確率論的方法을 이용한 擴散解析

(Monte Carlo 方法을 중심으로)

이 종 남* , 신 문 섭**

1. 서 론

擴散問題는 基礎方程式을 離散量으로 變換하여 數値的으로 구하는것이 일반적이지만 差分化에 따른 誤差및 安定性의 問題가 있다. 그러므로 擴散現象에 란덤(random)性質을 이용하여 미분방정식을 사용하지 않고 擴散현상을 추적하는 Monte Carlo 方法이 있다. 이 方法은 흐름의 크기와 시간, 粒子數등을 주어 亂數를 發生시키면서 分散粒子의 擴散을 구하는 것이다. 日野는 亂流現象을 亂數理論모델로 하여 粒子를 Lagrange적인 運動特性으로 나타낼수 있다고 생각하여 數値 모델에 의한 粒子擴散實驗을 하였다. 林·岩崎은 개수로에서 수면에 浮遊하고 있는 粒子의 擴散에 Monte Carlo 方法을 적용한 것과 實驗에 의한 것을 비교하여 보아 잘 일치하였음을 알았으며 또한 河西 基는 地下水를 確率論的 수법에 대해서 檢討하였다.

2. 본 론

(1) 亂數發生에 의한 擴散 모델

x方向의 平均流速 U, y,z方向에 각각 β, γ의 線形分布函數를 갖는 $u = U + \beta y + \gamma z$인 한 方向 흐름에 대하여 時間 $t=n\Delta t$에 $(x^{(n)}, y^{(n)}, z^{(n)})$에 있던 粒子가 Δt時間 後 $(x^{(n+1)}, y^{(n+1)}, z^{(n+1)})$으로 移動하였다고 한다. 亂數發生에 의한 渦動擴散항에 해당하는 x,y,z방향의 移動距離를 각각 l_x, l_y, l_z로 하면

$$
\begin{aligned}
x^{(n+1)} &= x^{(n)} + l_x + (U + \beta y^{(n+1/2)} + \gamma z^{(n+1/2)})\Delta t \\
y^{(n+1)} &= y^{(n)} + l_y \qquad \text{---------------} \qquad (1) \\
z^{(n+1)} &= z^{(n)} + l_z
\end{aligned}
$$

로 나타낼수 있다. 여기서,

* : 경희대학교 토목공학과 교수(Department of Civil Eng.Kyung Hee University.Su Won 449-701 Korea)

** : 군산수산전문대학 해양토목과 부교수(Department of Ocean Civil Eng.Kunsan Fisheries Junior College .Kunsan 573-400 Korea)

$$y^{(n+1/2)} = (y^{(n+1)} + y^{(n)})/2 \qquad \text{-------------} \qquad (2)$$

$$z^{(n+1/2)} = (z^{(n+1)} + z^{(n)})/2$$

l_x, l_y, l_z : 매시간 各 粒子마다 다른값을 가진다. 移動距離 l_x, l_y, l_z을 정하기 위하여 一様亂數를 이용하였다. 一様亂數에의한 방법에서 亂數 a,b,c의 發生範圍는 -0.5 - 0.5사이의 一様亂數로 하였으며 亂數 a,b,c는 서로 서로 다른 값을 가져야 한다 A,B,C는 다음과 같은 형으로 나타낼 수 있다.

$$A = \frac{a}{(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}}$$

$$B = \frac{b}{(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}} \qquad \text{--------------} \qquad (3)$$

$$C = \frac{c}{(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}}$$

식(3)에서 A,B,C의 평균치는 0 이며 分散은 1/3分布를 가지므로 移動距離分散 σ^2과 擴散係數와의 관계식은

$$K = \sigma^2/2\triangle t \qquad \text{---------------------} \qquad (4)$$

이다. 그리고 (4)식을 이용하여 이동거리를 (5)식으로 하였다.

$$l_x = A\times(3\times2\times\triangle t\times k_x)^{1/2}$$

$$l_y = B\times(3\times2\times\triangle t\times k_y)^{1/2} \qquad \text{-------------------} \qquad (5)$$

$$l_z = C\times(3\times2\times\triangle t\times k_z)^{1/2}$$

濃度計算은 N개의 粒子를 시간 t=0, x = y = 0에 설정하고 시간(t)= t에 있어서 격자내 들어간 粒子의 數를 가지고 濃度를 計算 하였다.

濃度를 구하는 과정에서 粒子의 數가 작은 경우에는 粒子의 分散이 심하여서 평균조작을 하여 分散을 적게할 수 있다.

(2) Monte Carlo 方法에 의한 擴散

問題의 設定은 Fig.1와 같이 하였다. 그리고 土砂의 擴散은 移流,沈降,擴散,再浮遊過程이 있지만 이들중 移流, 擴散過程에 대하여 檢討하였다. x,y,z방향에 線形分布를 갖는 한 방향흐름 ($u = U + \beta y + \gamma z$)에 대해서 3차원으로 擴散을 計算하였다. 계산조건은 Table 1과 같고 亂數發生은 一様亂數로 하였다. 계산시간은 대부분 亂數發生과

이동거리를 계산하는데 소비되었다.

Table 1 Experimental condition

平 均 流 速	20, 30, 40,50 (cm/sec)
速 度 變 化 率(β)	0.001 (cm/sec)/cm
速 度 變 化 率(γ)	0.005 (cm/sec)/cm
擴 散 係 數(k_x)	2 x 10^5 cm^2/sec
擴 散 係 數(k_y)	2 x 10^5 cm^2/sec
擴 散 係 數(k_z)	5 x 10^2 cm^2/sec
格 子 間 隔($\triangle x$)	2000 m
格 子 間 隔($\triangle y$)	2000 m
格 子 間 隔($\triangle z$)	5 m
投 入 量	1.49 ton
投 入 點	i=1, j=10, k=7
時 間 間 隔	60 sec

Fig.1에서 移流는 潮流의 鉛直分布를 水深方向으로 流速이 일정하다고 가정한다. 또한 潮位變化는 고려하지 않는다고 보았다.

3차원 擴散過程에서 a, b, c亂數를 發生하여 계산하였으며 流速은 20, 30, 40, 50 (cm/sec)마다 計算하였다.

그리고 조류의 운동 및 연속방정식과 확산방정식을 차분화하여 토사투하에 따른 토사농도를 구하여 보았으며 또한 조류의 운동 및 연속방정식에서 구해진 속도성분 U, V를 Monte Carlo 방법에서 속도성분으로 사용하여 토사투하에 따른 토사농도를 구하여 보았다.

3. 결 론

土砂擴散 시뮬레이션에 관하여 差分法과 Monte Carlo方法으로 土砂를 投下하였을때 土砂投下에 따른 濃度를 計算하여 보았다.그 結果 다음과 같은 結論을 얻었다.

1) 差分法을 利用하여 潮汐에 의한 土砂投下擴散모델과 Monte Carlo 방법을 이용한 것과 비교해 본 결과 土砂濃度는 거의 일치하였다.

2) 擴散方程式을 離散化 하지 않고 亂數發生에 의하여 濃度를 구하는 手法을 開發하였다.

Reference

1. Rubinstein,R. Y., Marcus,R., Efficiency of Multivariate Control Variates in Monte Carlo Simulation, Operations Research, 661-677.

2. Van Rijn, L. C.,1986. Mathematical Modeling of Suspended Sediment in Non-Uniform Flow, J.H.E., ASCE, 112(6)

3. 日野幹雄,1965. モンテ カルロ法による亂流擴散の二三の計算について,第9回水理講演會講演集,pp.1-11.