# Positioning Servo System의 Time Optimal Control에 관한 연구

송 창 섭 ( 한양대학교 정밀기계공학과 교수 )
이 봉 진 ( 한양대학교 대학원 정밀기계공학과 )

## 1. 서 론

최근의 컴퓨터, 자동화 기기, 로보트 등으로 대표되는 산업용 기기나 정밀전자 부품제조 기기등의 진보는 눈부신 바가 있으며 그들의 구동 부분에대한 정밀도가 높은 위치결정, 고속 응답성, 소형화 등의 요구가 점차 높아져 가고 있다.

그러므로 고속응답성을 이루기 위하여서는 플랜트의 상태방정식을 구속조건으로 하고 주어진 성능지수를 최소화하는 최적제어이론에 기반을 둔 Bang-Bang control[1]를 positioning servo system에 적용시켜야 한다. Bang-Bang control은 시스템의 초기상태(state)에서 원하는 상태까지 최소시간내에 보내고자하는 제어이론이다.

그러나 Bang-Bang control를 적용하므로서 제기되는 문제점으로는 목표치 근처에서 switching device의 빈번한 switching현상이 발생하게 된다는 것이다. 이로 인하여 switching device의 switching loss와 위치결정력의 저하가 중요한 문제로 대두되게 된다.

그러므로 본 논문에서는 고속응답성을 이루기 위하여 Bang-Bang control를 사용함과 동시에 목표치 근처에서 발생하는 switching현상을 제거할 수 있는 Dual mode control[2][3]을 positioning servo system에 적용하고자 한다. Dual mode control은 Bang-Bang control을 사용함으로서 발생되는 진동문제를 해결하기 위하여 진동현상이 나타나기 전의 적절한 위치에서 선형제어[4]로 시스템의 제어를 변환하는 것이다.

그리고 Dual mode control의 고속응답성의 비교대상으로, 성능지수가 2차형태로 주어지는 LQR(Linear Quadratic Regulator)이론[5]을 이용하여 계인을 선정하는 선형제어시스템으로 하였다.

## 2. Dual mode control

Fig.1는 Dual mode control를 적용한 positioning servo system의 블럭선도이다. Dual mode control이란 상태 평면에서 시스템의 궤적에 따라 Bang-Bang mode 또는 linear-feedback mode로 시스템을 제어하는 것을 말한다. 시스템은 목표치 근처의 적절한 위치에서 선형제어로 변환되는 부분까지 최대로 가속 또는 감속되며, 적절한 위치에 이르렀을 때 시스템의 제어를 선형제어로 바꾸어 목표치에 도달될 수 있는 것이다.

Fig.1의 블럭선도에서 상태변수를 각각 $x_1=(\theta_1-\theta_o)$, $x_2=\omega$로 하였을 때 상태방정식은 식(1)과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix} u \qquad (1)$$

여기서,

$$a = \frac{K_t \cdot K_b}{J \cdot R}$$

$$b = 1/n$$

$$c = \frac{K_t K_p}{J \cdot R}$$

### 2.1 Bang-Bang mode

Bang-Bang control은 단순하게 출력을 목표치와 비교하여 출력이 작으면 입력을 full(+u)로 가하고, 출력이 목표치보다 크면 off(-u)시키는 것이다.

Positioning servo system을 식(1)과 같이 2차 시스템

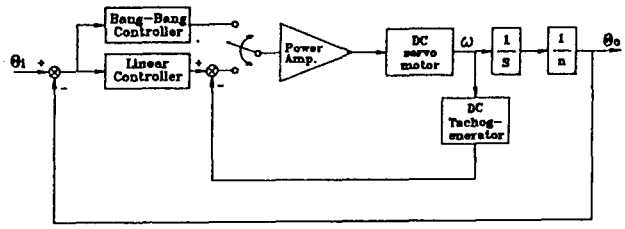


Fig.1 Block diagram of positioning servo system

으로 가정하였을 때, Pontryagin's maximum principle[6]을 적용하여 minimum-time problem[7]의 해를 구할 수 있다. 그 원리를 적용하여 switching function을 식(2)로 나타낼 수 있다.

$$S(x)=x_1-\mathrm{sign}(x_2)\cdot\frac{bc\cdot K}{a^2}\ln\left(\frac{a}{c\cdot K}(x_2)+1\right)+\frac{b}{a}x_2 \quad (2)$$

그리고 최적입력 u(t)는 식(3)와 같이 구할 수 있다.

$$\therefore\ u(t) = -K\cdot\mathrm{sign}\left( S(\underline{x(t)}) \right) \quad (3)$$

2.2 Linear - feedback mode

Bang-Bang control를 적용함으로써 제기되는 문제점으로는 목표치 근처에서 switching device가 빈번히 switching하므로서 목표치에서의 진동(oscillation)현상을 들 수가 있다.

그러므로 목표치 근처의 적절한 위치에서 선형제어로 변환함으로서 진동을 해결할 수 있다. 이 방법에 의한 제어입력은 식(4)과 같다.

$$\begin{cases} u = Ka1\cdot K\cdot\mathrm{sign}\left(S(\underline{x(t)})\right) & |X_e| > X_limit \\ u = Ka1\cdot X_e - Ka2\cdot\omega & |X_e| \le X_limit \end{cases} \quad (4)$$

식(4)을 이용하여 Bang-Bang mode와 Linear-feedback mode를 동시에 수행하도록 하는 Dual-mode control system의 블럭선도는 Fig.2과 같다.

## 3. 컴퓨터 시뮬레이션

본 논문에 사용된 서어보계는 Feedback사의 DC Modular Servo System을 모델로 하였다.

Dual mode control에 의한 제어 시스템의 고속응답성의 비교 대상으로 1960년 Kalman[8]에 의하여 기법이 개발된 이래로 현대 제어이론 및 실제에서 중요한 역활을 하고 있는 LQR이론을 이용하여 최적개인을 선정한 선형제어로 선정하였다. 그러므로 컴퓨터 시뮬레이션하는 데 설정한 모델은

1) LQR이론에 의한 선형제어시스템을 구성한 경우
2) Dual mode control에 의한 시스템을 제어한 경우

로 구분하였다.

3.1 LQR control에 의한 시스템의 선형제어

최소화하여야 할 성능지수, J는 식(5)와 같이 정의한다.

$$J = \int_{t_0}^{t_t}\left( \underline{x^T(t)}\cdot Q\cdot\underline{x(t)} + \underline{u^T(t)}\cdot R\cdot\underline{u(t)} \right) \quad (5)$$

식(1)로 표현되는 상태방정식의 구속조건 아래서 성능지수, 식(5)를 최소화하는 제어 $\underline{u(t)}$는 선형제어 법칙을 통하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\underline{u(t)} = -G\cdot\underline{x(t)} \quad (6)$$

여기에서 $G(=R^{-1}B^TP)$는 positioning servo system에서 피이드백 되어지는 상태변수의 최적이득이며, 행렬 P는 대수학적 리카티 방정식의 nonnegative definite symmetric solution이다.

리카티 방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$\dot{P}(t) = -P(t)A - A^TP(t) - Q + P(t)BR^{-1}B^TP(t) \quad (7)$$

결국 성능지수를 결정하는 변수는 상태변수 $\underline{x(t)}$와 입력변수 $\underline{u(t)}$이므로 상태변수의 최적 이득값은 Q에 대해 R를 상대적으로 변화시켜가며 리카티 방정식을 이용하여 유도할 수 있으며 유도된 이득값은 Table1에 나타나 있다.

Table 1 State variable gain with P/Q variation

| Q = 1 | Control gain of $x_1$ | Control gain of $x_2$ |
|---|---|---|
| P = 0.1 | 3.162278 | $8.966\times10^{-3}$ |
| P = 0.5 | 1.414214 | $5.663\times10^{-3}$ |
| P = 1 | 1. | $4.243\times10^{-3}$ |
| P = 2 | 0.7071068 | $3.322\times10^{-3}$ |

그리고 유도된 각 상태변수의 이득값을 이용하여 계단파 입력에 대한 위치 응답이 Fig.3에 나타나 있다. 또한 계단파 입력에 대한 속도 응답은 Fig.4에 나타나 있으며, 그 때의 플랜트 입력은 Fig.5에 나타나 있다.

Fig.3~Fig.5을 살펴보면, P/Q = 1인 'c'의 경우일때 P/Q = 0.1인 'a'의 경우와 비교하여 상대적으로 적은 입

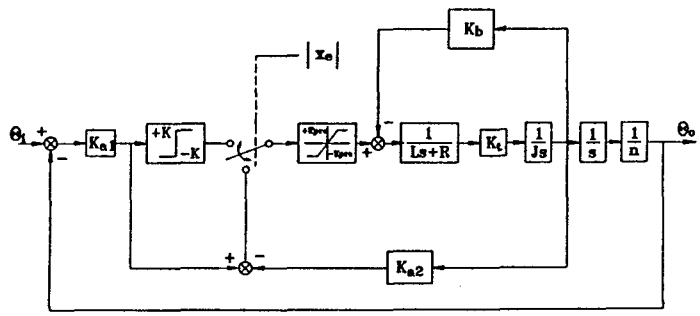


Fig.2 Dual mode control of DC moter servo system

력이 소요되면서도 과도부분에서 오버슈트현상이 감소됨을 알 수 있다. 그러나 입력가중치를 더 증가시킨 'd'의 경우에서는 과도부분에서 'c'의 경우와 거의 같은 크기의 오버슈트를 가지면서 오히려 정착시간(settling time)이 더 길어지는 결점이 발생하였다.

그러므로 본 논문에서는 F/O = 1.일때의 각 상태변수의 이득값을 LQR이론에 의한 선형제어시스템에서 최적의 이득값으로 선정하였다.

### 3.2 Positioning servo system의 Dual mode control

Bang-Bang mode로만 시스템을 제어할 경우 항상 진동이 발생함을 Fig.6으로 알 수 있었다. 그러므로 이 결점을 없애기 위하여 목표치 근처에서 선형영역을 설정하여야 한다. 이것은 시스템에 따라 큰 차이를 보이고 있으며, 영역의 크기에 따라 시스템의 안정성에 영향을 미친다. 그러므로 본 논문에서는 실제실험을 고려한 안정성을 두어 선형영역을 X_limit=1[V]로 하였다.

식(4)으로 주어지는 Dual mode control의 입력에서, 이득 Ka1과 Ka2의 변화가 시스템에 미치는 영향을 각각 Fig.7과 Fig.8에 나타내 었다. Ka1의 증가에 따라 초과응답(overshoot)이 크게 나타났지만 Ka2의 크기를 증가시킴에 따라 초과응답의 영향을 줄일 수 있음을 알 수 있었다. 그러나 속도 피이드백 계인인 $Ka_2$를 너무 증가시키면 Fig.8에 보인바와 같이 switching device에 나쁜 영향을 미치다.

그러므로 Fig.7과 Fig.8를 통하여 Ka1=0.5, Ka2=0.005일때 계단과 입력 5[V]에 대하여 가장작은 정착시간(0.208초)을 이룰 수 있었다. 그래서 Dual mode control에서의 상태 궤환 이득을 Ka1=0.5, Ka2=0.005로 하였다.

### 3.3 시뮬레이션 결과

DC motor를 이용하여 positioning servo system을 구성하여 전절에서 설정한 세가지 모델들에 대해서 시뮬레이션한 결과 다음과 같은 결과를 얻을 수 있었다.

LQR이론에 의한 선형제어에서는 입력가중치를 증가시킴에 따라 오버슈트량도 감소하지만 어느 설정치 이상으로 계속 증가시키면 오히려 정착시간이 길어진다는 단점이 발생함을 알 수 있었다.

그리고 고속응답성을 얻기 위하여 Bang-Bang control만 적용시킬 경우 Describing function analysis에서 얻은 결과와 같이 목표치에서 진동이 발생함을 알 수 있었다. 또한 Bang-Bang control에 의한 고속응답성을 유지하면서 목표치에서의 진동문제를 Dual mode control로 해결할 수 있음을 알았다.

각각의 모델들에 대한 이득을 전절에서 구한 값으로 하고, 계단파입력에 대한 위치, 속도 그리고 중폭기의 입력형태를 각각 Fig.9, Fig.10, Fig.11에 나타내었다. 위치응답을 나타내는 Fig.9을 보면 과도부분에서 Dual mode control은 고속응답을 위하여 적용되는 Bang-Bang control의 궤적과 같은 궤적을 유지하면서도 목표치에서의 진동이 발생하지 않는 빠른 응답성을 보여주고 있다는 것을 보여주고 있다. Fig.11에서 LQR이론에 의한 선형제어시스템의 제어입력이 초기에 매우 큰 값을 가지는 데 이것은 증폭기가 포화상태에 이르기 때문에 그 영향이 실제에서는 나타나지 못한다.

## 4. 실험결과 및 고찰

Positioning servo system을 구성하기 위하여 속도센서기는 DC Tachogenerator를 사용하였고, 위치검출을 위하여 potentiometer를 사용하였다.

기준입력(reference input)은 함수발생기(function generator)를 사용하여 5V로 하고, Labin Master의 타이머(timer)를 이용하여 A/D sampling time을 0.0033초로 하였다.

시뮬레이션하는데 설정한 모델순으로 하드웨어를 구성하여 각각의 모델마다의 응답을 A/D변환시켜 측정하였다.

먼저 시뮬레이션 결과가 타당성을 갖고 있음 입정하기 위하여 Fig.12, Fig.13에 Bang-Bang control에 대한 시뮬레이션과 실험결과를 비교하였으며, 그 결과 각각의 실험에 대한 위치, 속도응답선도가 시뮬레이션 결과와 유사하므로 시뮬레이션에 의한 제어의 능력을 평가할 수 있다는 것을 확인할 수 있었다.

그러므로 Fig.14과 Fig.15에 Dual mode control의 시뮬레이션에서 구한 이득들을 이용하여 기준입력 5[V]에 대한 실험을 시뮬레이션 결과와 비교하였다. 시뮬레이션에서와 같이 실험에서도 선형제어시스템을 구성했을 때에 존재하는 오버슈트량이 없이 안정되면서 빠른 정착시간을 이룰 수 있음을 보여주고 있다.

## 5. 결 론

Positioning servo system의 고속 응답성을 이루기 위하여 Bang-Bang control를 적용였으며, Bang-Bang control의 적용에 따르는 문제점을 해결하기 위하여 목표치 근처에서 linear-feedback control를 첨가시켰는데 이에 대한 시뮬레이션과 실험결과로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

(1) LQR이론에 의한 이득선정으로 시스템을 구성한 경우 입력가중치의 증가량에 따라 과도부분의 형상이 개선될 수 있다.

(2) 고속응답성을 이루기 위한 Bang-Bang control의 적용에 따르는 목표치에서의 진동문제를 Dual mode control에 의해 해결할 수 있다.

(3) Dual mode control의 feedforwrad 이득인 Ka1의 증가에 따른 초과응답의 영향을 속도 피이드백 이득인 Ka2를 같이 크게함으로서 줄일 수 있다.

## REFERENCE


1. David Burghes & Alexander Graham, "Introduction to Control Theory including Optimal Control", Ellis Horwood Limited, 1980.
2. Katsuhiko Ogata, "Modern Control Engineering", Prentice-Hall Inc., 1970.
3. Robert W.Newcomb, "Linear Optimal Control", Prentice-Hall Inc., 1971.
4. Gene F.Franklin & J.David Powell & Michael L. Workman, "Digital Control of Dynamic Systems", Addsion-Wesley Publishing Company, 1990.
5. 김종식, "선형제어시스템공학", 淸文閣, 1990.

6. Donald E. Kirk, "Optimal Control Theory an Introduction", Prentice-Hall Inc., 1970.
7. Andrew P.Sage & Chelsea C. White, "Optimum Systems Control", Prentice-Hall Inc., 1977.
8. M. Vidyasagar, "Nonlinear Systems Analysis", Prentice-Hall Inc., 1978.
9. Kalman R.E., "Contributions to the Theory of Optimal Control", Bol. Soc. Mat. Mex., Vol.5, pp.122~119., 1960,
10. C. Denis Mee, Eric D. Daniel, "Magnetic Recording Handbook", McGraw-Hill Publishing Company, pp.655-771, 1989
11. C.J.Brown, J.T.Ma, "Time-Optimal of a Moving-Coil Linear Actuator", IBM J. RES. DEVELOP, pp.372-379, 1968
12. K.S.Ananthanarayanan, "Third-Order Theory and Bang-Bang Control of Voice Coil Actuators", IEEE Transactions on magnetics, Vol.MAG-18, No.3, pp.888-892, 1982


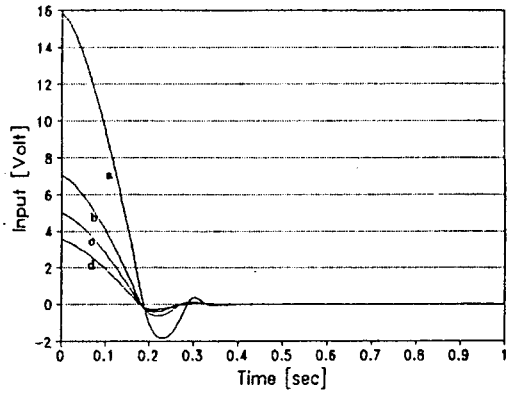


Fig.5 Input voltage according to P/Q variation, a:P/Q=0.1, b:P/Q=0.5, c:P/Q=1, d:P/Q=2

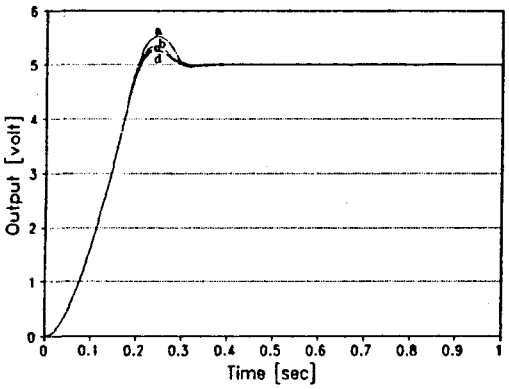


Fig.3 Positioning response according to P/Q variation,a:P/Q=0.1,b:P/Q=0.5,c:P/Q=1, d:P/Q=2

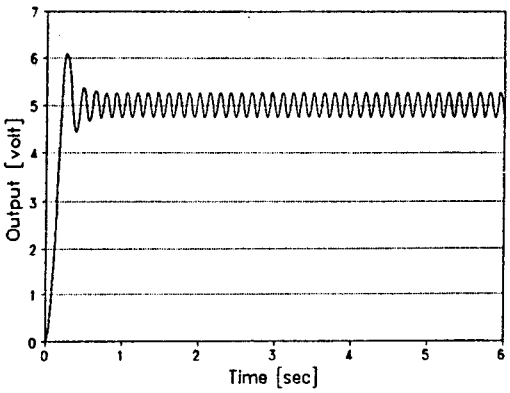


Fig.6 Time response of the Bang-Bang control

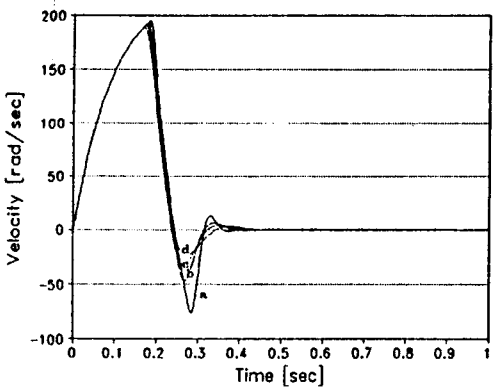


Fig.4 Velocity response according to P/Q variation, a:P/Q=0.1, b:P/Q=0.5, c:P/Q=1, d:P/Q=2

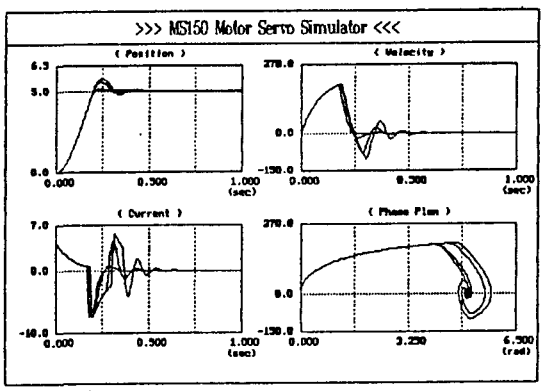


Fig.7 Time response according to gain(Kal) variation

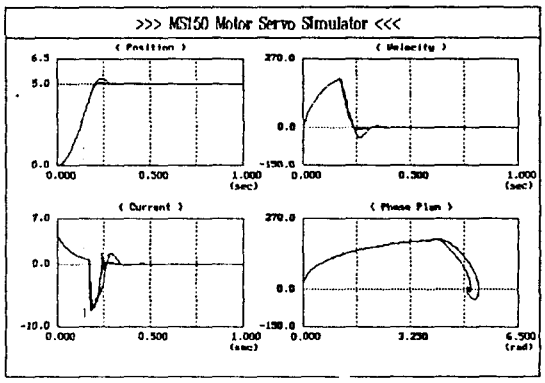


Fig.8 Time response according to gain(Ka2) variation

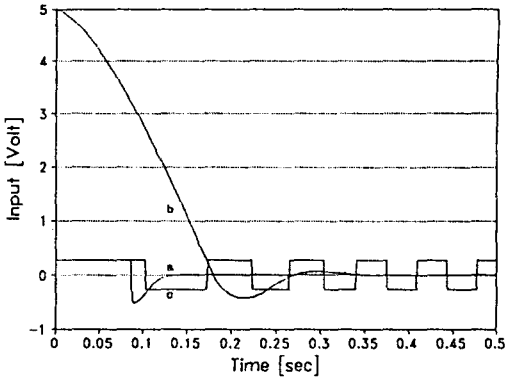


Fig.11 Input volts of Dual mode control(a), Bang-Bang control(b) and LQR control(c)

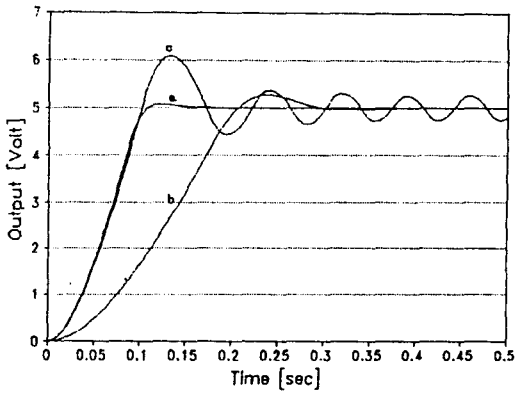


Fig.9 Positoining response of Dual mode control(a), Bang-Bang control(b) and LQR control(c).

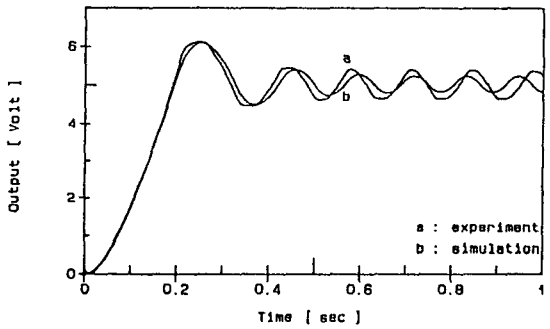


Fig.12 Position response using Bang-Bang control

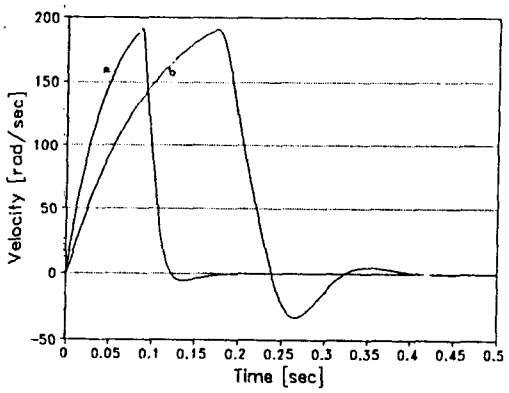


Fig.10 Velocity response of Dual mode control(a) and LQR control(b).

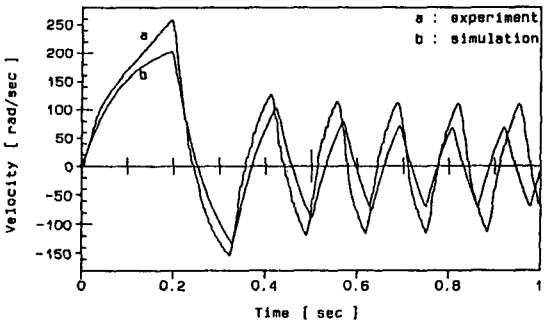


Fig.13 Velocity response using Bang-Bang control

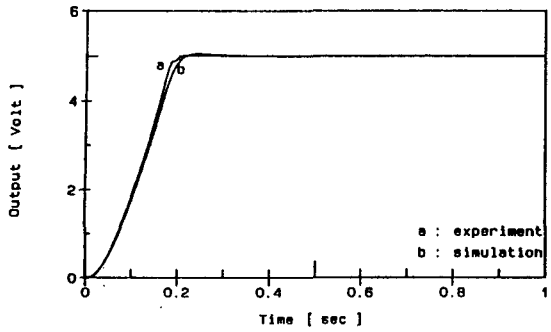


Fig.14 Position response of Dual mode control

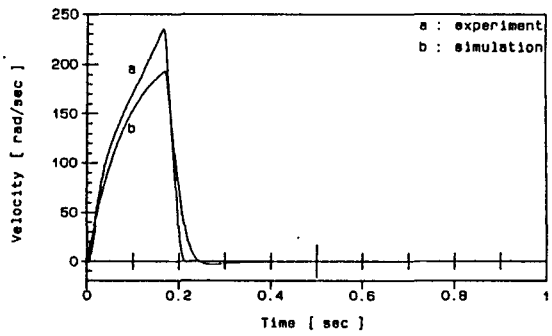


Fig.15 Velocity response of Dual mode control