

## 적분형 르장드르 함수에 의한 階層要素의 通用性

A Robustness of Hierarchic Element Formulated  
by Integrals of Legendre Polynomial

우 광 성\*  
Woo, Kwang Sung

### ABSTRACT

The purpose of this study is to ascertain the robustness of p-version model with hierarchic intergrals of Legendre shape functions in various applications including plane stress/strain, axisymmetric and shell problems. The most important symptoms of accuracy failure in modern finite elements are spurious mechanisms and a phenomenon known as locking which are exhibited for incompressible materials and irregular shapes which contain aspect ratios(R/t, a/b), tapered ratio(d/b), and skewness. The condition numbers and energy norms are used to estimate numerical errors, convergence characteristics and algorithmic efficiencies for verifying the aforementioned symptoms of accuracy failure. Numerical results from p-version models are compared with those from NASTRAN, SAP90, and Cheung's hybrid elements.

### 1. 연구배경

표준해석방법인 h-version은 이론적으로 또는 수치적으로 많은 연구자들에 의해 발전되어 아주 복잡한 비선형 문제에는 거의 정립되었다고 할 수 있으며 현재까지 20,000편이 넘는 논문과 200편이 넘는 monographs와 conference proceeding<sup>1)</sup>이 발표되어 왔으며 또한 많은 연구용 및 상업용 프로그램이 개발되어 공학해석 및 여러 산업분야에 활발히 이용되고 있음은 주지의 사실이다. 한편, 1980년대 초반부터 이론적 연구가 시작된 p-<sup>2)</sup>, hp-version<sup>3)</sup>은 새로운 개념이며 공학문제에서 Elliptic 형태의 편미분 방정식을 성공적으로 해석할 수 있음을 보여주고 있어<sup>2,3)</sup> 주목을 받고 있다. p-version에 기초한 소프트웨어는 FIESTA, PROBE가 있으며 PROBE는 2-D, 3-D탄성문제, Stationary Heat문제 및 Thermoelasticity문제를 다룰 수 있으며 p는 1차에서 8차까지 제한되어 있다. 또한 ARIS(Aeronautical Research Institute of Sweden)에서 개발된 STRIPE이 있는데 아직까지는 정적 선형탄성문제에 국한되어 많은 연구가 요구되고 있다. 그러나, 유한요소 해석은 하중, 기하형상, 재료성질, 경계조건등의 입력자료에 따라 많은 영향을 받게 되므로 이에 대한 敏感度(sensitivity) 즉, 解의 信賴性(reliability) 및 사용하는 요소의 通用性(robustness)에 관한 연구가 중요한 과제가 된다. 즉, 미국의 경우 NRC(Nuclear Regulatory Commission)에서 유한요소 프로그램의 신뢰성에 대한 검증을 하고 있으며 영국의 경우 NAFEMS(National Agency for Finite Element

Methods and Standards)에서 역시 소프트웨어 사용자 및 연구개발자를 위해 많은 소프트웨어를 가지고 입력자료로 인해 심한 계산오차를 수반하게 되는 경우, 즉 特異條件(singular conditions)을 갖는 표준문제를 해석하여 유한요소 解의 範圍 및 適用性을 제시하고 있다.<sup>4)</sup> 본 논문의 목적은 유한요소 해석시 入力媒介變數(input parameters)의 변화가 해의 正確度와 收斂性에 얼마만한 영향을 주는가를 알아보는데 있으며 주로 Fig 1과 같이 幾何形狀比(a/b비, R/t비), 歪曲度(Skewness), Taper 정도와 Poisson비가 0.5에 가까운 非壓縮性材料(incompressible materials)에 대한 p-version의 선형탄성해석 결과를 NASTRAN, SAP90 및 Hybrid 요소와 비교하며, 수치해석오차는 p의 증가에 따른 條件數(condition number)를 계산하여 매트릭스의 ill-conditioned 또는 well-conditioned 여부를 검증하며 에너지노름(energy norm)을 이용하여 해의 全體의 收斂性(global convergence) 및 相對誤差를 추정하고자 한다.

### 2. 計算誤差(Numerical Error)

유한요소 해석에서 剛度매트릭스 [K]가 ill-conditioned 매트릭스 혹은 well-conditioned 매트릭스인지를 판단하는 기준이 되는 것을 條件數(condition number)라 하며 식(1)과 같이 정의된다.

$$C(K) = \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|} \quad (1)$$

\* 정회원, 전남대학교 토목공학과 조교수

여기서  $\lambda_{\min}$ 은 剛度매트릭스의 가장 작은 固有值 (eigenvalue)를 나타내며  $\lambda_{\max}$ 는 가장 큰 고유치를 말한다.  $C(K)$ 가 클 수록 ill-conditioned 매트릭스가 되어 나쁜 결과를 초래한다. 극단적으로  $\lambda_{\min}$ 이 0 즉,  $C(K)$ 가  $\infty$  이면 特異條件으로 해석이 불가능하게 된다<sup>5)</sup>. 한편,  $\text{LOG } C(K)$ 는 有效자리수의 損失(loss of significant digits)를 나타내고  $S$ 를 保有자리수(No. of digits retained)라 하고  $d$ 를 컴퓨터 有效자리수라 하면 식 (2)와 같은 등식이 성립된다.

$$S \approx d - \text{LOG } C(K) \quad (2)$$

本 연구에서는 2가지 경우의 불규칙 형상에 대한 計算誤差를 산정하였다. 먼저, 平面應力의 경우 ( $\nu=0.3$ ) 요소의 歪曲度에 따른 조건수의 변화가 Fig.2와 같이 왜곡도를  $90^\circ, 130^\circ, 145^\circ, 170^\circ$ 로 변화시킴에 따라 유효자리수의 손실  $\text{LOG } C(K)$ 는 0.9에서 5.5까지 변화하며 歪曲度가 클수록  $\text{LOG } C(K)$ 값이 커짐을 볼 수 있다. 또, 셸요소의 경우 形狀比( $R/t$ )가 16.5, 52.69, 319.96의 세 경우 즉, 두꺼운(thick) 셸, 얇은(thin) 셸, 매우얇은(very thin) 셸의 경우가 셸요소의 중심각이  $90^\circ$ 로 歪曲(distortion)이 없는 경우  $\nu = 0.3125$ 이고  $p=1$ 인 경우 모두  $\text{LOG } C(K)$ 가 2에 근접하고  $p=8$ 인 경우 각각의 경우  $\text{LOG } C(K)$ 가 5, 6, 7에 접근함을 Fig.3으로부터 알 수 있다. Fig.2와 Fig.3으로부터 왜곡이 없는 평면요소나 셸요소는  $p=3$ 부터 유효자리수의 손실이 거의 일정함을 보여 주고 있어서 형상함수의 차수를 고차로 증가시켜도 수치오차에는 영향을 주지 않음을 볼 수 있다.

### 3. 에너지 노름(energy norm)에 의한 誤差推定

유한요소법은 汎函數(functional)의 停留值(stationary value)를 구하는 방법으로 假想일의 원리 또는 最少에너지 법칙에 근거한 이론이므로 해석영역의 全體的 收斂性을 확인하기 위해서 에너지 개념이 사용된다. 본 연구에서는 에너지 노름을 사용하여 유한요소에서의 수렴성과 오차분석을 하였으며 에너지 노름의 상대오차는 식(3)와 같이 정의하였다.

$$\|e_r\|_E = \sqrt{\frac{U_{ex} - U_{FE}}{U_{ex}}} \times 100 \quad (3)$$

여기서,  $U_{ex}$ 는 實際 變形에너지(exact strain energy),  $U_{FE}$ 는 유한요소법에 의한 變形에너지를 나타낸다. 한편, p-version 유한요소에서 오차의 收斂推定(asymptotic estimate)은 식(4)와 같이 정의되고<sup>2, 3)</sup> 이로부터 收斂區間(asymptotic range)을 예측할 수 있다.

$$|U_{ex} - U_p| \leq CN_p^{-\beta} \quad (4)$$

여기서  $N_p$ 는  $U_p$ 에 대응되는 자유도수를 말하고  $p$ 는 형상함수의 차수,  $C$ 는 양의 상수, 그리고  $\beta$ 는 수렴속도를 나타낸다. 한편, h-version 유한요소에서 均等요소분할이 사용되면  $\beta = \min(\alpha_1, p)$ 로 되고 p-version의 경우는  $\beta = 2\alpha_1$ 이 된다. 한편, 유한요소의 해가 수렴구간에 있을 정도의 충분한 크기의 自由度를 갖고 있다면 식(4)에서 不等號 대신 等號(equality)로 대치할 수 있을 것이며 같은 방법으로 수렴구간에 있는  $U_{p-1}, U_{p-2}$ 도 식(5)과 같이 표현할 수 있으며 이에 대응하는 자유도를  $N_{p-1}, N_{p-2}$ 로 정의하였다.

$$U_{ex} - U_{p-1} = CN_{p-1}^{-\beta} \quad (5)$$

$$U_{ex} - U_{p-2} = CN_{p-2}^{-\beta} \quad (6)$$

식(4)에서 식(6)까지 양변에  $\text{LOG}$ 를 취하여 정리하면 식(7)이 된다.

$$\frac{\text{LOG} \frac{U_{ex} - U_p}{U_{ex} - U_{p-1}}}{\text{LOG} \frac{U_{ex} - U_{p-1}}{U_{ex} - U_{p-2}}} = \frac{\text{LOG} \frac{N_{p-1}}{N_p}}{\text{LOG} \frac{N_{p-2}}{N_{p-1}}} = Q \quad (7)$$

2차원 선형탄성 문제의 경우 변형에너지는 식(8)와 같이 표현할 수 있다.

$$U_p = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} [(\lambda + G)(\epsilon_x + \epsilon_y)^2 + G(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + G\gamma_{xy}^2] t dx dy \quad (8)$$

여기서  $\lambda$ 와  $G$ 는 Lamé의 계수값이며 탄성계수  $E$ 와 Poisson비  $\nu$ 에 관계되며 식(9)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (9)$$

여기서  $\nu \rightarrow 1/2$ 에 따라  $\lambda \rightarrow \infty$  그리고,  $G \rightarrow E/3$ 가 됨을 알 수 있고 이 경우는 非壓縮性(incompressibility)라 하며 剛度(stiffness)가 과도하게 추정되는 Poisson Locking이 발생됨을 알 수 있다. 내압을 받는 Thick-walled cylinder 문제에서 Poisson비를  $\nu=0.49, 0.49999$ 의 두 경우를 비교하여 Table1과 Table2에 정리하였다. 이 때 실린더는  $E = 1.0 \times 10^6$  psi, 內徑  $r_i = 3$  in, 外徑  $r_o = 9$  in이고 내압은 1.0 psi이다. 한편, p-version 요소는 1개로 최소갯수가 사용되었다.

Table 1 와 Table 2 로 부터  $\nu=0.49$ 인 경우는  $p=1, 2, 3$  에서 Poisson locking이 발생함을 볼 수 있고  $\nu=0.49999$ 인 경우는  $p=1, 2, \dots, 6$  에서 Poisson locking이 일어나고 있음을 알 수 있다.

Table 1 Computed strain energy and estimated relative error in energy norm ( $\nu = 0.49$  ; 1 element)

P	DOF	$U_{FE}(lb \cdot in/in)$	$\ e_r\ _E$ (%)
1	4	8.51409E-06	90.60
2	10	2.83165E-05	63.55
3	16	4.37454E-05	28.12
4	24	4.70457E-05	9.78
5	34	4.74526E-05	3.17
6	46	4.74955E-05	1.01
7	60	4.74997E-05	0.36
8	76	4.75001E-05	0.21

Table 2 Computed strain energy and estimated relative error in energy norm ( $\nu = 0.4999$ , 1 element)

P	DOF	$U_{FE}(lb \cdot in/in)$	$\ e_r\ _E$ (%)
1	4	1.06003E-08	99.99
2	10	7.15663E-08	99.93
3	16	5.59101E-07	99.41
4	24	4.54767E-06	95.12
5	34	2.40390E-05	70.46
6	46	4.35132E-05	29.74
7	60	4.72838E-05	9.72
8	76	4.76734E-05	3.60

#### 4. 수치해석 결과

##### 4.1 形狀比

MacNeal<sup>4)</sup>의 연구에 의하면 단순지지 장방형 평판에서 평판중앙에 집중하중이 재하된 경우 형상비가 1.0일 때는 요소분할에 의해 QUAD2, QUAD4, QUAD8요소 공히 잘 수렴하고 있으나 형상비가 5.0일 때는 QUAD2요소는 수렴되지 않음을 보이고 QUAD4, QUAD8 요소의 수렴속도도 형상비가 1.0인 경우보다 훨씬 늦음을 볼 수 있다. 본 연구에서는 1개의 요소를 사용한 p-version 모델을 갖고 형상비의 변화에 따른 계산오차의 영향을 固定지되고 등분포 하중을 받는 圓板(circular plate) 해석을 통해 살펴 보았다. 사용된 요소는 軸對稱層層要素(hierarchical axisymmetric element)이며 여기서 a는 원판의 半徑을 뜻하고 t는 원판의 두께를 나타낸다. 먼저, Fig.4 에서 1개의 요소를 고정시키고 P의 차수를 8로 하였을 때 형상비 a/t를 10에서 부터 6000까지 변화시켜 보았다. 형상비가 3000까지는 원판의 최대처짐의 이론값에 대한 상대오차가 2% 미만이고 4000인 경우는 3.7%, 5000인 경우는 6.8%, 6000인 경우는 무려 22.0%가 됨을 Fig.5로 부터 알 수가 있다. Fig.5은 1개 요소의 p-version 모델을 a/t = 1000으로 고정시켰을 때 P-level을 증가시키에 따른 수렴성을 보

여주고 있다. 대략 P=3 부터 수렴이 시작됨을 알 수 있는데 기존의 h-version에서 P=1 또는 P=2로 고정시켰을 경우는 그림에서 보듯이 계산오차에 매우 큰 영향을 보이므로 적어도 p=3인 형상함수로 고정시킨후 요소분할을 하게되면 계산오차의 영향을 적게 받음과 동시에 빠른 수렴속도를 보이게 된다.

##### 4.2 Tapered Ratio와 왜곡도(skewness)

Fig.6에서와 같이 캔틸레버의 자유단에 單位荷重의 인장(extension) 또는 전단(in plane shear)을 받을 때 자유단에서의 변위를 6개의 요소를 사용한 h-version 프로그램 NASTRAN, SAP90의 결과와 p-version결과를 비교하였다. p-version의 경우 사다리꼴 형상과 평행사변형 형상을 나타내기 위해 최소한 3개의 요소를 필요로 한다. p의 차수는 4차로 고정시켰다. 먼저 Fig.6 (b)에서와 같이 왜곡도를  $\theta$ 로 표시하면  $\theta$ 가 135°인 경우 Table 3 에서 인장력문제에서는 비교적 변위에 대한 모든 해석결과가 正解에 대한 近似해석의 比인 無次元변위(normalized displacement)가 1.0에 근접하는 결과를 보인 반면 전단력 문제에서는  $\theta = 135^\circ$ 인 경우 무차원변위가 SAP90의 ASOLID요소는 0.833, QUAD2는 0.014, 그리고 QUAD4는 0.080으로 많은 계산오차를 수반하고 있는 반면에 QUAD8요소는 0.995로 좋은 결과를 보여주고 있다. p-version의 경우  $\theta$ 가 135°일 때 1.0이고  $\theta = 150^\circ, 160^\circ, 170^\circ$ 로 왜곡도를 크게 하였을 경우 1.0, 1.0, 0.999로 왜곡도에 대한 敏感度가 낮음이 입증되었다. 한편, 사다리꼴 형상의 망목에서는 Fig.6 (c)에서 정의된 d/b비의 증가에 따른 캔틸레버 해석이 같은 조건하에 이루어 졌으며 NASTRAN과SAP90의 경우는 d/b비가 1.5일때 자유단에서 無次元변위가 Table 4와 같이 ASOLID 9-절점 요소는 전단력이 작용할 경우 0.978인 반면 QUAD2는 0.016 QUAD4는 0.071이어서 심한 계산오차를 보이고 있으며 QUAD8요소도 0.946으로 精度가 떨어짐을 보인다.

##### 4.3 非壓縮性 材料

탄성매트릭스(elasticity matrix)에서 Lamé의 계수값은 식(9)에서 보듯이 Poisson 비가 0.5에 접근함에 따라 剛度가 무한대가 접근하는 特異性문제(singular problem)가 된다. Cheung<sup>9)</sup>은 새로운 hybrid 요소를 사용하여 이러한 Locking현상을 해석 하였는데 본 연구에서는 Cheung이 제안한 3개의 서로 다른 요소 Q4-L, Q4-C 와 Q4-LL의 해석결과와 p-version 유한요소 해석결과가 비교되었다. Fig.7에는 자유단에 전단력이 작용하는 캔틸레버를 平面變形(plane strain)요소를 사용하여

Table 3 Comparison of normalized displacement with respect to skewness at tip

Load Case Element type	In-plane Shear					Extension				
	90°	135°	150°	160°	170°	90°	135°	150°	160°	170°
SAP90										
* ASOLID	0.989	0.833				0.998	0.998			
NASTRAN										
* QUAD2	0.032	0.014				0.992	0.992			
* QUAD4	0.904	0.080				0.995	0.996			
* QUAD8	0.995	0.987				0.999	0.999			
P-VERSION (3EL, P=4)	1.0	1.0	1.0	1.0	0.999	1.0	1.011	1.012	1.012	1.012

Table 4 Comparison of normalized displacement with respect to tapered ratio d/b at tip

Load Case Element type	In-plane Shear					Extension				
	1.5	2.0	3.0	7.0	40.0	1.5	2.0	3.0	7.0	40.0
SAP90										
* ASOLID	0.978	0.938	0.876	0.802		0.998	0.998	0.998	0.997	
NASTRAN										
* QUAD2	0.016					0.992				
* QUAD4	0.071					0.996				
* QUAD8	0.946					0.999				
P-VERSION (3EL, P=4)	1.0	0.999	0.989	0.927	0.864	1.012	1.012	1.012	1.012	1.012

Poisson비가 0.3에서 부터 0.49999999까지 변함에 따른 A점에서의 수직 無次元변위가 연구되었다.

Table 6 Vertical deflection at A for different P-level when  $\nu = 0.49999999$

Table 5 Normalized Vertical Deflection at A

$\nu$	Q4-L	Q4-C	Q4-LL	P-version 1-EL, p=8
0.3	0.880	0.990	1.002	0.997
0.49	0.275	1.066	1.005	0.984
0.4999	0.041	1.071	1.006	0.983
0.49999	0.039	1.071	1.006	0.983
0.499999	0.038	1.071	1.006	0.983
0.4999999	0.038	1.071	1.006	0.983
0.49999999	0.038	1.071	1.006	0.983

P-level	(1x1) mesh	(2x1) mesh	(2x2) mesh
1	0.038	0.038	0.038
2	0.854	0.958	0.960
3	0.975	0.976	0.979
4	0.979	0.980	0.981
5	0.981	0.982	0.982
6	0.981	0.983	0.984
7	0.983	0.985	0.985
8	0.983	0.986	0.986

한편, Table 6에서는 p-version 모델의 수렴성을  $\nu = 0.49999999$ 인 경우 형상함수의 차수 p의 증가와 동시에 요소를 1개, 2개, 그리고 4개로 요소 분할하였을 때 A점에서의 수직변위가 실제변위와 비교되었다. 즉, 캔틸레버 자유단 A점에서의 수직 변위는 p=3 부터 locking 현상을 피할 수 있음을 보여주고 있다.

### 5. 결론

유한요소해석시 網目設計(mesh design)를 할 때 불규칙한 기하현상, 즉, 형상비(aspect ratio) a/b비와 R/t비 그리고, 평행사변형의 형상과 같이 요소의 찌그러진 정도를 나타내는 왜곡도(skewness) 및 사다리꼴 형상과 같이 윗변과 아랫변의 비(d/b비)를 나타내는 변의 감소비(tapered ratio)에 따라 계산오차에 큰 영향을 줌을

NASTRAN과 SAP90 프로그램의 해석결과로부터 알 수 있었다. 그러나, P-version 해석은 기하형상의 불규칙 정도가 매우 심한 경우 즉, 왜곡도  $\theta$ 가  $170^\circ$ , 변의 감소비가  $d/b$ 가 7.0에도 높은 精度와 收斂성을 보이고 있다. 非압축성 재료의 경우 Cheung의 Hybrid 요소와 비교되어 Poisson Locking의 영향에 대한 통용성이 검토되었는데 Cheung이 제안한  $Q_4$ -LL 요소와 계층 요소에 근거한 P-version 모델이  $\nu=0.49999999$ 에도 계산 오차에 비교적 영향을 받지 않음을 알 수 있었다.

### 6. 참고문헌

1. A.K.Noor, "Book and monographs on finite element technology", Finite Elements in Analysis and Design 1 101-111, 1985
2. I.Babuska, B.A.Szabo and I.N. Katz, "The p-version of the finite element method", SIAM J. Number. Anal. 18 512-545, 1982
3. I.Babuska and B.Q.Guo, "The hp-version of the Finite Element Method for problems with Nonhomogeneous Essential Boundary Condition", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 74 1-28, 1989
4. R.H.MacNeal and R.L.Harder, "A proposed standard set of problems to test finite element accuracy", Finite Elements in Analysis and Design 1 3-20, 1985
5. C.Meyer, "Finite Element Idealization", ASCE, 1987
6. R.D.Cook, "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", John Wiley & Sons, 3rd Edition, 1989
7. Y.K.Cheung and C.Wanji, "Hybrid Element Method for Incompressible and Nearly Incompressible Materials" Int. J. Solids Structures, Vol.25, No. 5, pp.483-495, 1989

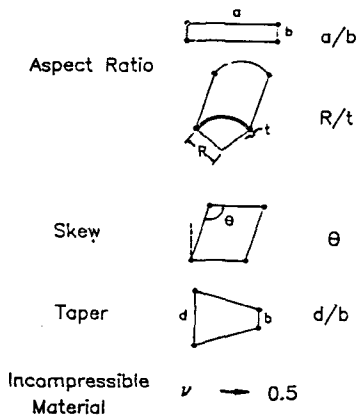


Fig. 1 Types of geometric distortion

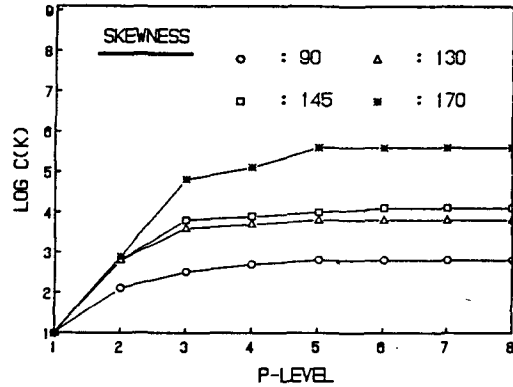


Fig. 2 Condition number of R/t ratio with respect to p-level

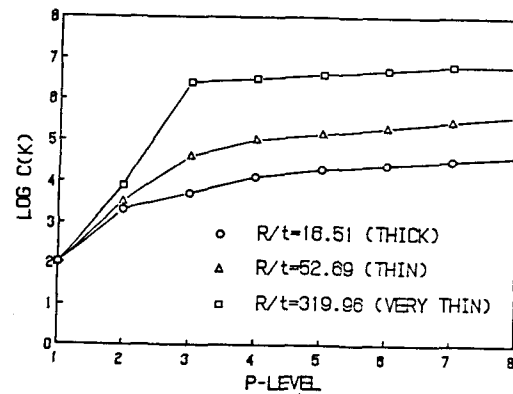


Fig. 3 Condition number of R/t ratio with respect to p-level

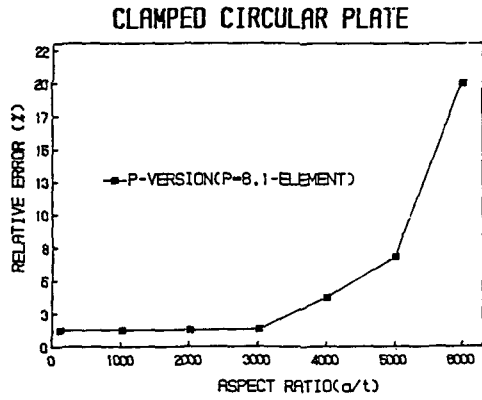


Fig. 4 Robustness of aspect ratio  $a/t$  for clamped circular plate

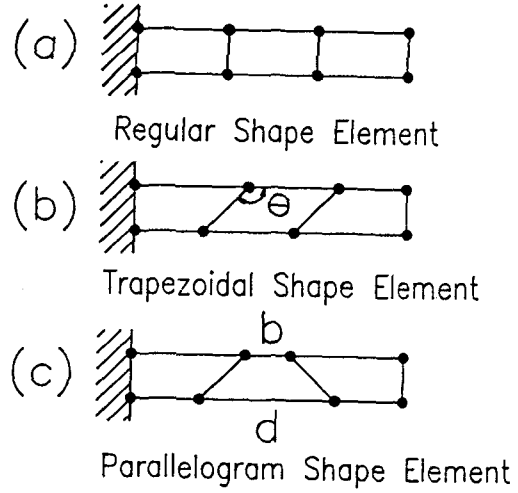


Fig. 6 Straight Cantilever Beam ( $E=1.0 \times 10^7$  psi, Length=6.0 in width=0.2 in  $\nu=0.3$ , loading: unit force at free end)

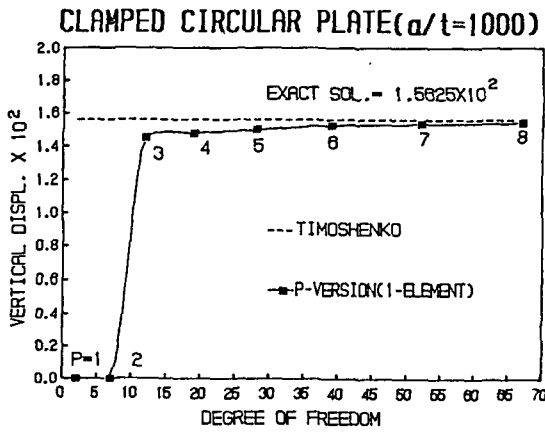


Fig. 5 P-convergence of maximum deflection when  $a/t=1000$

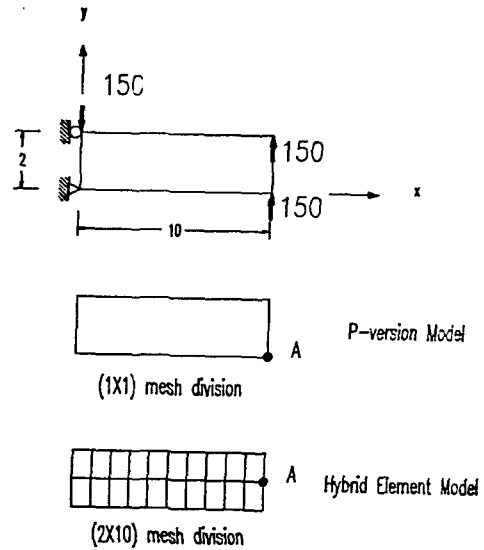


Fig. 7 Cantilever beam under shear load at free end