

混合境界積分 要素法을 사용한 直交入射波浪의 反射率計算 모델

A hybrid boundary integral equation model
applied for the calculation of normal incident waves

서 승 남 , 김 상 익

1. 서 론

해저가 완만하게 변하는 해역 위를 지나는 파랑의 반사는 무시할 수 있으며 이에 대한 파랑계산 방법으로는 굴절 모델(서 등, 1989)과 포물형 근사식 모델(서, 1990b)을 들 수 있다. 그러나 해저의 변화가 심해 상당량의 파랑에너지가 반사되는 경우에는 파랑 운동을 지배하는 원시 방정식인 Laplace식을 사용하여야 한다. 본 연구에서는 수중장애물에 의한 파랑반사율을 계산하는 방법으로 혼합 경계적분 요소법(HBIEM)을 사용하였고 파랑 특성에 따른 모델의 결과를 분석하였다.

계산지역 밖의 수심은 일정하나 내부에 위치한 장애물에 대한 파랑 변형 계산 방법을 고찰하기로 한다. 수심이 일정한 지역은 속도포텐셜을 eigenfunction의 급수로 표시할 수 있으며 각 항의 미지수와 수면과 해저의 내부 격자점의 미지수인 속도포텐셜을 Laplace식으로 부터 유도된 경계 적분식으로 부터 구하게 되며 이를 HBIEM이라고 부른다.

2. 혼합 경계 적분 요소법 (HBIEM)

Laplace식을 만족하는 미소진폭파의 지형에 의한 변형을 계산하기 위하여 경계상의 일점 $x_i = (x_i, z_i)$ 에 위치한 free space Green 함수 G 를 사용하여 경계 적분식을 유도하면 식(1)이 된다(서, 1990a).

$$\alpha_i \phi(\bar{x}_i) = \int_{\Gamma} \left(\phi \frac{\partial G}{\partial n} - \frac{\partial \phi}{\partial n} G \right) ds \quad (1)$$

여기서 Γ 는 경계, ds 는 경계의 미소거리 그리고 α_i 는 내각이다. 식(1)의 Green 함수는 경계상의 점 x_i 로 부터 임의점 x_i 까지 거리 r 의 함수로 되며 식(2)로 정의한다.

$$G = \ln r = \ln \sqrt{(x - x_i)^2 + (z - z_i)^2} \quad (2)$$

경계적분식(1)은 경계상의 임의점에서의 경계값으로만 표시되었으며, 경계조건을 이용하면 경계에서는 오직 하나의 미지수만이 존재한다. 따라서 경계선상에 N 개의 격자점을 설정하면 N 개의 미지수가 생긴다. 그리고 모든 격자점에 대해 식(1)을 풀면 N 개의 연립 방정식이 만들어져 해를 얻게 된다. 격자점 간의 미지수는 선형적으로 비례하는 것으로 가정하는 선형 요소법을 사용하였다.

경계조건으로는 미소진폭파의 수면 경계조건과 불투수성 저면조건이 사용되었다. 측면 경계조건은 수심이 일정하기 때문에 ϕ 를 eigenfunction의 급수로 표시하여 관계식을 유도하였다. 즉 왼쪽 경계 $x=x_1$ 에서 ϕ 와 $\partial\phi/\partial n$ 을 표시하면 식(3)과 (4)을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} \phi(x_1, z) = & a_7 e^{ik_{10}z} \frac{\cosh k_{10}(z + h_1)}{\cosh k_{10}h_1} \\ & + a_{10} e^{-ik_{10}z} \frac{\cosh k_{10}(z + h_1)}{\cosh k_{10}h_1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{1n} e^{-k_{1n}(x-x_1)} \frac{\cosh k_{1n}(z + h_1)}{\cosh k_{1n}h_1} \quad (3) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n}(x_1, z) = -\frac{\partial \phi}{\partial x}(x_1, z) \quad (4)$$

식(3)의 첫항은 입사 파랑을 나타내며 a_{10} 는 반사파의 propagation mode의 미지 진폭, a_{1n} 은 evanescent mode의 미지 진폭이다. 식(3)의 파수는 파랑 분산식으로 부터 계산되며 propagation mode의 파수는 하나만 존재하며 식(5)로 부터, 반면에 evanescent mode의 파수는 무한개로 식(6)에서 부터 계산된다.

$$\omega^2 = gk \tanh kh \quad (5)$$

$$\omega^2 = -gk_n \tan k_n h, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6)$$

한편 오른쪽 경계 $x=x_2$ 에서의 ϕ 와 $\partial \phi / \partial n$ 은 식 (7)과 (8)로 각기 표시된다.

$$\phi(x_2, z) = a_{20} e^{ik_{20}z} \frac{\cosh k_{20}(z+h_2)}{\cosh k_{20}h_2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} e^{k_{2n}(z-x_2)} \frac{\cos k_{2n}(z+h_2)}{\cos k_{2n}h_2} \quad (7)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n}(x_2, z) = \frac{\partial \phi}{\partial x}(x_2, z) \quad (8)$$

무한 급수로 표시된 식(3), (4), (7), (8)을 수치계산하기 위해서는 이를 절단하여 유한급수로 만들어야 하며 식(3), (4)은 $x=x_1$ 의 경계에 표시된 요소 개수인 NU로 식(7), (8)은 $x=x_2$ 의 경계의 개수 ND로 정해 이를 식(1)에 사용하였다.

측면 경계를 제외한 격자점에서 식(1)의 적분은 Liggett(1977)의 방법을 사용하였다. 본 모델은 선형 모델이고 각 경계선의 교점인 격자점은 측면 경계상에 있으므로 해당 미지 진폭에 대한 적절한 연립방정식이 구성되어져야 한다. 특히 주의해야 할 것은 측면 경계에 대한 적분이며 이를 구하는 데 세심한 주의가 필요하다.

연립방정식을 풀어 반사파와 진행파의 진폭을 구하면 반사율(K_R)과 통과율(K_T)은 식(9)로 정의된다.

$$K_R = \left| \frac{a_{10}}{a_1} \right|, \quad K_T = \left| \frac{a_{20}}{a_1} \right| \quad (9)$$

그리고 이들은 에너지 보존 법칙으로 부터 다음과 같은 관계를 만족하여야 하며 이를 수치모델의 정밀도를 측정하는 데 이용할 수 있다.

$$1 = K_R^2 + K_T^2 \frac{k_{10}}{k_{20}} \frac{\left(1 + \frac{2k_{20}h_2}{\sinh 2k_{20}h_2} \right)}{\left(1 + \frac{2k_{10}h_1}{\sinh 2k_{10}h_1} \right)} \quad (10)$$

3. 수치모델 결과 및 토의

본 절에서는 모델 검증을 위해 계단식 지형, sinusoidal 둔덕이 하나 있는 지형, 둔덕이 두개인 지형에 대한 반사율과 통과율을 계산하였다. NS는 수면의 요소 갯수이며 ND는 $x=x_2$ 경계선의 갯수, NB는 저면의 갯수, NU는 $x=x_1$ 경계선의 갯수이다.

그림 1은 계단식 지형의 격자망이며 Yeung의 결과, 본 결과 그리고 보다 정밀한 방법이라고 평가되는 Kirby 등(1987)의 EFEM(eigenfunction expansion method)을 동일한 지형에 적용한 결과를 표 1에 비교하였다. Yeung의 논문에는 격자의 갯수가 명시되어 있지 않아 엄밀한 의미의 비교는 할 수 없으나 본 모델이 사용한 격자수 증 제일

작은 55개의 격자로 계산된 결과로 부터 판단할 때도 본 모델의 결과가 EFEM의 결과에 더 잘 부합함을 보이고 있다. 그림 2에 $(kh)_1$ 에 대한 계단식 지형의 반사율과 투과율을 도시하였다. 수심이 깊어질수록 반사율은 단조감소하고 있으며, 심해 파랑은 지형에 영향을 받지 않으므로 입사 조건이 심해이면 파랑은 계단을 의식하지 못하는 것으로 풀이된다.

한개의 sinusoidal 둔덕의 격자망은 그림 3.a에, 두개 둔덕의 격자망은 그림 3.b에 각각 도시되어 있고 둔덕 정상부의 수심은 평탄한 수심의 1/2에 해당한다. 이 지형에 대한 결과인 그림 4에서 알 수 있듯이 둔덕이 두개인 경우는 둔덕에 의한 상호작용으로 반사율의 형태가 현저하게 변한다. 이러한 상호작용의 과정을 해석하면 다음과 같다. 파랑이 첫째 둔덕을 만나 일부가 반사되고 나머지는 통과한다. 이 통과된 파랑이 둘째 둔덕을 만나 일부가 반사되고 그 나머지는 통과하게 되며 반사된 파랑은 첫째 둔덕을 만나 반사와 통과과정을 거치며 다시 반사된 파랑은 둘째 둔덕에 대해서 같은 과정을 되풀이하여 이러한 과정이 수없이 반복된다. 따라서 최종 반사율은 첫째 둔덕의 원편으로 진행되는 파랑의 총합으로 표시되게 된다. 이러한 상호작용에 의한 산란 파랑의 phase가 같으면 증폭되고 반대이면 감소하므로 이는 둔덕의 형태와 둔덕간의 거리 그리고 입사 파랑의 조건에 따라 변하게 될 것이다.

4. 결론

지형에 의한 파랑의 반사율을 계산하기 위하여 혼합경계 적분법을 사용하였다. 선형요소를 사용한 수치모델의 결과를 기존의 결과와 비교하여 정확도를 검증한 후 입사 파랑의 조건에 따른 반사율과 투과율을 계산하였다. 계단식 지형에 대한 본 모델의 결과는 가장 정밀한 방법인 Kirby등의 EFEM 결과에 잘 부합되었으며, 계단식 지형의 반사율은 수심이 깊어짐에 따라 단조 감소하는 것으로 나타났다. 한편 일정한 수심위에 놓인 sinusoidal 둔덕의 반사율은 수심이 깊어짐에 따라 반사율이 증가하여 최고점에 이른 후 다시 감소하는 형태를 보이고 있다. 이러한 둔덕이 두개인 경우의 반사율은 산란된 파랑들의 phase에 따라 증폭 또는 감소되는 현상이 나타나며 따라서 여러개의 둔덕에 의한 반사율은 입사조건, 둔덕의 형태 및 거리에 의해 결정되는 것으로 판단된다.

참고문헌

1. 서승남, 오병철, 강시환, 1989. 굴절에 의한 천해파 산정법, 한국해양.해양공학회지, 1(1), 15-21.
2. 서승남, 1990a. Cubic Spline을 사용한 경계요소법, 한국해양.해양공학회지, 2(1), 11-17.
- 3 서승남, 1990b. 포물형 근사식에 의한 천해파 추정모델, 한국해양.해양공학회지, 2(3), 134-142.
4. Abramowitz, M. and Stegun, I. A., 1972. Handbook of Mathematical Functions, Dover, New York.
5. Kirby, J.T., Dalrymple, R.A. and Seo, S.N., 1983. "Prediction of obliquely incident water waves over a trench. Part 2. Current flowing along the trench", J. Fluid Mech., Vol. 176, 95-116.
6. Liggett, J. R., 1977, "Location of free surface in porous media", J. Hydr. Div., ASCE, Vol. 103, HY4, 353-365.

7. Liu, P.L.-F. and Abbaspour, M., 1982. "An integral equation method for the diffraction of oblique waves by an infinite cylinder", Int. J. Num. Methods Engineering Vol. 18, 1497-1504.
8. Mei, C. C., 1983. The applied dynamics of ocean surface waves, Wiley-Interscience Pub., New York.
9. Yeung, R. W., 1976. "A hybrid integral equation method for time-harmonic free surface flow", Proc. 1st Int. Conf. Numer. Ship Hydrodyn., 581-607.

Table 1. Reflection and Transmission coefficients for a step case

$\frac{\omega^2 h}{g}$	Present				EFEM			YEUNG		
	N	E	Kr	Kt	E	Kr	Kt	E	Kr	Kt
0.03395	55	1.00623	0.41617	0.59929	1.00000	0.41735	0.59668	1.00025	0.4269	0.5799
	103	1.00461	0.41842	0.59803						
	155	1.00268	0.41807	0.59744						
0.04365	55	1.00772	0.40978	0.61001	1.00000	0.41169	0.60663	1.00016	0.4242	0.5846
	103	1.00473	0.41255	0.60809						
	155	1.00266	0.41231	0.60741						
0.05813	55	1.00967	0.40005	0.62631	1.00000	0.40310	0.62182	1.00011	0.4201	0.5918
	103	1.00486	0.40362	0.62347						
	155	1.00263	0.40359	0.62265						
0.06644	55	1.01065	0.39439	0.63580	1.00000	0.39810	0.63073	1.00002	0.4134	0.6035
	103	1.00491	0.39843	0.63247						
	155	1.00261	0.39852	0.63158						
0.12115	55	1.01501	0.35667	0.70030	1.00000	0.36403	0.69225	0.99980	0.4016	0.6244
	103	1.00501	0.36333	0.69445						
	155	1.00241	0.36413	0.69318						
0.20031	55	1.01721	0.30413	0.79552	1.00000	0.31283	0.78575	0.99938	0.3774	0.6679
	103	1.00481	0.31156	0.78818						
	155	1.00213	0.31288	0.78667						
0.39260	55	1.01930	0.19280	0.98111	1.00000	0.20232	0.96952	0.99851	0.3158	0.7803
	103	1.00523	0.19776	0.97308						
	155	1.00199	0.20091	0.97081						
1.09093	55	1.01124	0.06065	1.09853	1.00000	0.05388	1.09282	0.99760	0.1458	1.0395
	103	0.99695	0.05217	1.09124						
	155	0.99461	0.05389	1.08986						

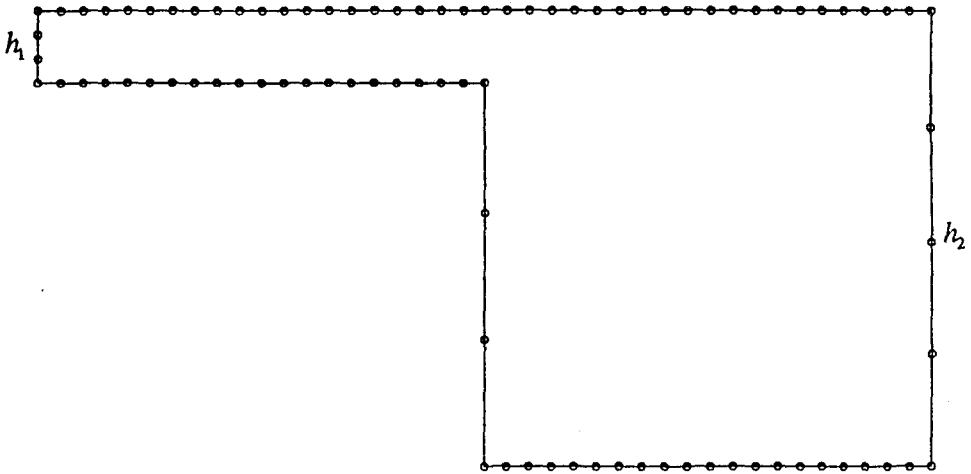


Fig. 1. Grid system for a step

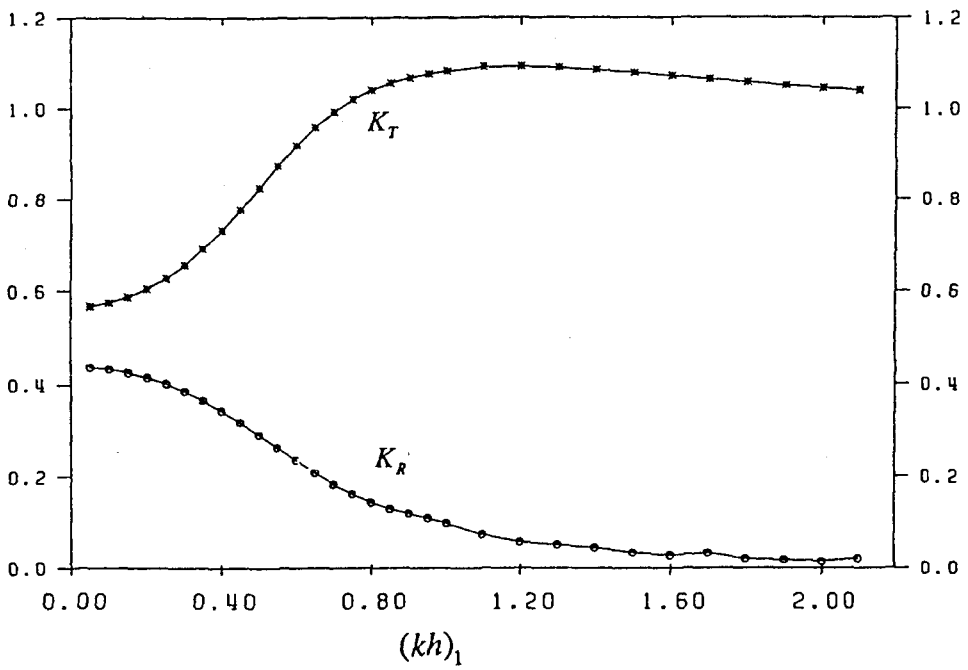


Fig. 2. Reflection and transmission coefficients for a step

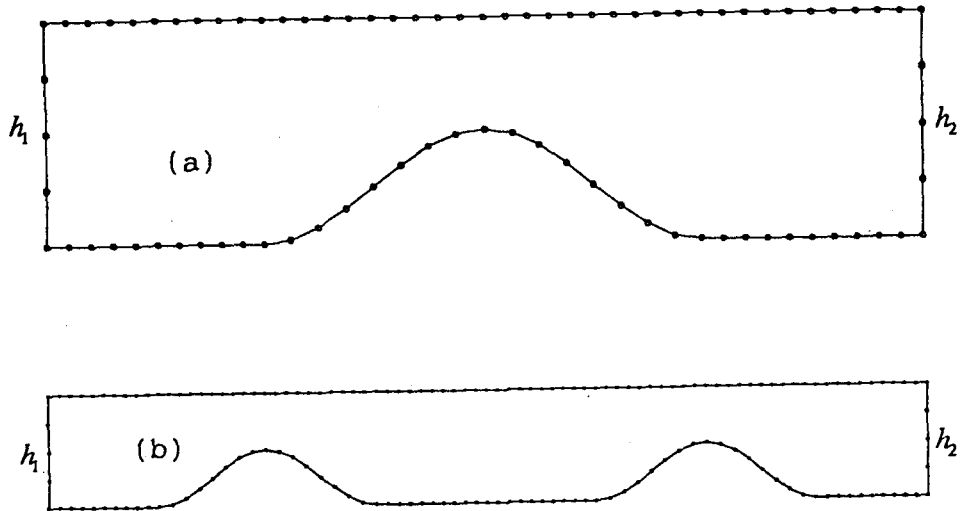


Fig. 3. Grid system for a sinusoidal hump

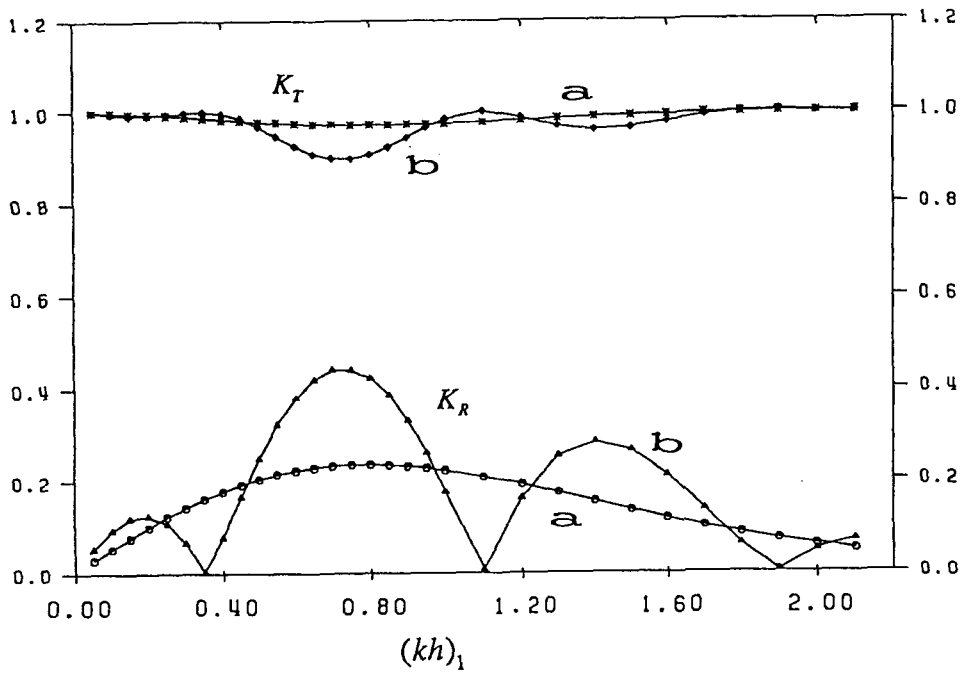


Fig. 4. Reflection and transmission coefficients for a sinusoidal hump