로 계산한다. 여기서는 축방향으로 10개정도 자른다.



자속선들 사이의 벡터포텐셜 차이 [gauss-cm] = 973.24
그림 2. 자석만으로 여자되는 경우의 자속흐름도



자속선들 사이의 벡터포텐셜 차이 [gauss-cm] = 932.95
그림 3. 스코를 해석하기 위한 축의 중간 부분영역

NO-SKEW AIR GAP FLUX DENSITY
RADIAL COMPONENT

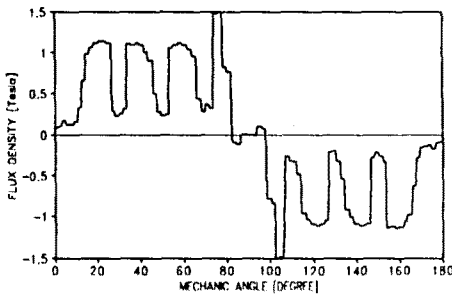


그림 4. 스코를 고려하지 않는 경우 공극 자속밀도
FULL-SKEW AIR GAP FLUX DENSITY
RADIAL COMPONENT

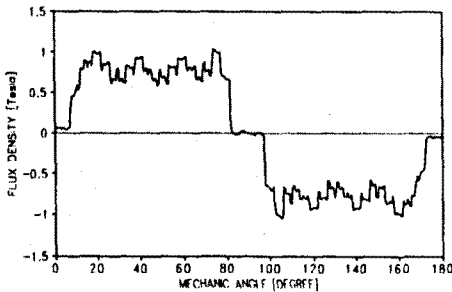


그림 5. 한 슬롯피치만큼 스코를 고려시 공극 자속밀도

(2) 역기전력

역기전력을 공극자속밀도에서 계산하는 방법이 제시되고 있으나[1], 이 방법은 정수권에만 적용될수 있고[3], 일반적인 경우인 분수권에서는 계산이 복잡하다.

2차원 유한요소법의 경우에는 벡터포텐셜을 알고있으므로 자속(flux)을 계산할수 있다. 그러므로 자속에서 역기전력을 계산한다. 유한요소법 해석영역인 임의의 두점 P1(x1, y1), P2(x2, y2)에서의 벡터포텐셜을 A1, A2이라고 할때 자속(flux)은 다음식으로 된다.

$$\Phi = (A_1 - A_2) L \quad (3.1)$$

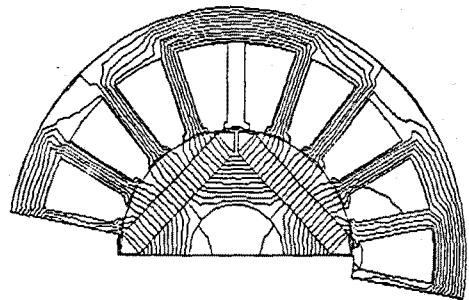
여기서 L은 해석영역 축방향의 길이이다
P1과 P2를 그림2에 표시한것과 같이 모터내의 권선(windings)이 지나는 슬롯내의 임의의 점이라고 하면, 한상당의 최고 자속수(flux linkages)은

$$\Psi = (A_1 - A_2) P Nph \frac{L}{a} \quad (3.2)$$

여기서 L은 모터의 축방향길이, P는 극수, a는 병렬회로수, Nph는 한상당의 총턴수이다.
한상당의 전압은

$$E_p = - \frac{d\Psi}{dt} = -j\omega_e \Psi \quad (3.3)$$

여기서 Ψ 는 최고 자속수, ω_e 는 회전자의 전기각속도이다. 하나의 유한요소해에서는 한상당에 하나의 자속만을 구할수밖에 없으나, 슬롯이 9개 있는 경우와 같은 해석시에는 한슬롯에 해당하는 기계각도(20도) 회전시킨 경우, 즉 슬롯하나당 한번 권선을 회전시켰다고 생각하면 9개의 자속을 구할수 있다. 고정자를 기계각으로 10도 회전시킨 경우를 해석한다면 그것에서 9개의 자속을 더 구할수 있다. 따라서 두개의 유한요소해석에서 총18개의 자속최고수를 구할수 있다.



자속선들 사이의 벡터포텐셜 차이 [gauss-cm] = 932.65
그림 6. 역기전력의 해석 위한 고정자 10도 회전시

BACK E.M.F
REVOLUTION = 1785 [rpm]

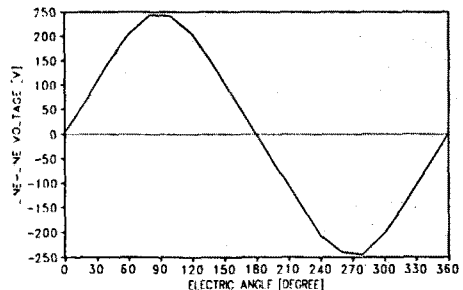


그림 7. 유한요소해에서 구한 역기전력 파형

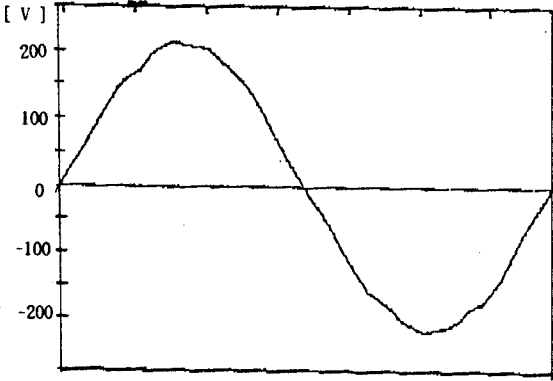


그림 8. 실험에 의해 측정된 역기전력 파형
(최대치 - 최대치 = 424 [V])

4. 토오크의 계산

유한요소법에 의한 토오크계산에는 맥스웰 응력법과 에너지 방법등이 있다. 맥스웰응력법에 의한 계산은 계산의 결과가 실험결과 전혀 일치하지 않는 경우가 생긴다. 그에따른 제약조건으로서 공극에서의 적분하는 경로(path)의 선택에 있어서 공극의 절철을 지나지 말아야 하며, 또한 요소의 경계를 지나지 말아야한다. 또, 공극에서의 적분하는 경로(path)에 따라 토오크의 값이 크게 달라지게 되는 경우도 생긴다.[6]

에너지 방법은 유한요소해석영역을 미소각도 이동시켜 그에 따른 해석영역 각각에서 에너지를 계산해서 이동시킨 각도로 나누어주는 방법이다. 그러나, 에너지 계산이 부정확하게 되면 미소각도로 나누어 지게되므로 오차가 커져 토오크계산이 부정확하게 된다.

본논문에서는 맥스웰응력법을 변형시켜 사용한다. 기본적으로 이 방법은 공극을 지나는 경로를 달리해서 그에 따른 토오크를 계산해서 그 값을 전체적으로 평균하는 방법이다. 맥스웰응력법에서 토오크는 다음식과 같이 폐곡면에 대한 표면적분으로 계산된다.

$$\vec{T} = \frac{1}{\mu_0} \iint_S [(\vec{r} \times \vec{B})(\vec{B} \cdot \vec{n}) - \frac{1}{2} B^2(\vec{r} \times \vec{n})] dS \quad (4.1)$$

r 은 회전자의 중심에서 적분 경로위의 임의의 지점까지의 반지름방향벡터이고, dS는 표면의 수직 벡터이다. 2차원의 유한요소법의 경우에는 표면적분에서 다음과 같은 선적분으로 된다.

$$T = \frac{1}{\mu_0} \oint_{\Gamma} r \text{ Bt Bn } d\Gamma \cdot L \quad (4.2)$$

Bt과 Bn은 적분방향에서의 자속밀도의 접선성분과 수직성분이고, L은 모타의 축방향 길이이다. 여기서 공극 g를 K개의 동일한 간격으로 나누면, 각 구간 사이의 간격 Δg는 다음과 같다.

$$\Delta g = \frac{g}{K} \quad (4.3)$$

각적분의 경로가 K개로 나누어진 간격의 중앙부에 놓여진다면, 평균토오크는

$$T_{av} = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K \left[\frac{L}{\mu_0} \oint_{\Gamma} r \text{ Bt Bn } d\Gamma \right]_j \quad (4.4)$$

식(4.4)의 우변에 Δg를 곱하고 나누면,

$$T_{av} = \frac{1}{K \Delta g} \sum_{j=1}^K \left[\frac{L}{\mu_0} \oint_{\Gamma} r \text{ Bt Bn } d\Gamma \right]_j \Delta g \quad (4.5)$$

결국 다음식과 같다.

$$T_{av} = \frac{1}{g} \sum_{j=1}^K \left[\frac{L}{\mu_0} \oint_{\Gamma} r \text{ Bt Bn } d\Gamma \right]_j \Delta g \quad (4.6)$$

여기서 K를 무한대로 접근시키면, 평균 토오크는 정확한 토오크값이 된다.

$$T = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{g} \sum_{j=1}^K \left[\frac{L}{\mu_0} \oint_{\Gamma} r \text{ Bt Bn } d\Gamma \right]_j \Delta g = \frac{L}{\mu_0 g} \int_{\Gamma} r \text{ Bt Bn } d\Gamma \quad (4.7)$$

적분경로가 원(circle)인 회전기에서는,

$$T = \frac{L}{\mu_0 g} \iint_S r \text{ Bt Bn } dS \quad (4.8)$$

이식은 공극에서의 면적적분이 되며, 적분경로의 위치에 무관하다. 윗 식에서 알수 있듯이, 자속밀도의 접선성분과 수직성분의 곱이 토오크 발생에 큰 역할을 하고 있음을 알수 있다.

여기서는 전류각도(γ)에 따른 토오크를 계산하므로 각상의 전류는 다음과 같이준다.

$$I_a = \sqrt{2} I_L \cos(\omega_e t + \gamma) \quad (4.9)$$

$$I_b = \sqrt{2} I_L \cos(\omega_e t - 120^\circ + \gamma) \quad (4.10)$$

$$I_c = \sqrt{2} I_L \cos(\omega_e t + 120^\circ + \gamma) \quad (4.11)$$

여기서, I_L는 선간전류의 실효치이고, ω_et는 q축과 모타 권선의 a상의 기자력이 만드는 전기각으로서, 여기에서의 해석영역의 경우는 -60도이다. γ는 고정자 권선의 공간 기자력 기본파가 회전자의 q축을 앞서는 각도로 다음의 페이지서도에 나타나 있다. γ가 주어지고 그에 따라 토오크를 계산한다.

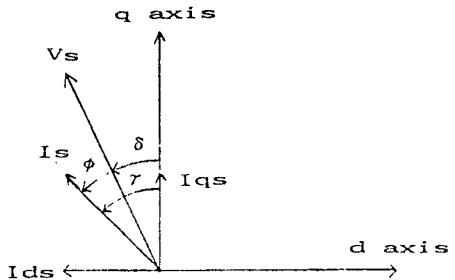
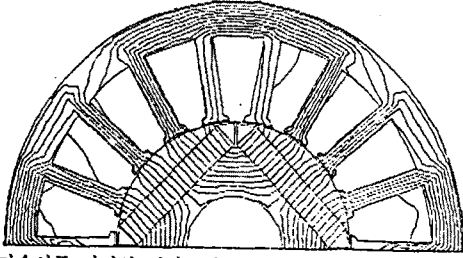
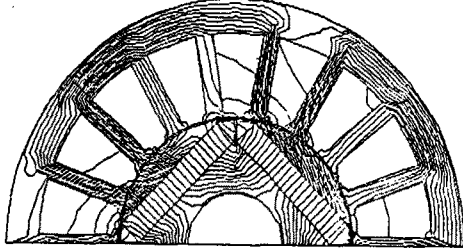


그림 9. 동기 전동기의 페이지서도



자속선들 사이의 벡터포텐셜 차이 [gauss-cm] = 1122.46
 그림 10. $\gamma = -90^\circ$ 인 경우 자속흐름도 (+1d의 전류만 존재시)
 (발생토크 = 0.1817 [kg-cm])



자속선들 사이의 벡터포텐셜 차이 [gauss-cm] = 691.09
 그림 11. $\gamma = 44^\circ$ 인 경우(정격시) 자속흐름도
 (발생토크 = 24.39 [kg-cm])

5. 인덕턴스의 계산

인덕턴스의 계산에는 자속 최고법과 에너지 중첩법이 있다. 자속 최고법은 계산이 간단한 면이 있으나, 복잡한 형상을 가지는 권선에는 적용하기 힘들다. 본 논문에서는 에너지 중첩법으로 인덕턴스를 계산한다. 계산하기 위한 흐름도는 다음과 같다. 자석의 자화전류들 J_m , 전기자 전류들 I_a, I_b, I_c 라하면

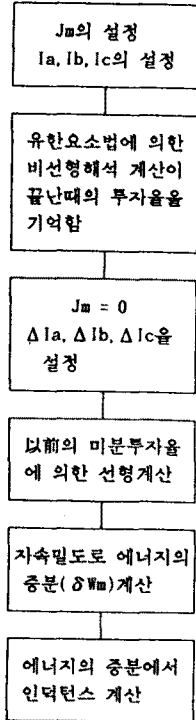


그림 13. 인덕턴스 계산 위한 흐름도

에너지의 중분 ΔW_m 을 안다면, 인덕턴스 L_a 는 다음식과 같다.

$$L_a = \frac{2\Delta W_m}{(2I_0 + \Delta i)\Delta i} \quad (5.1)$$

또, 미소 에너지의 중분 δW_m 을 안다면, 인덕턴스 L_a 는 다음식과 같다.

$$L_a = \frac{\Delta \lambda \Delta i}{(\Delta i)^2} = \frac{2\delta W_m}{(\Delta i)^2} \quad (5.2)$$

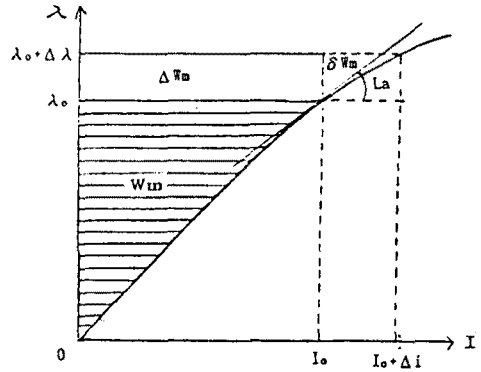


그림 14. 인덕턴스 계산 위한 $\lambda - I$ 특성도

에너지의 중분 ΔW_m 이나, 미소 에너지의 중분 δW_m 의 경우에 있어서 에너지의 계산에는 B-H곡선을 근사화하는 정도에 따라 오차가 달라진다. 미소 에너지의 중분 δW_m 으로 인덕턴스를 계산하는 것이 각각의 두번의 여자($I_0 + \Delta i$ 와 I_0)로 에너지의 중분 ΔW_m 을 계산하는 것보다 오차를 줄일 수 있다.

동기기에서 주된 인덕턴스는 d축 및 q축의 인덕턴스이므로, d축 및 q축에 대해서 고려하기위한 각각의 전류는 다음과 같다

$$I_d = \frac{2}{3} (\sin(WeT) * I_a + \sin(WeT - 120^\circ) * I_b + \sin(WeT + 120^\circ) * I_c) = \frac{2}{\sqrt{3}} I_L \sin(\gamma) \quad (5.3)$$

$$I_q = \frac{2}{3} (\cos(WeT) * I_a + \cos(WeT - 120^\circ) * I_b + \cos(WeT + 120^\circ) * I_c) = \frac{2}{\sqrt{3}} I_L \cos(\gamma) \quad (5.4)$$

또 d축 및 q축의 전류를 알고 있다면 각상의 전류 I_a, I_b, I_c 는 다음과 같다.

$$I_a = \cos(WeT) * I_q + \sin(WeT) * I_d \quad (5.5)$$

$$I_b = \cos(WeT - 120^\circ) * I_q + \sin(WeT - 120^\circ) * I_d \quad (5.6)$$

$$I_c = \cos(WeT + 120^\circ) * I_q + \sin(WeT + 120^\circ) * I_d \quad (5.7)$$

윗식에 따라 $\Delta I_d, \Delta I_q$ 가 주어지고 $\Delta I_a, \Delta I_b, \Delta I_c$ 를 계산해서 자석만의 여자시와 정격운전시의 인덕턴스를 계산한다. 영구자석형 동기전동기에서 가정한 q축은 자석과 자석 사이의 연결부분으로서 이 q축의 자기저항이 d축으로 가정한 자석중심축의 자기저항보다 작으므로 인덕턴스는 q축이 더크게 된다. 그러나, 전통적인 들극에서는 d축인덕턴스가 q축인덕턴스보다 더 크다. 실험에 의해서 d축과 q축의 인덕턴스를 계산하기 위한 방정식은 앞의 페이지도에서 다음과 같이 구할 수 있다.

$$V_q = R_s I_q + X_d I_d + E_o \quad (5.8)$$

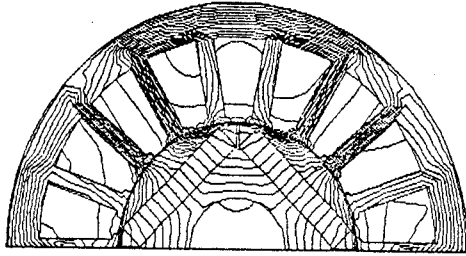
$$V_d = R_s I_d - X_q I_q \quad (5.9)$$

여기서 R_s 는 고정자 권선의 한상당저항, E_o 는 주어진 회전 속도에서의 역기전력, V_d 와 V_q 는 각각 d 축과 q 축의 상전압으로 다음식과 같다.

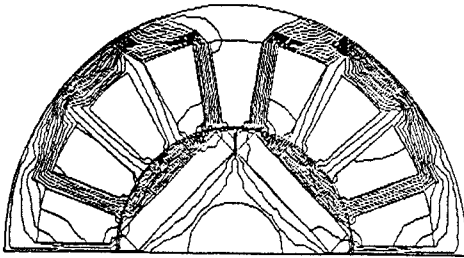
$$V_q = \sqrt{2} V_s \cos(\delta) \quad (5.10)$$

$$V_d = -\sqrt{2} V_s \sin(\delta) \quad (5.11)$$

V_s 는 상전압의 실효치이고, δ 는 토크 각도이다.



자속선들 사이의 벡터포텐셜 차이 [gauss-cm] = 7.12
그림 15. 자석만 여자에 의한 ΔI_d 시 자속흐름도
($L_d = 74.178$ mH)



자속선들 사이의 벡터포텐셜 차이 [gauss-cm] = 9.36
그림 16. 자석만 여자에 의한 ΔI_q 시 자속흐름도
($L_q = 221.98$ mH)

6. 실험 및 결과

d 축과 q 축의 인덕턴스를 알기 위해서는 토크 각도(δ)를 알아야 한다. 토크 각도를 측정하는 방법으로는 모터의 축에 기준을 설치하고 스트로보스코프를 사용해서 무부하시와의 부하시의 차이를 측정하는 방법이 있다^[1]. 또, 모터의 축에 자기저항의 변동을 검출하는 센서를 달아서 이에 나오는 신호를 오실로스코프로 고정자 전압파형과 전류파형을 비교해서 토크 각도와 전류각도를 측정하는 방법이 있다^[8].

스트로보스코프를 이용하는 방법은 스트로보스코프와 모터의 동기성이 유지되지 않으면 측정하기 힘들다. 센서를 이용하는 방법은 별도의 센서와 실험장치가 필요하다. 본논문에서는 제어기에서 사용하는 위치 검출기(resolver)에서의 신호와 제어기의 알고리즘에서의 사용하는 상전류의 차이각도를 오실로스코프로 측정하였다.

자석만의 여자시

실험치	$L_d = 80.80$ mH	$L_q = 225.0$ mH
계산치	$L_d = 74.178$ mH	$L_q = 212.77$ mH
토크		
정격시	$= 22.9$ [Kg-cm]	
계산치	$= 24.39$ [Kg-cm]	

표 1. 실험에 사용한 모터의 사양

정격회전속도: 2500 [RPM]	정격 입력: 600 [W]
정격 토크: 2.25 [N-M]	최대 토크: 7.51[N-M]
인덕턴스(선간): 187 [mH]	정격전압(선간): 230 [V]
역기전력상수: 84.5 [V/krpm]	정격 전류: 1.7 [A]

7. 결론

모터의 중요한 변수들인 역기전력, 토크 및 인덕턴스를 유한요소계산에 의해서 구했다. 토크는 변형된 맥스웰 응력법을 이용했으며, 인덕턴스는 에너지 중첩법을 써서 계산했다. 이것들을 실험으로 측정된 것들과 비교해서 만족할 만한 결과를 얻었다. 이러한 결과들은 영구자석전동기 이외의 전동기의 돌극성질을 분석 또는 돌극 계수를 계산하는 데 이용할 수 있다. 앞으로의 과제는 유한요소계산에 의해서 모터의 와전류손과 히스테리시스손실을 계산하는 것이다.

8. 참고문헌

- [1] F.A. Fouad T.W. Nehl N.A. Demerdash "Magnetic field modelling of permanent magnet type electronically operated synchronous machines using finite elements" IEEE Trans. on PAS Vol PAS-100 no 9 SEPTEMBER 1981 pp. 4125-4135
- [2] S.F. Gorman C.Chen J.J. Cathey "Determination of permanent magnet synchronous motor parameters for use in Brushless direct current motor drive analysis " IEEE Trans. on EC Vol EC-3 no 3 SEPTEMBER 1988 pp.674-681
- [3] Thomas, M. Jahns "Torque production in permanent magnet synchronous motor drive with rectangular current excitation" IEEE Trans. on IA Vol IA-20 no 4 JULY/AUGUST 1984 pp. 803-813
- [4] Francis Piriou, Adel Razek "A model for coupled magnetic-electric circuits in electric machines with skewed slots" IEEE Trans. on MAG Vol MAG-26 no2 MARCH 1990 pp. 1096-1100
- [5] M.Ito N.Fujimoto "Analytical model for magnetic field analysis of induction motor performance" IEEE trans. on PAS Vol PAS-100 no11 NOVEMBER 1981 pp. 4582-4590
- [6] J.Mizia K.Adamiak "Finite element force calculation: comparison of methods for electric machines" IEEE trans.on MAG Vol MAG-24 no1 JANUARY 1988 pp. 447-450
- [7] 澤孝一郎 宮地邦夫 "運轉時の直流機電機子回路インダクタンスの解析" 電気學會 回轉機-静止機合同研究資料 RM-88-24
- [8] Rich Schifel "Design consideration for salient pole permanent magnet synchronous motors in variable speed drive applications" Ph.D Thesis at the University of Wisconsin - Madison 1987