二次元表層放流密度噴流의 k-ε 모델에 의한 數値解析

An Numerical Analysis of 2-Dimensional Surface Buoyant Jets by k-ε Turbulence Model

崔 漢 起* 許 再 寧** 姜 周 復***

Choi, Han-Ki* , Huh, Jae-Yeong**, and Kang, Ju-Bok***

1. 序 論

水表面에 放流되는 溫排水等의 흐름과 같은 表層放流密度噴流는 自由亂流의 剪斷流效果와, 放流水와 周圍水의 密度差에 起因하는 浮力效果를 同時에 받는 흐름場을 形成한다. 또한, 이 흐름은 水表面 및 密度界面에 의해 2 개의 自由境界에 둘러싸인 特異한 境界條件 때문에 開水路 흐름으로 代表되는 自由剪斷流와 區別된다.

k-ε 모델에 의한 二次元表層放流密度噴流의 數値解析에 관한 硏究는 Patanker and Spalding(1972), McGuirk and Papadimitriou(1986), 岩佐·細田·伊藤(1987), 室田·中辻啓二·藤崎(1989)等에 의해 試圖되어져 왔으나, 自由水表面의 取扱, 亂流의 表現, 特히 亂流成分에 미치는 浮力 影響의 導入등 數値計算에 있어서 많은 問題點이 미해결의 상태로 남겨져 있다. 또한, 濃度 혹은 溫度變動場에서 亂流計測의 어려움 때문에 信賴할만한 實驗 data가 不足하여 豫測結果의 檢證이 定性的인 段階에 머무르고 있다.

本 硏究에서는 k-ε 二方程式 數値모델을 自由水表面을 갖는 表層密度噴流의 流動解析에 適用하여 中辻啓二(1984)의 亂流計測結果와 比較함으로서 모델의 妥當性을 檢證하고, 表層密度噴流의 몇가지 重要한 흐름 特性을 調査한다.

2. 流體運動의 基礎方程式

表層放流密度噴流의 基礎方程式 定式化에 있어서, 流體는 非壓縮性으로 하고 靜水壓近似 및 Boussinesq 近似의 假定을 導入한다.

2.1 平均流의 基礎方程式

二次元 表層密度噴流의 流動을 支配하는 基礎方程式은 前述한 假定과 더불어 擴散方程式에 의해 輸送되는 物質을 密度偏差로 하면 質量, 運動量 및 scalar量의 保存法則에 根據하여 다음과 같이 記述된다.

連續方程式

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial W}{\partial z}=0 \tag{1}$$

運動方程式

$$\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}+W\frac{\partial U}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_t\frac{\partial U}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_t\frac{\partial U}{\partial z}\right) \tag{2}$$

* 釜山專門大學 土木科(Department of Civil Engineering, Pusan Junior College, Pusan, Korea)
**大田大學校 土木工學科(Department of Civil Engineering, Taejon University, Taejon, Korea)
***釜山大學校 土木工學科(Department of Civil Engineering, Pusan National University, Pusan, Korea)

$$0 = -g - \frac{1}{\rho_a}\frac{\partial P}{\partial z} \tag{3}$$

擴散方程式

$$\frac{\partial N}{\partial t} + U\frac{\partial N}{\partial x} + W\frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma_t\frac{\partial N}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma_t\frac{\partial N}{\partial z}\right) \tag{4}$$

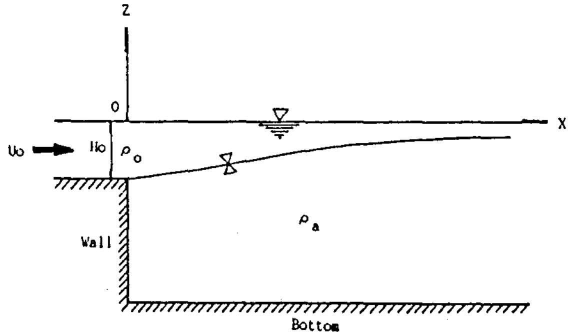

Fig. 1 Coordinate System and Boundaries

여기에서, 座標系는 放流口의 中心軸上의 平均水面에 原點을 取하고, 流下方向에 x 軸, 鉛直上向으로 z 軸을 取한다(Fig. 1). U 및 W 는 各各 平均流速벡터의 x 및 z 方向成分, P는 壓力, ρ는 密度, ρ_a는 基準(周圍水)密度, $\Delta\rho(=\rho_a-\rho)$는 密度偏差, $N=g\cdot\Delta\rho/\rho_a$, g는 重力加速度이다. ν_t는 渦動粘性係數, Γ_t는 渦動擴散係數이다.

式(3)으로부터 壓力은 靜水壓分布로 된다. 水表面의 位置를 $z=\zeta$로 하면, $z=-h$에 있어서의 壓力은 다음式으로 表示된다.

$$P_{z=-h} = \int_{-h}^{\zeta}\rho\cdot g\cdot dz = \rho_a\cdot g\ (\zeta+h) - \int_{-h}^{\zeta}\Delta\rho\cdot g\cdot dz \tag{5}$$

式(5)에 있어서의 右邊 第 1項은 基準密度에 의한 壓力이고, 任意의 水深에서 一定値를 取한다. 第 2項은 密度偏差에 의한 壓力, 즉 浮力에 의한 壓力의 減少分이다.

2.2 亂流變動成分

流體의 單位質量當의 亂流運動에너지 k및 亂流에너지의 消散率ε을

$$k = \frac{1}{2}u_i'u_i' \tag{6}$$

$$\varepsilon = \tau\cdot\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} = \nu\cdot\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \tag{7}$$

으로 定義하고, 渦動粘性係數가 이들 2개의 特性量에 의해 決定된다고 하면 다음과 같은 關係가 얻어진다.

$$\nu_t = C\mu\cdot\frac{k^2}{\varepsilon} \tag{8}$$

여기서 $C\mu$ 는 實驗에 의해 決定되는 常數이다.

따라서, 應力流束 (stress flux)및 浮力流束(buoyancy flux)은 Jones and Launder(1972)의 局所等方性의 假定에 의해 다음과 같이 表現된다.

$$-u_i'u_j' = \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \cdot \delta_{ij} \tag{9}$$

$$-u_i'b' = \frac{\nu_t}{\sigma_t} \cdot \frac{\partial b}{\partial x_i} \tag{10}$$

여기서, b' 은 $b=\rho \cdot g / \rho_a$의 時間變動值, δ_{ij}는 Kronecker delta 함수, σ_t는 亂流 Schmidt 數이다.

또한, k 및 ε 의 擴散項에 대해서는 分子擴散과의 類似性으로 부터 k 에 관한 亂流 擴散係數 Γ_k와 $\sigma_k=\nu_t/\Gamma_k$ 로 定義되는 k에 관한 亂流 Schmidt 數 σ_k 와 ε 의 亂流 擴散係數 Γ_ε 및 $\sigma_\varepsilon=\nu_t/\Gamma_\varepsilon$으로 定義되는 ε 에 관한 亂流 Schmidt 數 σ_ε을 導入하고, Davidov(1961)에 의한 近似를 利用하여 整理하면 流速 및 浮力의 時間平均值의 項으로 表示되는 k 및 ε 의 輸送方程式이 얻어진다.

$$\underbrace{\frac{\partial k}{\partial t}}_{\text{time rate}} + \underbrace{U_j \frac{\partial k}{\partial x_j}}_{\text{advection}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial x_j}\right)}_{\text{diffusion}} + \underbrace{\nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial U_i}{\partial x_j}}_{\text{production by shear}}$$

$$+ \underbrace{\frac{\nu_t}{\sigma_t}\frac{\partial N}{\partial x_j}\delta_{3i}}_{\text{buoyancy production/destruction}} - \underbrace{\varepsilon}_{\text{viscous dissipation}} \tag{11}$$

$$\underbrace{\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}}_{\text{time rate}} + \underbrace{U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}}_{\text{advection}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right)}_{\text{diffusion}}$$

$$\underbrace{+ C_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{k}\nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{k} + C_{\varepsilon 3}\frac{\varepsilon}{k}\frac{\nu_t}{\sigma_t}\frac{\partial N}{\partial x_j}\delta_{3i}}_{\text{production/destruction}} \tag{12}$$

여기서, $\sigma_k, \sigma_\varepsilon, C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}, C_{\varepsilon 3}$ 는 實驗에 의해 決定되는 常數이다. 表層密度噴流의 흐름場에 관한 基礎方程式은 式(1)~(4) 및 식(11)~(12)에 의해 完結된다. 亂流 Schmidt 數는 Webb(1970)에 의해 算定한다. 또한, 모델에 使用되는 實驗常數는 Launder and Spalding(1974)과 Rodi(1979)에 의해 提案되어져 常用되고 있는 Table 1. 의 값을 利用한다. 모델링에 관한 詳細한 過程은 許 와 崔(1991)에 記述되어 있으므로 本稿에서는 省略한다.

Table 1. Values of Constants in the k-ε Model

C_μ	σ_k	σ_ε	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	$C_{\varepsilon 3}$
0.09	1.0	1.3	1.44	1.92	0.288

3 數值計算의 槪要

3.1 數值計算法

數值計算은 有限差分法에 의해 實行하였다. 各 方程式의 差分化 및 數值技法은 Nakatsuji, Huh and Kurita(1987) 의 三次元 數值計算에 使用된 技法을 修正하여 二次元化 하였다. 差分方程式은 基礎方程式을 各 control volume에대해 積分한 式을 離散化하여 求한다. 自由水表面의 變動이 表層密度噴流의 擧動에 미치는 影響을 考慮하기 위해 水面變動을 直接計算하는 方法을 採用하였다. 靜水壓近似의 導入에 의해 流體의 鉛直方

向運動을 直接 計算할 수 없으므로, 底面으로 부터 水表面까지 各 control volume에 대해 連續方程式을 積分하고 連續條件을 滿足하도록 鉛直方向流速 W 를 求한다. 그 다음, 上記와 같이 control volume을 水深方向으로 積分한 鉛直水柱의 連續條件 및 水表面의 運動學的 境界條件으로 부터 水面變動量 ζ 를 計算한다. 이 같은 方法에 의해 求해진 ζ 에는 鉛直方向運動方程式의 簡略化에 따른 誤差가 包含될 可能性이 있고, 또한 그 誤差가 水平方向의 壓力傾斜로써 流動의 展開에 影響을 줄 수 있다. 이러한 誤差를 最小化할 目的으로, 水位變動量 ζ 를 空間的으로 連結하기위해 水位變動量 ζ 를 時間的으로 implicit한 差分으로 表現하여 ζ 의 空間的인 聯立一次方程式을 構成하고 이를 適切한 數値計算法으로 푸는 節次를 採用하였다. 그 外의 時間差分은 leap-frog 法에 의한 explicit差分이다. 또한, 空間差分은 計算의 精度 및 計算速度(演算時間)의 向上을 期하기 위해 Spalding(1972)의 hybrid法을 使用하였다.

3.2 境界條件

境界條件은 Fig. 1과 같은 計算領域에 대해 다음과 같이 設定하였다.

水表面 : $W_s = \partial\zeta/\partial t + U_s \cdot \partial\zeta/\partial x$ (運動學的條件)

$\partial U/\partial z = \partial N/\partial z = 0$, $\partial k/\partial z = \partial\varepsilon/\partial z = 0$

壁面 : $U = 0$, $\rho\nu_t \cdot \partial W/\partial x = \tau_w$, $\partial N/\partial x = 0$,

$\partial k/\partial x = \partial\varepsilon/\partial x = 0$

底面 : $W = 0$, $\rho\nu_t \cdot \partial U/\partial z = \tau_b$, $\partial N/\partial z = 0$,

$\partial k/\partial x = \partial\varepsilon/\partial x = 0$

放流口 : $U = U_o$, $N = N_o$, $\partial\zeta/\partial x = 0$, $k = k_o$, $\varepsilon = \varepsilon_o$

下流端 : $\partial U/\partial x = \partial N/\partial x = 0$, $W = \zeta = 0$,

$\partial k/\partial x = \partial\varepsilon/\partial x = 0$

여기서, τ는 剪斷應力을 나타내고, 添字 w 및 b는 壁面 및 底面을 意味한다.

4. 結 論

二次元 表層放流 密度噴流의 流動에 대한 數値計算을 k-ε 二方程式亂流모델에 의해 實施하고 實驗結果와의 比較로 부터 모델의 妥當性을 檢討하였다.

放流口에서의 k 및 ε 의 값의 設定이 流動의 展開에 미치는 影響은 微小하며, 提案되어 있는 方程式의 選擇에 구애받을 必要가 없음을 確認하였다.

ε 方程式의 浮力生成項은 많은 硏究者에 의해 無視되고 있으나, 本 硏究結果로 부터 흐름의 成層化의 再現에는 無視할 수 없는 重要한 項임이 立證되었다.

k-ε모델이 局所等方性의 假定을 導入하고 있으므로, 浮力效果가 卓越한 領域에서는 流動을 充分히 再現할 수 없으나, 成層化가 發達되기 以前의 領域에서는 k-ε모델로 부터 實驗結果와 良好하게 一致하는 結果를 얻을 수 있었다.

參考文獻

許 再寧, 崔 漢起, 1991. K-ε 모델의 二次元表層密度噴流에의 適用(第1報), 大田大學校 都市開發硏究所論文集 第 2號(印刷中)

Adams, E.W. and Rodi, W., 1990. Modelling Flow and Mixing in Sedimentation Tanks, J. Hydr. Engrg., ASCE, Vol. 116, No. 7, pp. 895～913

Davidov, B.I., 1961. On the Statistical Dynamics of an Incompressible Turbulent Fluid, Doklady Academy Nauk SSSR, Vol. 136, 47

Gibson, M. and Launder, B.E., 1976. On the Calculation of Horizontal, Turbulent Free Shear Flow under Gravitational Influence, J. Heat Transfer, ASME, Vol. 98, pp. 81～87

Jones, W.P. and Launder, B.E., 1972. The Prediction of Laminarization with a Two-Equation Model of Turbulence, Intl. J. Heat Mass

Transfer, Vol. 15, pp. 1878〜1806

Launder, B.E. and Spalding, D.B., 1974. The Numerical Computation of Turbulent Flows, Computer Methods in Applied Mech. and Engrg., Vol. 3, pp. 269〜289

McGuirk, J.J. and Papadimitriou, C., 1986. A Numerical Study of the Internal Hydraulic Jump, Intl. Sympo. on Buoyant Flows, Athens, Greece, pp. 242〜255

Nakatsuji, K.,Huh, J.Y. and Kurita, H., 1987.Three-Dimensional Computation of River Plumes, Proc. 22nd Congress, IAHR, Lausanne, Switzerland, Technical Session B, pp. 391〜396

Patanker, S.V. and Spalding, D.B., 1972. A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-Diemnsional Parabolic flows, Intl. J. Heat Mass Transfer, Vol. 15, pp. 1787〜1806

Rodi, W., 1979. Influence of Buoyancy and Rotation on Equations for the Turbulent Length Scale, 2nd Sympo. on Turbulent Shear Flows, London, England, pp. 1037〜1042

Spalding, D.B., 1972. A Novel Finite Difference Formulation for Differential Expressions Involving both First and Second Derivatives, Intl. J. Numerical Methods in Engineering, Vol. 4, pp. 551〜559

Webb, E.K., 1970. Profile Relationships : the Log-Linear Range and Extension to Strong Stability, Quart. J. R. Met. Soc. Vol. 96, pp.67〜90

The ASCE Task Committee on Turbulence Models in Hydraulic Computations, 1989. Turbulence Modeling of Surface Water Flow and Transport: Part I, J. Hydr. Engrg., ASCE, Vol. 114, No. 9, pp. 970〜991

岩佐義朗・細田　尚・伊藤邦展, 1987. 亂流モデによる Buoaynt Surface Jet の數値解析, 京都大學防災研究所年報, 第30號, B-2, pp. 583〜595

松梨順三郎・岡田俊文・黑林寛治, 1987. 亂流モデルによる表層密度噴流の解析, 第31回水理講演會論文集, pp. 503〜508

室田　明・中　啓二・藤崎　豊, 1989. 亂流モデルの成層せん斷流への適用, 土木學會第33回水理講演會論文集, pp. 583〜588

中迂啓二, 1984. 表層密度噴流の混合機構と擴がりに關する基礎的研究, 大阪大學學位論文, 104pp.

坂井伸一・岩佐義朗・細田　尚, 1987. ε-方程式の浮力項の效果に關する檢討, 土木學會第42回年次學術講演會, Ⅱ-207

和田　明・荒木　洋, 1986. 冷却水放水口近傍での高溫領域擴散豫測手法の開發, 電力中央研究所報告, No. 385034