

NURB 곡면을 이용한 일반 3차원 전계최적화

이 병 윤 김 용 식 박 종 근
서울대학교 전기공학과

Field Optimization Using NURB Surface in 3-Dimensional Space

Byeong-Yoon Lee Eung-Sik Kim Jong-Keun Park
Dept. of Electrical Eng. Seoul National University

Abstract

When analyzing field or optimizing the shape of electrode in three dimensional space by using the surface charge method, we need to divide finely the surface of electrode into surface element like triangle or rectangle. In this case, there exist many variables in field analysis or field optimization. In particular, smoothness on the surface of optimized shape is not good.

Recently, A paper is published where introducing NURB curve to field analysis and field optimization about two dimensional space model and axial symmetric three dimensional space model results in reduced variables, enhanced accuracy and improved smoothness. NURB curve has some useful properties like continuity, controllability and locality.

Therefore in this paper, in order to improve the demerits of the established optimization method for three dimensional space models, the NURB surface that has same properties in common with NURB curve is used to analyze and optimize simple model.

1. 서론

표면전하법을 이용하여 일반 3차원장의 전계해석이나 전계최적화를 할 경우 전극이나 전연물의 표면을 해석에 편리한 삼각형 혹은 사각형의 곡면요소로 잘게 분할할 필요가 있다. 이 경우 전계해석이나 최적화시에 변수의 개수가 많아지고 특히 최적화의 경우는 표면의 매끈한 정도가 떨어진다.

그런데 최근 표면전하법을 이용한 2차원장 및 축대칭 3차원장의 전계최적화에 연속성, 높은 제어성, 국부성 등의 성질을 갖는 NURB(NonUniform Rational B-spline) 곡선을 도입하여 해석변수의 감소, 향상된 정밀도, 매끈한 정도의 개선 등 좋은 결과를 얻은 논문이 발표되었다. 이에따라 기존의 3차원장 해석방법이 안고있는 문제점들의 해결을 위해 본 논문에서는 NURB 곡선과 동일한 성질을 갖는 NURB 곡면을 도입하여 간단한 전극모델의 일반 3차원장 전계해석 및 최적화를 시도하였다.

2. 표면전하법의 원리

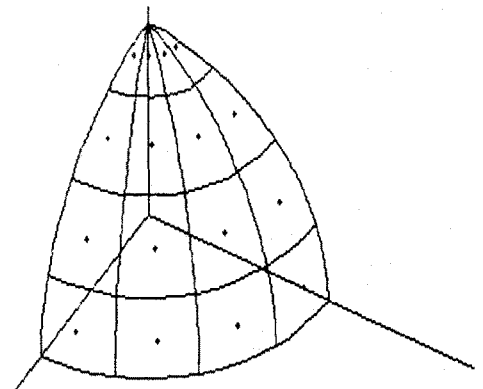


그림 1. 표면 전하법을 위한 전극의 분할

표면전하법은 그림 1에서 보듯이 전극표면을 면전하로 모의하여 임의의 점 P에서의 전위 및 전계를 구한다. 이는 식(1)과 같이 나타낸다:

$$\Phi_1 = \sum_{j=1}^n \int \frac{\sigma_j}{L_{1j}} dS_j = \sum_{j=1}^n A_{1j} \sigma_j \quad (1)$$

식(1)의 A_{1j} 는 수치적분으로 구하게되며 σ_j 는 면전하 밀도, dS_j 는 면적소, L_{1j} 는 dS_j 와 점 P_1 와의 거리가 된다. 일단 표면전하를 띤 형상과 이것들의 위치가 정해지면 임의의 점 P_i 에서의 Φ_i 와 σ_j 는 정량적인 관계를 갖는다. 이때 모의 전하는 전극의 경계와 동일한 위치에 놓이게 되므로 윤곽점과 모의 전하가 일치할 경우 L_{1j} 가 영으로 수렴하여 특이적분을 행하게 된다. 임의의 계가 m 개의 윤곽점과 n 개의 면전하로 모의되면 식(2)와 같은 $m \times n$ 선형 연립방정식이 된다.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_m \end{bmatrix} \quad (2)$$

이를 풀어 $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ 의 값을 결정하고 이 면전하 밀도를 가지고 원하는 부분의 전위를 식(1)을 사용하여 구한다. 전계는 전위 계수를 미분해서 구하며 전극 표면상의 전위를 구할 때는 식(3)을 이용한다.

$$E = \sigma / \epsilon_0 \cdot a_n \quad (3)$$

a_n : 수직 방향의 단위 벡터

3. NURB (NonUniform Rational B-spline) 곡면

곡면은 크게 주어진 절점을 지나는 보간곡면과 주어진 절점을 근사하는 근사곡면으로 구분할 수 있다. NURB 곡면은 근사곡면에 속하며 식(4)와 같이 표현된다.

$$S(u,v) = \frac{\sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n W_{ij} P_{ij} N_{i,k}(u) N_{j,l}(v)}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n W_{ij} N_{i,k}(u) N_{j,l}(v)} \quad (4)$$

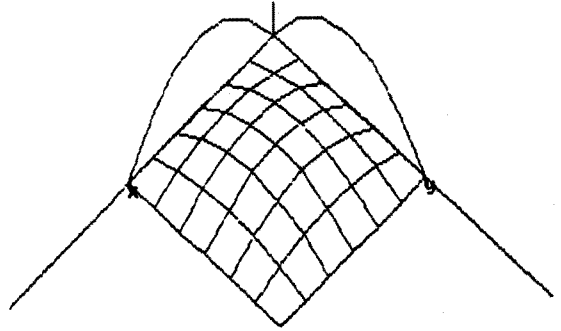


그림 2. Blending function과 Basic surface

여기서 W_{ij} 는 weighting 변수이고, P_{ij} 는 주어진 절점, 그리고 $N_{i,k}(u)$ 와 $N_{j,l}(v)$ 는 Blending function 다. Blending function $N_{i,k}(u)$ 와 $N_{j,l}(v)$ 는 정수 k 와 l 에 의해 각각 차수가 결정되는 u 와 v 의 다항함수로서 NURB 곡면의 연속성을 보장하게 된다. u 와 v 방향의 Blending function의 곱으로 표시되는 $N_{i,k}(u)N_{j,l}(v)$ 는 주어진 영역에서 지배적인 값을 가지는 Basic surface가 되며 이들의 중첩으로 NURB 곡면은 형성된다. 각 Basic surface는 주어진 절점들중 몇개와 밀접한 관계를 맺는다. 그림 2는 Blending function과 Basic surface의 한 예를 보여주고 있다. P_{ij} 는 조종점이라고 불리며 그림 3.에서 보듯이 이들을 서로 연결시켜 characteristic polyhedron을 구성하게 된다. 형성된 NURB 곡면은 바로 이곡면을 근사하게 되는 것이다.

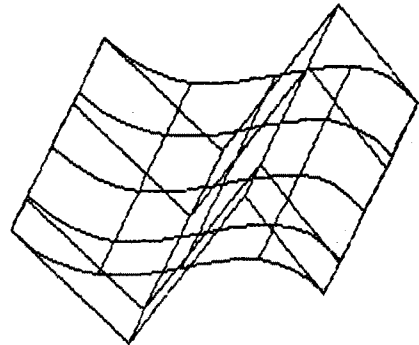


그림 3. characteristic polyhedron과 이를 근사한 NURB 곡면

NURB 곡면에 변화를 가할수 있는 요소로는 조종점과 weighting이 있다. 조종점의 이동은 characteristic polyhedron의 모양을 변화시키며 따라서 이를 근사하는 NURB 곡면도 달라지게 된다. 그런데 조종점의 이동은 그와 관련된 Basic surface에만 영향을 미치므로 NURB 곡면은 극부적으로 변하게 된다. [그림4.a 참조] Weighting의 증감은 고정된 characteristic polyhedron에 대해 NURB 곡면 자체만을 미세하게 변화시킬수 있는 요소이다. [그림4.b 참조] 본 논문에서는 이들 변화요소를 최적화 변수로 이용하게 된다.

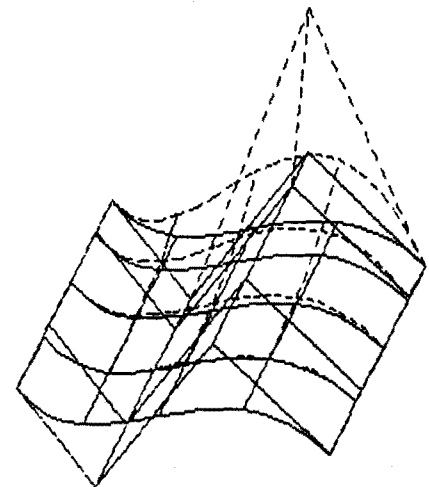


그림 4.a 조종점의 변화에 따른 NURB 곡면의 변화

절연 기기의 형상을 표현하는 함수들은 아래와 같은 제약 조건들을 갖게 되는데 NURB 곡면은 이들을 만족시킬수 있다.

- ① 형상의 결정 변수의 수가 작아야 한다.
 - ② 형상의 진동이 없어야 한다.
 - ③ 곡률이 연속이어야 한다.
- ①은 전개최적화의 계산을 간단하게 함과 동시에 잘못된 곡값에 빠질 위험을 상대적으로 줄이는 조건이다. ②와 ③은 균일한 전개분포를 얻기위한 조건이다.

4. 전개 최적화

4.1 최적화 기법

최적화 기법으로는 물리적 의미를 배제하고 문제를 수학적으로 접근하여 범용성에서 가장 뛰어난 것으로 알려진 變井의 것을 사용했다. 이 것은 목적함수를 전개오차의 함으로 하여 이를 최소화하는 해를 구하는 것이다. 이 알고리즘은 일반 3차원장은 물론 전극이나 절연물의 최적화에 구분없이 적용이 가능하다. 계의 시스템 방정식이 주어진 경우 수학적으로 두가지 방법으로 최적화가 가능한데 이를 전극 모델의 예를 들어 살펴보자. 전극 모델의 경우 계의 시스템방정식은 식(5)와 같다.

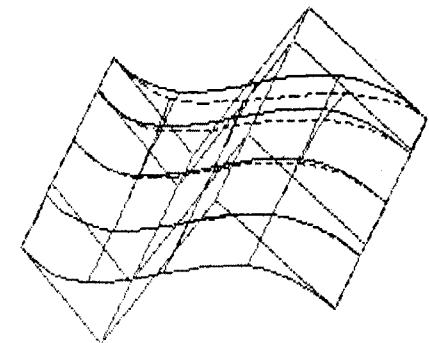


그림 4.b weighting의 변화에 따른 NURB 곡면의 변화

$$[A(X)][\sigma] = [\Phi] \quad (5)$$

A : 전위계수 행렬
 X : 형상을 결정하는 기하학적 변수
 σ : 전하밀도
 Φ : 인가 전압

첫째는 식(5)를 식(6), (7)과 같이 X가 미지변수인 연립 방정식으로 보고 해를 직접 구하는 방법이다. 즉 설계 기준 전계 [σ_r]과 경계 조건[Φ]가 결정된 상황에서 식(6)과 (7)을 만족시키는 행렬 A에 포함된 형상 변수 X를 구하는 것이다. 이를 위해 Gauss법이 사용되었다.

$$[F_1] = [A(X)][\sigma] - [\Phi] = 0 \quad (6)$$

$$[F_2] = [\sigma_r] - ([A(X)]^{-1}[\Phi]) = 0 \quad (7)$$

F₁, F₂ : 비선형 연립 방정식
 σ_r : 전하 밀도 벡터로 전계 벡터와 비례
 Φ : 인가 전압 벡터

둘째는 식(6)과 (7)에서 식(8), (9)와 같은 목적함수를 구성하고 이의 최소값을 여러가지 최적화 기법으로 찾는 방법이다. 최적화 기법은 크게 直接法과 傾斜法으로 분류되는데, 본 논문에서는 直接法과 傾斜法을 모두 사용하였다.

$$\|F_1\| = [|A| |\sigma_r| - |\Phi|]^T [|A| |\sigma_r| - |\Phi|] = [F_1]^T [F_1] \quad (8)$$

$$\|F_2\| = [|\sigma_r| - |A|^{-1} |\Phi|]^T [|\sigma_r| - |A|^{-1} |\Phi|] = [F_2]^T [F_2] \quad (9)$$

4.2 최적화 알고리즘

우선 최적화 알고리즘에 사용되는 Gauss법을 살펴보자. 다음은 계의 시스템 방정식이 식(8), (9)와 같이 비선형 연립방정식으로 구성 되었을 경우 간단한 Gauss법의 알고리즘이다.

$$\textcircled{1} \Delta X = -[J^T J]^{-1} J^T [F_0]$$

$$J = \begin{bmatrix} F \\ \partial X \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{2} J_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial X_j} = A_{i1}\sigma_1 + A_{i2}\sigma_2 + \dots + A_{in}\sigma_n = \frac{1}{\partial X_j} \sum_{k=1}^n (A_{jk}(X_j + \Delta X_j) - A_{jk} X_j) \sigma_k$$

$$\textcircled{3} X_{new} = X_{old} + \lambda \Delta X$$

[F₀]는 초기 형상에서 계산되며 새로운 X_{new}는 ΔX의 방향으로 식 ③의 선상탐색을 행하게 된다. Jacobian행렬 J는 식 ②와 같이 수치미분으로 구하며 ΔX_j는 (10⁻¹² ≤ ΔX_j ≤ 10⁻⁴)의 범위에서 사용되었다.

전체적인 최적화 알고리즘은 다음과 같다. 먼저 주어진 모델을 최적화 하기 위한 목적함수를 유도하고 모델의 전계를 해석하여 초기 형상 및 원시기준전계를 설정한다. 초기형상을 NURB 곡면으로 변환하고 Gauss법에 의해 방향을 찾는다. 그리고 선상탐색 등의 최적화 루틴을 거쳐 형상을 최적화 시킨다. 최적화된 형상의 전계를 평가하여 원하는 전계분포를 얻지 못했으면 변수를 증가시킨 다음 다시 최적화를 시도하고 그렇지 않으면 최적화를 마치고 최종형상을 얻는다.

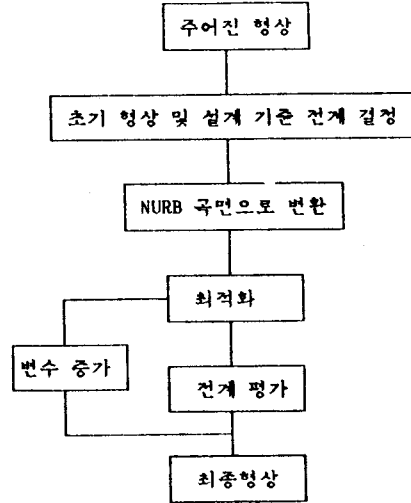


그림 5. 최적화 흐름도

4.3 전계오차와 균일성의 정의

최적화된 전극이나 절연물의 전계오차를 평가하기위해 전계오차와 균일성을 다음과 같이 정의하였다.

$$\text{전계오차} = \left| \frac{E_{\max \text{ or } \min} - E_{\text{ref}}}{E_{\text{ref}}} \right| \times 100 [\%] \quad (10)$$

E_{max or min} : 최적화 영역에서의 최대 혹은 최소 전계
 E_{ref} : 설계 기준 전계

$$\text{균일성} = \frac{E_{\max}}{E_{\min}} \times 100 [\%] \quad (11)$$

E_{max} : 최적화 영역에서의 최대 전계
 E_{min} : 최적화 영역에서의 최소 전계

5. 모델에

모델은 그림6과 같은 구로 택했다. 물론 이것은 해석적인 해를 가지고 있으므로 굳이 일반3차원장으로 취급할 필요는 없으나 자명한 해가 존재하기 때문에 NURB곡면을 도입한 최적화 알고리즘의 검증용 하기 위해 선정되었다. 이 자명한 해가 최적화 시도시 최적해로서 취급

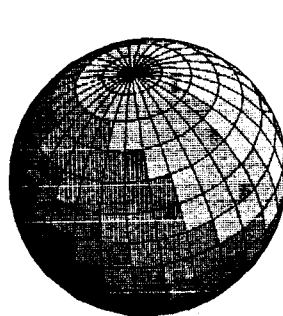


그림 6. 구모델

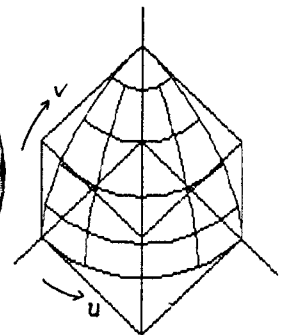


그림 7. 모델의 분할

된다.

이 모델은 두 미개변수 u, v 에 의해 그림7과 같이 NURB 곡면으로 표현되며 해석하기 위해서 표면을 분할했다. 그림 8은 초기 형상과 최적화된 형상을 보여주고 있으며 그림9 a, b는 초기 형상과 최적 형상의 전계를 각각 나타내고 있다. 목적함수에 따른 최적 형상의 전계오차, 균일성 등을 표 1에 나타내었다.

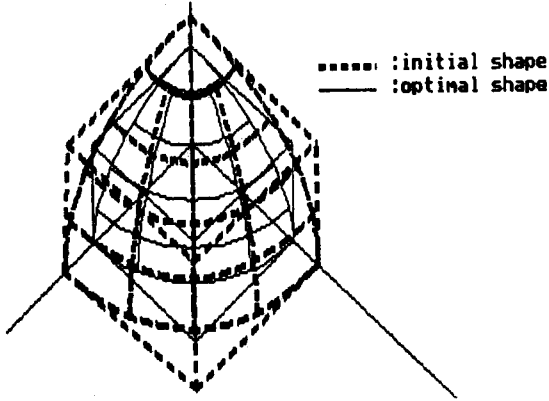


그림 8. 초기형상과 최적형상

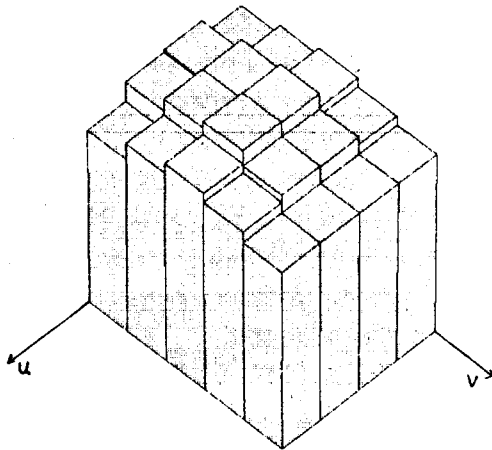


그림 9.a 초기전계

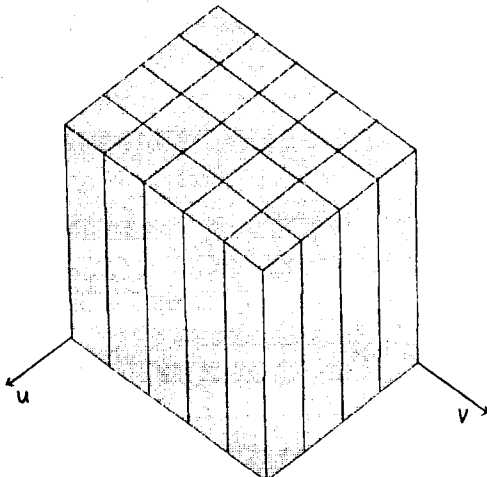


그림 9.b 최적전계

목적함수	$\ F_1 \ $	$\ F_2 \ $
변수갯수	16	16
검사점수	34	17
반복횟수	5 회	4 회
수렴시간	52 시간	22 시간
전계오차	0.087 %	0.013 %
균일성	1.0023 %	1.0001 %

표 1. 계산 결과 (System : PC 386)

6. 결론

본 논문에서는 곡면의 연속성, 높은 제어성, 극부성 등의 성질을 갖고 있는 NURB 곡면을 도입하여 간단한 전극모 델에 대해 일반 3차원장 전계 최적화를 시도하였다.

그 결과 최적화 변수의 감소 효과, 전극 표면의 매끈한 정도의 개선 등의 효과를 얻을 수 있다는 가능성을 얻었다. 그러나 일반적으로 수치적분에 상당히 많은 시간이 필요하므로 수렴속도가 느렸다.

앞으로 이 알고리즘을 바탕으로 수렴 속도의 개선과 다양한 모델을 통한 NURB 곡면의 도입 효과를 얻어내야 할 과제를 안고 있다.

7. 참고 문헌

[1] 김응식, "NURB 곡선을 이용한 전계최적화"
 [2] 河野, 宅間, "數値電界計算法", 그로나사, 1980, pp. 77-81.
 [3] 坪井, 외 "Newton法에 의한 電極形象 및 絶緣物形象의 最適化" ibid. Vol. 106, No. 7, 1986, pp. 9-16.
 [4] 김응식, 박종근, "B-spline 곡선을 이용한 지정된 전계조건하의전극형상설계", 전기학회논문지, Vol. 39, No. 9, 1990, pp. 964-975.
 [5] 김응식, 이병훈, 박종근, "NURB 곡선을 이용한 절연물형상최적화", 춘계 방전 및 고전압, 전기재료 연구회 합동학술 연구발표, 1991, pp. 141-144.
 [6] 민석원, "전하중첩법을 이용한 최적전극형상 설계", 서울대 대학원 전기공학과 석사학위논문, 1984.
 [7] 김광수, "표면전하법을 이용한 일반3차원 전계해석", ibid. 1985.
 [8] 조연욱, 최병주, 김광수, "전계최적화에 의한 전극 및 전연물 형상 설계", 하계종합학술대회, 1989, pp. 442-447
 [9] M.E.MORTENSON, "Geometric modeling", John Wiley & Sons. pp. 151-239
 [10] L.Piegl, "Modifying the shape of rational B-splines. PartII:surfaces", ibid. Vol. 21, No. 9, 1989, pp. 538-546
 [11] W.H.press, et al., "Numerical recipes in C", Cambridge Univ. Press, pp.290-324.
 [12] H.W.Sorenson, "Parameter estimation", Marcel Dekker, Inc. pp. 61-66.