

복합재료 유연 링크지 시스템의 동탄성 해석

정재천
최승복
정용길*

인하대학교 기계공학과

1. 서론

최근 단위 시간당 생산성 향상을 위한 기계적 시스템의 작업속도가 계속적으로 증가되고 있으며, 그에 따라 관성력과 모터의 회전 토크를 줄이기 위하여 시스템을 구성하고 있는 요소들의 구조 경량화 작업이 필요하게 되었다. 따라서 종래의 해석이론을 벗어난 메카니즘의 동탄성해석에 대한 중요성이 대두되었고, 이는 특히 기계의 작동속도에 대한 공진현상 및 위치 정확도와 밀접한 관계가 있기 때문에 품질향상면에 있어서 매우 중요하게 인식되고 있다.

알루미늄 혹은 강과 같은 종래의 재료로 만들어진 유연 메카니즘 요소에 대한 동특성 해석연구[1,2]는 국내외적으로 활발히 진행되고 있으나, 복합재료로 제작된 기계적 메카니즘 요소에 대한 국내 연구현황은 매우 미약하다고 사료된다. 복합재료는 기존의 재료에 비해 무게에 대한 강성비 및 뒨뒨효과가 매우 우수하며, 동방성 재료와 달리 방향에 따라 강도 및 강성을 보강할 수 있으므로 재료를 효과적으로 사용할 수 있다는 잇점이 있다. 그러므로 항공 산업, 자동차 산업, 제조 산업등 각 분야에서 사용이 급증하고 있는 추세이다.

본 연구에서는 복합재료로 만든 기계적 메카니즘 요소의 동탄성특성을 유한요소법을 이용한 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 분석 하므로써 향후 이와 관련된 메카니즘 해석에 기초적 자료를 제공하는데 그 목적이 있다.

2. 운동 방정식

관성 기준 프레임(inertia reference frame) OXY에 관계되는 일반적인 평면 링크지 메카니즘(linkage mechanism) 운동의 동탄성 운동을 고려하면, Fig.1과 같다. 어떤 순간 t에서 i번째 링크의 임의의 한점은 변형 전후의 P_i와 P_i' 같이 표시 되어진다. 따라서 변형후의 임의의 점 P는 다음과 같다.

$$r_i = r_{o1} + r_{r1} + u_i \quad (1)$$

여기서 u_i는 변형 변위 벡터이며 u_xe₁ + u_ye₂ 이다.

Fig.2로 부터 요소에서 일반적인점 P는 기준프레임에 고정된 변형된 상태로 설명할 수 있다.

$$r_i = [X_A + (x + u_x) \cos \theta - u_y \sin \theta] i + [Y_A + (x + u_x) \sin \theta - u_y \cos \theta] j \quad (2)$$

$$r_i = (X_A \cos \theta + Y_A \sin \theta + x + u_x) e_1 + (-X_A \sin \theta + Y_A \cos \theta + u_y) e_2 \quad (3)$$

e₁과 e₂ 방향에서 유연링크의 변형은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$u_x = [N_x] \{ U \} \quad (4)$$

$$u_y = [N_y] \{ U \} \quad (5)$$

식(3)을 시간에 대해 미분하고, 식(4)와 (5)을 대입하면 다음과 같다.

$$\dot{r}_i = (\dot{X}_A - [N_y]\{u\}\dot{\theta} + [N_x]\{\dot{u}\}) e_1 + (\dot{Y}_A + x\dot{\theta} + [N_x]\{u\}\dot{\theta} + [N_y]\{\dot{u}\}) e_2 \quad (6)$$

만약 복합재료 링크가 단면적 A와 유효질량밀도 ρ 가 일정하다고 가정하면 요소의 kinetic 에너지는 다음과 같다.

$$T_o = \frac{1}{2} \rho A \int_0^l \dot{r}_i \cdot \dot{r}_i dx \quad (7)$$

여기서 ρ 는 S-플라이(ply) laminate의 유효질량밀도

$$\rho = \sum_{n=1}^S \rho^{(n)} \frac{t^{(n)}}{h} \quad (8)$$

이다. $\rho^{(n)}$ 과 $t^{(n)}$ 는 각각 n번째 플라이의 밀도와 두께이고, h는 laminate의 총 두께이다[3].

q = [P θ]로 정의하면 식(7)은 다음과 같이 표현된다.

$$T_o = \frac{1}{2} [\dot{q}]^T [M] \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (9)$$

여기서 [M]은 다음과 같다.

$$[M] = \begin{bmatrix} M_{qq} & M_{q\theta} \\ M_{q\theta}^T & M_{\theta\theta} \end{bmatrix} \quad (10)$$

orthotropic한 성질을 갖는 복합재료 laminate의 경우 유효 강성 C_{ijkl}은 다음과 같다[4].

$$C_{ijkl}^{(n)} = \sum_{n=1}^S C_{ijkl}^{(n)} \frac{t^{(n)}}{h} \quad (11)$$

여기서 t⁽ⁿ⁾은 n번째 플라이의 두께이고 h는 laminate 두께이다. n번째 플라이의 탄성계수는 다음과 같다.

$$C_{xxxx}^{(n)} = C_{1111} \cos^4 \phi + 2(C_{1122} + 2C_{1212}) \sin^2 \phi \cos^2 \phi + C_{2222} \sin^4 \phi$$

$$\begin{aligned}
C_{xyyy}^{(n)} &= (C_{1111} + C_{2222} - 4C_{1212})\sin^2\phi\cos^2\phi \\
&\quad + C_{1122}(\sin^4\phi + \cos^4\phi) \\
C_{yyyy}^{(n)} &= C_{1111}\sin^4\phi + 2(C_{1122} + 2C_{1212})\sin^2\phi\cos^2\phi \\
&\quad + C_{2222}\cos^4\phi \\
C_{xxyy}^{(n)} &= (C_{1111} - C_{1122} - 2C_{1212})\sin\phi\cos^3\phi \\
&\quad + (C_{1122} - C_{2222} + 2C_{1212})\sin^3\phi\cos\phi \\
C_{yyxy}^{(n)} &= (C_{1111} - C_{1122} - 2C_{1212})\sin^3\phi\cos\phi \\
&\quad + (C_{1122} - C_{2222} + 2C_{1212})\sin\phi\cos^3\phi \\
C_{xyxy}^{(n)} &= (C_{1111} + C_{2222} - 2C_{1122} - 2C_{1212}) \\
&\quad \cdot \sin^2\phi\cos^2\phi + C_{1212}(\sin^4\phi + \cos^4\phi) \quad (12)
\end{aligned}$$

여기서 ϕ 는 lamina의 직층 각도이다. 그러므로 요소의 축방향 변형(strain)만을 고려하면 요소의 변형에너지는 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
V_0 &= \frac{1}{2} \int_0^l C_{xxxx} I \left[\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \right]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l C_{xxxx} A \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} \right]^2 dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^l F(x) \left[\frac{\partial u_y}{\partial x} \right]^2 dx \quad (13)
\end{aligned}$$

식(13)에서 세번째 항은 요소의 수평투영에서 변화에 기인한 축력(axial force) $F(x)$ 에 대한 일이다. 따라서 요소의 변형에너지는 식(4), (5)로부터 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
V_0 &= \frac{1}{2} (U)^T [K] (U) + \frac{1}{2} F_1 (U)^T [K_{G1}] (U) \\
&\quad + \frac{1}{2} \Delta F (U)^T [K_{G2}] (U) \quad (14)
\end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned}
[K] &= \int_0^l C_{xxxx} I [N_y']^T [N_y'] dx \\
&\quad + \int_0^l C_{xxxx} A [N_x']^T [N_x'] dx \quad (15)
\end{aligned}$$

$$[K_{G1}] = \int_0^l [N_y']^T [N_y'] dx \quad (16)$$

$$[K_{G2}] = \int_0^l \frac{x}{l} [N_y']^T [N_y'] dx \quad (17)$$

계의 총 운동에너지(total kinetic energy)는

$$T = \sum_{i=1}^{n1} \left(\sum_{\alpha=1}^n T_{\alpha} \right)_i \quad (18)$$

이다. 여기서 $n1$ 은 메카니즘에서 링크 번호이고, n 은 링크에서 요소의 번호이다. 마찬가지로 계의 총 변형에너지는 다음과 같다.

$$V = \sum_{i=1}^{N1} \left(\sum_{\alpha=1}^N V_{\alpha} \right)_i \quad (19)$$

여기서 N 은 요소번호로 정의 된다.

일반화된 i 번째 구속방정식은 다음과 같이 쓰여진다.

$$\phi = \phi(q_1, q_2, \dots, q_1, u_1, u_2, \dots, u_{3(N+1)}) \quad (20)$$

기계적 시스템의 운동방정식을 위하여, Lagrange 방정식이 일반화된 관성 좌표에서 사용되었으며, Lagrange 승수를

제외한 Lagrange 방정식이 일반화된 탄성방정식에서 사용되었다. 이 두 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^{nc} \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial q_i} &= Q_i, \\
i &= 1, 2, \dots, 1 \quad (21)
\end{aligned}$$

여기서 nc 는 구속방정식의 수이다.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial u_k} + \frac{\partial V}{\partial u_k} &= Q_k, \\
k &= 1, 2, \dots, 3(N+1) \quad (22)
\end{aligned}$$

식(22)과 (20)을 이용하고, 2차 도함수 구속 방정식도 도입하여 다음과 같은 운동 방정식을 전개할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} [M_{qq}] & \left[\frac{\partial \phi}{\partial q} \right] & [M_{qu}] \\ \left[\frac{\partial \phi}{\partial q} \right]^T & 0 & 0 \\ [M_{qu}]^T & 0 & [M_{uu}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ -\lambda \\ \ddot{u} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ -\lambda \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [g] \\ [f] \\ [h] \end{bmatrix} \quad (24)$$

여기서

$$[KK] = [K] + [KG_1] + [KG_2] \quad (25)$$

3. 모델 설정

지금까지 전개한 방정식을 이용하여 Fig. 3에 보여지는 것과 같은 크랭크 메카니즘의 유연 커넥팅 로드(connecting rod)에 대한 동탄성 특성을 해석하였다. 이 메카니즘은 길이 0.05m의 크랭크와 길이 0.3m의 커넥팅 로드를 가지며, 크랭크는 rigid하다고 가정하여 커넥팅 로드의 진동작용으로 인한 크랭크 운동의 영향은 없다. 수학적 모델을 이용하여 Fig. 4과 같이 길이가 같은 6개의 요소로 나누어진 커넥팅 로드의 운동에 대한 동탄성 해석을 하였다. 복합재료 요소의 강성 행렬은

$$[K] = \frac{C_{xxxx}}{L^3} \begin{bmatrix} AL^2 & 0 & 0 & -AL^2 & 0 & 0 \\ & 12I & 6LI & 0 & -12I & 6LI \\ & & & 4L^2I & 0 & -6LI \\ & & & & AL^2 & 0 \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & \text{symmetrical} & & 12I & -6LI \\ & & & & & & & & & 4L^2I \end{bmatrix}$$

$$[K_{G1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 6/5L & 1/10 & 0 & -6/5L & 1/10 \\ & & & 2L/15 & 0 & -1/10 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & \text{symmetrical} & & 6/5L & -1/10 \\ & & & & & & & & & 2L/15 \end{bmatrix}$$

$$[K_{G2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 3/5L & 1/10 & 0 & -3/5L & 0 \\ & & & L/30 & 0 & -1/10 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & \text{symmetrical} & & 3/5L & 0 \\ & & & & & & & & & L/10 \end{bmatrix}$$

이며, 복합재료에 대한 요소질량행렬은 다음과 같다.

$$[M] = \rho \frac{LA}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ & & & 4L^2 & 0 & 13L \\ & & & & 140 & 0 \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & 156 & -22L \\ & & & & & & & 4L^2 \end{bmatrix}$$

symmetrical

커네팅 로드의 재료로는 합금강(SNCM25)과 알루미늄, graphite-epoxy laminate를 각각 사용하였으며, 각 재료에 대한 물리적 성질과 기계적 성질은 table 1과 같다.

Table 1 Mechanical and physical properties of materials [5]

	Steel (SNCM 25)	Aluminum	Graphite-epoxy laminate
Density (kg/m ³)	7850	2700	1662.13
Young's Modulus (GPa)	206	69	C1111 = 141.45 C2222 = 11.73 C1122 = 3.312 C1212 = 4.14

4. 해석결과 및 고찰

시뮬레이션을 네가지로 나누어 행하였다.

첫번째는 각 커네팅 로드의 길이는 0.3m로 모두 같고, 단면적도 $25 \times 10^{-3} \text{m} \times 1.4 \times 10^{-3} \text{m}$ 로 같다. 크랭크를 350rpm으로 운전할때 강, 알루미늄, 플라이각(ply angle) 0°인 그라파이트-에폭시 복합재료로 각각 제작된 커네팅 로드의 중간점에서의 변형량을 비교하였다.

Fig. 5은 크랭크 각에 따라 커네팅 로드 중간점에서의 힘 변형량의 변화를 보여주고 있다. 복합재료를 사용한 경우, 강이나 알루미늄을 사용한 경우 보다 진폭이 현저히 작음을 알 수 있다. 최대 힘 변형량은 강의 경우 크랭크각 95°에서 $1.1 \times 10^{-3} \text{m}$, 알루미늄의 경우 98°에서 $1.13 \times 10^{-3} \text{m}$, 복합재료의 경우 84°에서 $0.41 \times 10^{-3} \text{m}$ 로 강이나 알루미늄의 최대 힘 변형량은 unidirectional한 그라파이트-에폭시 복합재료에 비해 약 2.8배가 큼을 알 수 있었다.

두번째로는 굽힘강도(flexural rigidity)가 같은 경우 강, 알루미늄, 복합재료 커네팅 로드의 힘 변형량을 비교하였다. 굽힘강도는 $0.8086 \text{ Pa} \cdot \text{m}^2$ 로, 세가지 재료 모두 폭은 0.025m 이고 두께는 강, 알루미늄, 복합재료가 각각 $1.235 \times 10^{-3} \text{m}$, $1.778 \times 10^{-3} \text{m}$, $1.4 \times 10^{-3} \text{m}$ 로 하였으며, 복합재료는 unidirectional laminate로 하였다. Fig. 6는 350rpm 일때의 중간점에서의 변형량을 보여주고 있다. 같은 굽힘강도를 갖는 경우에도 복합재료를 사용한 경우, 강이나 알루미늄을 사용한 경우 보다 동적 진동 특성이 더 우수함을 알 수 있었다. 최대 변형량은 강의 경우 크랭크각 108°에서 $1.35 \times 10^{-3} \text{m}$, 알루미늄의 경우 77°에서 $0.72 \times 10^{-3} \text{m}$, 복합재료인 경우 84°에서 $0.41 \times 10^{-3} \text{m}$ 로, 강의 최대 변형량은 복합재료 보다 약 3.3배가 크고, 알루미늄은 약 1.7배가 크

다. 같은 방법으로 플라이각이 $\pm 45^\circ$ 인 복합재료와 같은 굽힘강도를 가지는 강과 알루미늄을 모델링하여 시뮬레이션하여 보았다. 그 결과는 Fig. 7에 보여지는 것과 같이 플라이각 $\pm 45^\circ$ 인 복합재료도 강이나 알루미늄에 보다 동적인 동특성이 있음을 알 수 있다. 중간점에 최대 변형량은 350rpm의 경우, 강이 $2.61 \times 10^{-3} \text{m}$, 알루미늄이 $1.43 \times 10^{-3} \text{m}$, 그리고 복합재료가 $1.08 \times 10^{-3} \text{m}$ 이었다.

세번째로 크랭크 메카니즘에서 복합재료 커네팅 로드의 동적 특성을 플라이각 효과에 따라 분석하였다. 메카니즘의 동적 조건은 같으며, 또한 링크의 단면적도 $25 \times 10^{-3} \text{m} \times 1.4 \times 10^{-3} \text{m}$ 로 같게 하였다. 플라이각은 0°, $\pm 30^\circ$, $\pm 45^\circ$ 를 택했으며 각 각도에 따른 시뮬레이션 결과는 Fig. 4-4에 나타내었다. 최대 변형량은 플라이각이 0°인 경우 크랭크 각 84°에서 $0.41 \times 10^{-3} \text{m}$, $\pm 30^\circ$ 인 경우 108°에서 $0.62 \times 10^{-3} \text{m}$, $\pm 45^\circ$ 인 경우 97°에서 $1.08 \times 10^{-3} \text{m}$ 이다.

네번째로는 크랭크 메카니즘을 350rpm으로 운전할 때, 복합재료로 제작된 커네팅 로드에서 축방향으로 압축과 인장의 힘을 가하였을 경우에 대한 동특성을 분석하였다. Fig. 8은 축방향의 힘의 변화에 따른 고유진동수의 변화를 보여주고 있다. 고유진동수는 플라이각 0°인 복합재료가 가장 크고, 플라이각이 커질수록 작아지며, 같은 플라이각일 경우, 압축에서 인장으로 갈수록 커짐을 알 수 있다. Fig. 9 부터 Fig. 11은 플라이각을 각각 0°, $\pm 30^\circ$, $\pm 45^\circ$ 로 하였을 때의 중간점에서 커네팅 로드의 변형량을 나타내고 있다. 플라이각이 커질수록 축력(axial force)에 따른 변형량의 차이가 큼을 알 수 있다. 플라이각 0°에서 -5N의 힘을 가한 경우와 5N의 힘을 가한 경우 변형량의 차는 $0.038 \times 10^{-3} \text{m}$ 이데 반해, 플라이각 $\pm 45^\circ$ 인 경우는 $0.34 \times 10^{-3} \text{m}$ 이었다.

5. 결 론

본 연구에서 행한 컴퓨터 시뮬레이션 결과를 요약하면 다음과 같다. 모두 같은 운전 조건 하에서,

1. 링크의 단면적을 같게 한 경우, 변형량은 일반 금속재료(강, 알루미늄)에 비해 복합재료를 사용한 링크가 훨씬 적었다.
2. 링크의 굽힘강도를 같게 한 경우, 같은 단면적인 경우와 마찬가지로 변형량은 일반 금속재료에 비해 복합재료를 사용한 링크가 적었다.
3. 단면적은 같으나 플라이각이 다른, 兩類의 복합재료를 사용할 경우, 예상했던 대로 각이 0°인 링크의 변형량이 가장 적었고 각이 커질수록 변형량은 많았다.
4. 단면적과 플라이각이 같은 경우, 축방향의 힘에 따라 변형량이 다르고, 플라이각이 커짐에 따라 축력에 따른 변형량의 차이가 컸다.

이상의 해석결과로부터 알 수 있는 것은 메카니즘 요소를 복합재료로 사용할 경우 메카니즘을 경량화함으로써 동력소비 감소는 물론 고속운전시 문제가 되는, 관성으로 인한 요소의 변형량에 따른 위치 정확도를 높일 수 있다는 인정이 있다. 또한 복합재료는 하중 방향에 따라 플라이각을 다르게 하므로서 재료를 효과적으로 사용할 수 있다.

REFERENCES

1. Erdman, A.G., Sandor, G.N. and Oakberg, R.G., "A General Method for Kineto-Elastodynamic Analysis of Mechanisms", Journal of Engineering for Industry, Trans. ASME, Vol.94, No.4, Nov. 1972, pp. 1193-1205.
2. Imaw, I., Sandor, G.N. and Kramer, S.N., "Deflection and Stress Analysis in High Speed Planar Mechanisms with Elastic Links", Journal of Engineering for Industry, Trans. ASME, Vol.95, No.2, May 1973, pp. 541-548.
3. Achenbach, J.D. and Zerbe, T.R., "Flexural Vibrations of Laminated Plates", Journal of the Engineering Mechanics Division, Proc. of the ASCE, Vol.97, 1971, pp. 619-628.
4. Hearmon, R.F.S., "An Introduction to Applied Anisotropic Elasticity", Oxford University Press, Oxford, 1961.
5. C.K. Sping and B.S. Thompson, "Material Selection: An Important Parameter in the Design of High-Speed Linkages", Mechanism and Machine Theory, Vol.19, No.475, pp. 389-396, 1984.

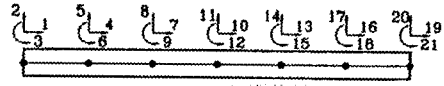


Fig.4 The six finite elements of the connecting rod

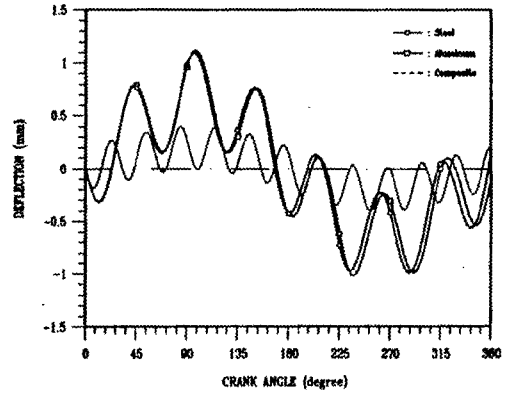


Fig.5 Midpoint deflections of the connecting rods for a same cross-sectional dimensions when crank rotates at 350rpm

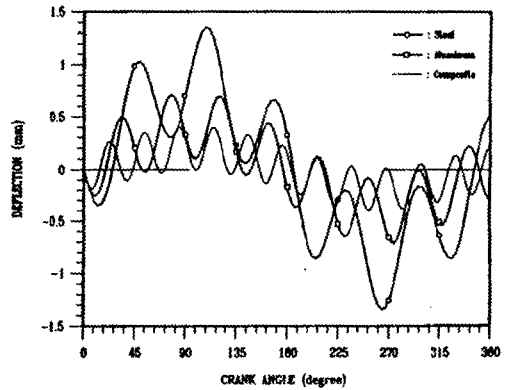


Fig.6 Midpoint deflections of the connecting rods for a constant rigidity when crank rotates at 350rpm

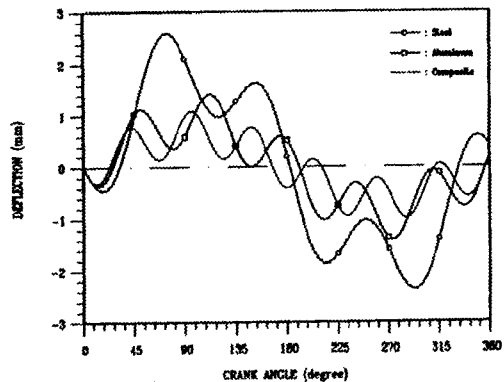


Fig.7 Midpoint deflections of the connecting rods for a constant rigidity when crank rotates at 350rpm

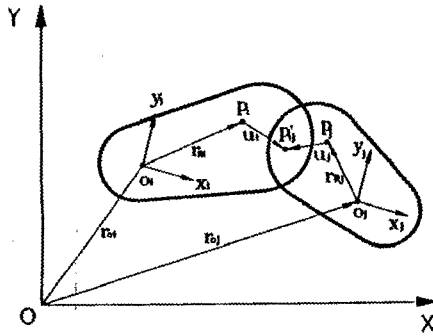


Fig.1 Generalized coordinate of two adjacent links

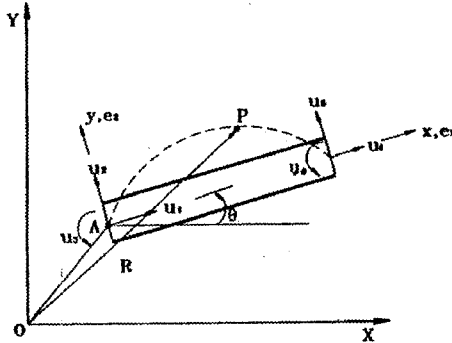


Fig.2 Nodal displacement of each element

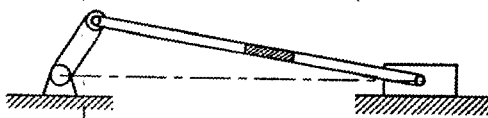


Fig.3 The slider crank mechanism with flexible connecting rod

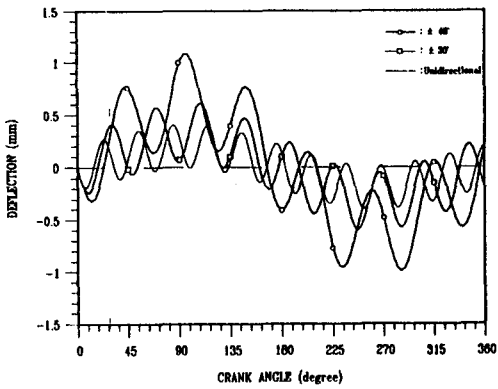


Fig. 8 Midpoint deflections of the connecting rods fabricated in graphite-epoxy laminate with different ply angles at 350rpm

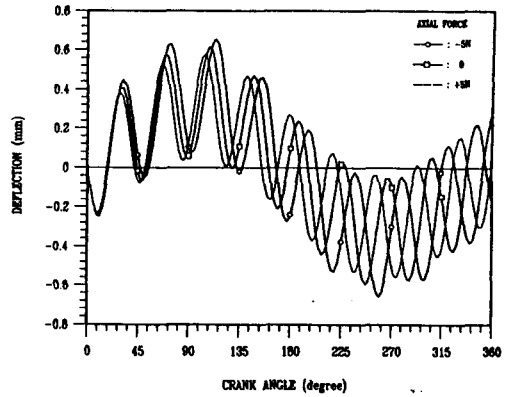


Fig. 11 Midpoint deflections of the connecting rods fabricated in $\pm 30^\circ$ graphite-epoxy laminate with different axial force at 350rpm

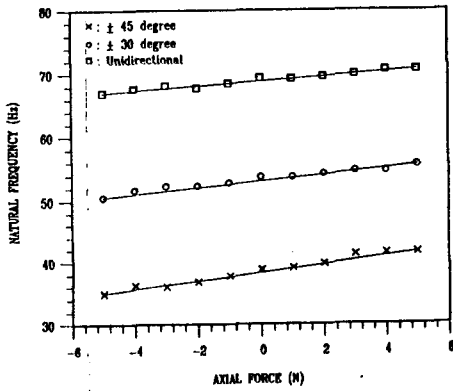


Fig. 9 The relationship between the natural frequency and the axial force

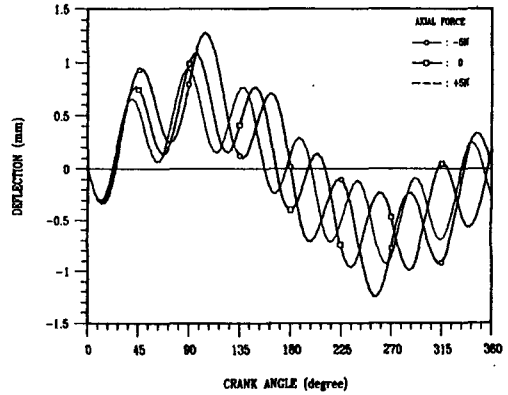


Fig. 12 Midpoint deflections of the connecting rods fabricated in $\pm 45^\circ$ graphite-epoxy laminate with different axial force at 350rpm

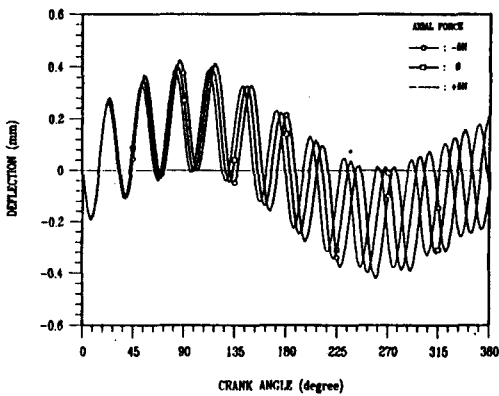


Fig. 10 Midpoint deflections of the connecting rods fabricated in 0° graphite-epoxy laminate with different axial force at 350rpm