

조파기에 의하여 발생된 선단파의 전개

박인규* 최항순**

1. 서론

2차원 수조에서 조파기를 정현파형으로 가동시키면, 조파기에서 멀리 떨어진 점에서는 초기의 천이과정을 거쳐 파고와 주기가 일정한 정현파가 전파되어 나간다. 초기의 천이과정에서는 비교적 파장이 긴 파성분이 전파하며 감쇄하는데, 이 파성분은 정상파형과 다른 특성을 보인다. 이를 상세히 고찰하기 위하여 선단파(leading waves)의 전개방정식(evolution equation)을 구하여 수치계산을 수행한 다음 실험치와 비교하였다.

이러한 중력파의 천이거동에 대하여 Wu(1957)는 심해파에 대한 연구를 하였으며, Miles(1962)는 선형해를 해석적으로 구하였다. Hasimoto와 Ono(1972)는 균일수심에서 중력파의 느린변조(slow modulation)가 비선형 Schrödinger 방정식으로 표현됨을 보였으며, Longuet-Higgins(1974)는 실험을 수행하여 선단파의 군속도가 Miles의 해석해와 일치함을 확인하였다. Yue & Mei(1980)는 무한수심에 놓인 쇄기에 의한 산란문제를 cubic Schrödinger 방정식으로 기술하여 파전개를 해석했다. 본 연구에서는 임의의 수심에서 비선형성이 선단파의 전개에 미치는 효과를 중점적으로 고찰하였다.

2. 전개방정식

포텐셜 유동으로 가정한 다음 평면진행파의 전개방정식은 다척도 전개 기법(multiple-scale expansion techniques)을 이용하여 유도할 수 있다. 서서히 변조하며 전파하는 파의 특성을 고려하여 전파방향의 길이와 시간을 다음과 같이 정의한다.

$$(x, t), (x_1, t_1) = \varepsilon(x, t), (x_2, t_2) = \varepsilon^2(x, t), \dots \quad (1)$$

여기서 ε 는 파의 기울기($=ka$)이며 작은 양이라 가정한다.

* 현대 선박해양 연구소

** 서울대학교 공과대학

속도포텐셜과 자유수면을 ε 에 대하여 접근 전개하고 이를 다시 위상 ($\theta = kx - \omega t$) 에 대한 조화항으로 전개한다.

$$(\phi, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{m=n}^{\infty} e^{im\theta} (\phi_{nm}, \zeta_{nm}) \quad (2)$$

이들을 지배방정식인 Laplace 방정식과 자유표면 경계조건에 대입하여 정리하면 각 ε 의 차수와 θ 의 조화항에 대한 초기 및 경계치 문제를 얻게 된다. 해의 전개방정식은 3차항의 경계치 문제에서 긴 유도과정을 거쳐 Schrödinger 방정식으로 귀착됨을 보일 수 있다 (Mei, 1983).

$$-i \frac{\partial A}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + \beta |A|^2 = 0, \quad (3)$$

여기서 $\tau = t_2$, $\xi = x_1 - C_g t_1$ 그리고 C_g 는 군속도이며 a 와 β 는 다음과 같이 정의된다.

$$a = -\frac{1}{2} \omega''(k) = \frac{C_g^2}{2\omega} - \frac{\omega kh \cos^2 h kh}{k^2 \sinh 2kh} + \frac{kh \sinh kh}{h \cosh kh}$$

$$\beta = \frac{\omega k^2}{16 \sinh^2 kh} + \frac{\cosh(4kh) + 8 - 2 \tan^2 hkh}{2 \sinh 2kh} - \frac{\omega}{2 \sinh 2kh} \frac{(2\omega \cosh kh + k C_g)^2}{(gh - C_g^2)}$$

윗식에서 비선형항을 무시하면 선형 Schrödinger 방정식이 되며, 선형 방정식의 해는 Fresnel 적분을 이용하여 표시할 수 있다 (Miles).

$$\frac{A}{a} = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{1}{2} + C(m) \right]^2 + \left[\frac{1}{2} + S(m) \right]^2 \right\}^{1/2} \quad (4)$$

여기서 $C(m)$ 과 $S(m)$ 은 각각 Fresnel cosine 과 sine 적분이다.

3. 수치 계산

수치계산의 편의를 위해 변수들을 다음과 같이 무차원화 시킨다.

$$A' = \frac{A}{a}, \quad \xi' = k^2 a \xi, \quad \tau' = \omega(ka)^2 \tau \quad (5)$$

무차원화된 방정식은 다음과 같다.

$$\text{지배방정식: } -i \frac{\partial A'}{\partial \tau'} + \bar{a} \frac{\partial^2 A'}{\partial \xi'^2} + \bar{\beta} |A'|^2 A' = 0, \quad \bar{a} = \frac{k^2}{\omega} a, \quad \bar{\beta} = \frac{\beta}{\omega k^2} \quad (6)$$

$$\text{초기 조건: } A'(\xi') = 0.5 \{ 1 + \tanh(-\xi'/\lambda) \}, \quad \lambda \approx 0 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{경계 조건: } A' &\rightarrow 0 & \text{as } \xi' &\rightarrow \infty \\ A' &\rightarrow \exp(-i\tau'/2) & \text{as } \xi' &\rightarrow -\infty \end{aligned} \quad (8)$$

분산항의 계수 $\bar{\alpha}$ 는 항상 양의 값을 가지며 $\bar{\beta}=0$ 이 되는 $kh = 1.36$ 근처에서 최대치가 되며 수심이 깊어짐에 따라 점근치 1/8에 접근한다. 한편 비선형항의 계수 $\bar{\beta}$ 는 $kh < 1.36$ 까지의 천수역에서는 음의 값을 가지나 $kh > 1.36$ 에서는 양의 값으로 바뀌고 심해에서는 점근치 1/2에 접근한다. 특히 $kh = 1.36$ 에서는 $\bar{\beta}$ 가 0이 되어 선형 문제가 된다. 여러가지 kh 에 대하여 계산을 수행하였으나, 실험시설의 제한과 지면의 제안으로 무한수심 $kh=3$ 인 경우만 실험치와 비교하여 제시하였다.

수치계산은 유한차분법중 Crank-Nicolson 알고리즘을 사용하였고 $\Delta\tau' = 0.005$, $\Delta\xi' = 0.1$ 의 grid size에서 수치계산 과정없이 비교적 안정한 수치해를 얻었다.

4. 고찰

Longuet-Higgins의 실험결과와 비교하기 위하여 계산결과를 Fig. 1에 도시하였다. 실험조건은 $kh=3.0$, $\omega=5.52$ rad/sec, 파고 0.22m이며 발생파는 조파기에서 48m 떨어진 곳에서 계측하였다. 선형 및 비선형 계산치를 실험치와 비교하면 비선형이론에 의한 계산치가 실험치에 좀 더 근사한 값을

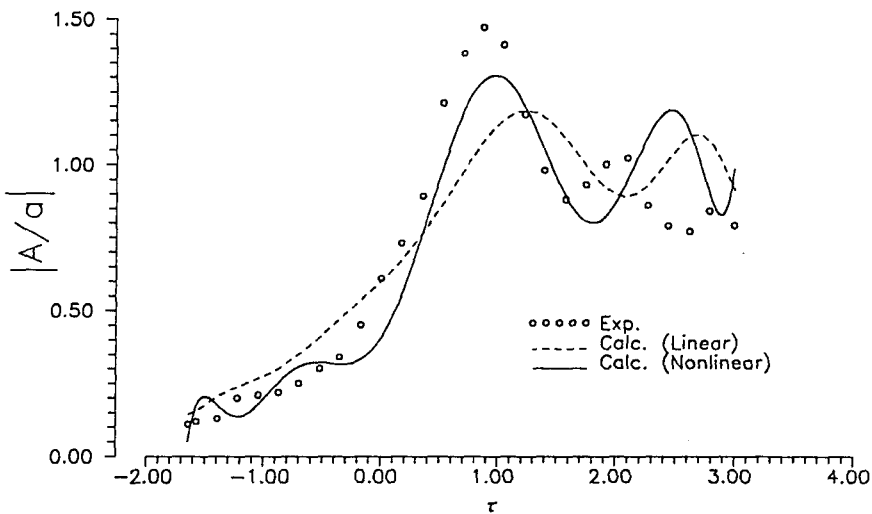


Fig. 1 Comparison of computed amplitude with experiment for $kh=3.0$, $ka=0.340$

주고 있음을 발견할 수 있다.

다른 조건에 대한 계산과 실험결과를 비교 분석하면 발생파의 기울기가 작을 때에는 선형이론과 비선형이론의 차이가 매우 적지만 발생파의 기울기가 클 때에는 현격한 차이를 보이며 비선형이론이 실험치에 보다 가까운 결과를 제공한다. 결론을 유도하기 위하여는 보다 많은 실험이 요구되며, 특히 기울기가 가파른 발생파에 대한 실험이 필요하다.

5. 참고 문헌

Hashimoto, H. and Ono, H. 1972 Nonlinear modulation of gravity waves. J. Physical Society of Japan Vol.33, No3 pp.805-811.

Longuet-Higgins, M. S. 1974 Breaking waves - in deep or shallow waters. Proc.10th Symp. on Naval Hydrdynamics pp.579-605.

Mei, C. C. 1983 The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves. John Wiley & Sons.

Miles, J. W. 1962 Transient gravity wave response to an oscillating pressure. J. Fluid Mech. Vol.13 pp.145-150.

Wu, T. Y. 1957 Water waves generated by the translatory and oscillatory surface disturbance. Caltech Eng. Div. Report 85-3.

Yue, D.K.P and Mei, C.C. 1980 Forward diffraction of Stokes waves by a thin wedge. J. Fluid Mech. Vol.99 pp.32-52.