모우드 분리 기법을 사용한 스펙트랄모델 수립

소재귀*, 정경태*, 승영호**

1. 개 요

Heaps(1972)가 수직좌표계 처리에서 Spectral expansion 기법을 사용하는 3차원 수치모델을 적용한 이래 조류, 풍성류, 밀도류 등 천해역의 흐름현상에 대해 스펙트랄 모델을 적용하여 현상을 재현, 예측하는 연구가 활발히 전개되어 왔다.

Davies (1977), Davies and Owen (1979) 등은 Heaps가 사용한 Eigenfunction 대신 Chebyshev polynomial, Legendre polynomial, B-spline function 등 일반적인 함수를 Basis function으로 사용하였다. 또한 Davies (1985)는 모우드 분리기법을 사용하여 모델의 경계성을 제고시킨 바 있다. Basis function으로 B-spline function 등 Piecewise polynomial을 사용하면 Current profile을 좀더 Smooth하게 표현할 수 있는 장점이 있으나 계산시간이 많이 걸리며, Eigenfunction을 사용하는 경우 계산이 매우 단순하고 유속단면을 간단하게 표현할 수 있는 장점이 있다.

본 연구는 Heaps (1972)가 사용한 사용한 기본방정식 및 경계조건에 Basis function으로는 Eigenfunction을 사용하였으며, 모우드 분리기법을 도입하여 모델의 경제성을 제고시키고 아울러 해저면 경계에서 스트레스 경계조건을 적용하여 경계층의 유속분포를 보다 정확히 계산하고자 하였다. External mode의 경우 2차원 유한차분 모델을 사용하여 해수면 변이, 평균유속 등을 계산하였고 수직좌표계 상에서는 Eigenfunction을 사용하는 스펙트랄 기법을 적용하였다.

2. 기본 방정식

연속방정식 및 운동방정식은 아래와 같다.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\int_o^h U\,dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_o^h V\,dz = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \gamma V = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial z} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \gamma U = -g\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial G}{\partial z} \qquad (3)$$

여기서, t : 시간
x, y, z : Cartesian coordinates의 Left-handed system으로서 x, y는 수평좌표, z는 평균해수면하의 수직좌표를 나타낸다.
h : 평균해수면하의 수심
ζ : 해수면 변이
U, V : x, y 방향의 수평유속 성분
F, G : x, y 방향의 마찰응력 성분
ρ : 해수의 밀도
γ : Coriolis 상수
g : 중력 상수

* 한국해양연구소 연안공학연구실
** 인하대학교 해양학과

위에서 마찰응력성분은 아래와 같이 가정한다.

$$F = -\rho N \frac{\partial U}{\partial z}, \qquad G = -\rho N \frac{\partial V}{\partial z} \tag{4}$$

여기서, N은 Eddy viscosity를 나타내는 계수로서 x, y, z의 함수이다. (4)식을 대입하여 (2), (3)식을 다시쓰면, 아래와 같다.

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \gamma V = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\left(N\frac{\partial U}{\partial z}\right) \tag{5}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \gamma U = -g\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\left(N\frac{\partial V}{\partial z}\right) \tag{6}$$

식 (1), (5), (6)을 풀기 위해서는 해수면과 해저면에서 경계조건이 주어져야 한다. 해수면에서는

$$F = F_s, \qquad G = G_s \qquad \text{at} \quad z = 0 \tag{7}$$

이며, F_s, G_s는 각각 해수면에 미치는 바람응력의 x, y 방향성분을 나타낸다. 따라서,

$$-\rho\left(N\frac{\partial U}{\partial z}\right)_o = F_s, \qquad -\rho\left(N\frac{\partial V}{\partial z}\right)_o = G_s \tag{8}$$

위에서 첨자 o는 $z = 0$인 평균해수면을 나타낸다. 마찬가지로 해저면 경계에서는

$$F = F_B, \qquad G = G_B \qquad \text{at} \quad z = h \tag{9}$$

이며, F_B, G_B는 각각 해저면 마찰의 x, y 성분을 나타낸다. 따라서,

$$-\rho\left(N\frac{\partial U}{\partial z}\right)_h = F_B, \qquad -\rho\left(N\frac{\partial V}{\partial z}\right)_h = G_B \tag{10}$$

위에서 해저면 마찰은 저면유속과 선형관계를 갖는다고 가정한다. 즉,

$$F_B = k\rho U_h, \qquad G_B = k\rho V_h \tag{11}$$

위에서 k는 상수 또는 x, y의 함수이다. 식 (10), (11)에서

$$\left(N\frac{\partial U}{\partial z}\right)_h + kU_h = 0, \qquad \left(N\frac{\partial V}{\partial z}\right)_h + kV_h = 0 \tag{12}$$

가 된다.

3. 모우드 분리기법

수평유속은 아래와 같이 수심평균 유속과 이에 대한 변이로 나누어 표시할 수 있다.

$$U = \bar{U} + U', \quad \bar{U} = \frac{1}{h}\int_o^h U\,dz \tag{13}$$

$$V = \bar{V} + V', \quad \bar{V} = \frac{1}{h}\int_o^h V\,dz \tag{14}$$

이를 이용하여 식 (1), (5), (6)을 다시쓰면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} - \gamma \bar{V} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{1}{\rho h}(F_B - F_S) \tag{15}$$

$$\frac{\partial U'}{\partial t} - \gamma V' = \frac{\partial}{\partial z}\left(N\frac{\partial U'}{\partial z}\right) + \frac{1}{\rho h}(F_B - F_S) \tag{16}$$

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \gamma \bar{U} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{1}{\rho h}(G_B - G_S) \tag{17}$$

$$\frac{\partial U'}{\partial t} + \gamma U' = \frac{\partial}{\partial z}\left(N\frac{\partial V'}{\partial z}\right) + \frac{1}{\rho h}(G_B - G_S) \tag{18}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\int_o^h \bar{U}dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_o^h \bar{V}dz = 0 \tag{19}$$

위에서 식 (15), (17), (19)는 수심평균된 유속 및 해면변이에 대한 2차원 식(External mode)으로서 이를 Explicit finite diffierent method로 풀 경우 CFL 조건에 따른 시간간격 상의 제한을 받게 된다. 그러나, 식 (16), (18)은 수직좌표에 따른 유속변이를 계산하는 식 (Internal mode)으로서 이에 대한 시간간격 상의 제한은 좀 더 약하다. 따라서, 2가지 모우드를 분리하여 계산할 경우 모델의 경제성은 상당히 높아진다. Davies (1985)는 이러한 모우드분리기법을 B-spline function을 사용하는 Galerkin 함수 이용 모델에 적용한 바 있다.

4. Galerkin method의 적용

유속변이를 수직좌표에 따른 Basis function과 수평좌표, 시간에 따른 계수의 선형결합으로 표현하면 다음과 같다.

$$U'(x, y, z, t) = \sum_{r=1}^{M} A_r(x, y, z, t) f_r(z) \tag{20}$$

$$V'(x, y, z, t) = \sum_{r=1}^{M} B_r(x, y, z, t) f_r(z) \tag{21}$$

식 (16)에 Galerkin method를 적용하면 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\int_o^h \frac{\partial U'}{\partial t} f_k(z)dz - \gamma\int_o^h V' f_k(z)dz - \int_o^h \frac{\partial}{\partial z}\left(N\frac{\partial U'}{\partial z}\right) f_k(z)dz$$
$$- \frac{1}{\rho h}(F_B - F_S)\int_o^h f_k(z)dz = 0 \tag{22}$$

위의 식에서 Eddy viscosity를 포함하는 항을 부분적분하고 식 (8), (10)의 경계조건을 대입하면 다음과 같은 식이 된다.

$$\int_o^h \frac{\partial U'}{\partial t} f_k(z)dz - \gamma \int_o^h V' f_k(z)dz + \int_o^h N \frac{\partial U'}{\partial z}\frac{\partial f_k(z)}{\partial z}dz$$
$$- \frac{1}{\rho h}(F_B - F_s)\int_o^h f_k(z)dz + \frac{1}{\rho}[F_B f_k(h) - F_S f_k(o)] = 0 \tag{23}$$

식 (23)에 식 (20), (21)을 대입하면, 다음과 같다.

$$\sum_{r=1}^{M} \frac{\partial A_r}{\partial t}\int_o^h f_r \cdot f_k dz - \gamma \sum_{r=1}^{M} B_r \int_o^h f_r \cdot f_k dz + \sum_{r=1}^{M} A_r \int_o^h N \frac{\partial f_r}{\partial z}\frac{\partial f_k}{\partial z}dz$$
$$- \frac{1}{\rho h}(F_B - F_S)\int_o^h f_k dz + \frac{1}{\rho}[F_B f_k(h) - F_S f_k(o)] = 0 \tag{24}$$

위의 식에서 Eddy viscosity가 포함된 항을 다시 부분적분하면,

$$\int_o^h \frac{\partial f_r}{\partial z} N \frac{\partial f_k}{\partial z}dz = \left[f_r(h)\cdot N(h)\frac{\partial f_k}{\partial z}\bigg|_h - f_r(o)N(o)\frac{\partial f_k}{\partial z}\bigg|_o \right]$$
$$- \int_o^h f_r \frac{\partial}{\partial z}\left(N\frac{\partial f_k}{\partial z}\right)dz \tag{25}$$

으로 쓸 수 있다. 위에서 함수 f_k가 Eigenfunction으로서 아래와 같은 Sturm-Liouville system을 만족시킨다고 가정한다.

$$\frac{d}{dz}\left(N\frac{df_k}{dz}\right) = -\lambda_k f_k \tag{26}$$

$$N\frac{df_k}{dz}\bigg|_h = \beta f_k(h) \tag{27}$$

$$\frac{df_k}{dz}\bigg|_o = 0 \tag{28}$$

위에서 식 (26), (27), (28)을 만족시키는 λ_k를 찾을 수 있으며, 함수 f_k의 형태는 Eddy viscosity profile에 따라 다르게 결정된다. 따라서, 식 (25)에 식 (26), (27), (28)을 대입하고 이를 다시 식 (24)에 대입하면 다음과 같은 식이 된다.

$$\sum_{r=1}^{M} \frac{\partial A_r}{\partial t}\int_o^h f_r f_k dz - \gamma \sum_{r=1}^{M} B_r \int_o^h f_r f_k dz + \sum_{r=1}^{M} A_r \lambda_k \int_o^h f_r \cdot f_k dz$$
$$+ \sum_{r=1}^{M} \beta f_r(h) f_k(h) - \frac{1}{\rho h}(F_B - F_S)\int_o^h f_k dz + \frac{1}{\rho}[F_B f_k(h) - F_S f_k(o)] = 0 \tag{29}$$

함수 f_k가 Eigenfunction으로서 갖는 Orthogonality 특성을 이용하면 윗식을 좀더 간략화시킬 수 있다. 즉,

$$\int_o^h f_r f_k = 0, \qquad if \ r \neq k \tag{30}$$

$$\sum_{r=1}^{M} \int_o^f f_r f_k dz = \int_o^h f_k^2 dz \tag{31}$$

따라서, 식 (29)는 아래와 같은 식이 된다.

$$\left(\frac{\partial A_k}{\partial t} - \gamma B_k + \lambda_k A_k\right) \int_o^h f_k^2 dz + \beta f_k^2(h)$$
$$- \frac{1}{\rho h}(F_B - F_S) \int_o^h f_k dz + \frac{1}{\rho}[F_B f_k(h) - F_S f_k(o)] = 0 \tag{32}$$

같은 방법으로 y방향 유속변이에 대한 식을 구하면 아래와 같다.

$$\left(\frac{\partial B_k}{\partial t} + \gamma A_k + \lambda_k B_k\right) \int_o^h f_k^2 dz + \beta f_k^2(h)$$
$$- \frac{1}{\rho h}(G_B - G_S) \int_o^h f_k dz + \frac{1}{\rho}[G_B f_k(h) - G_S f_k(o)] = 0 \tag{33}$$

5. 수치기법의 적용

모델계산은 External mode 와 Internal mode를 분리하여 실시한다. External mode의 경우 Forward time stepping의 유한차분기법을 사용하며, Internal mode의 경우 Crank-Nicolson method를 사용한다. 계산시간 간격은 $\Delta t_i = n \Delta t_e$로 n == 4 ～ 10 정도로 조정한다(Davies, 1982). 모델계산은 장방형, 일정수심의 Idealized basin에서 실시하여 다양한 Eddy viscosity prifile, 경계조건의 형태에 따른 모델 반응을 시험한다.