

판 구조물의 감도해석 및 신뢰성해석

Sensitivity and Reliability Analysis of Plate

김지호*, 양영순**

Kim Ji Ho, Yang Young Soon

Abstract

For the purpose of developing the method for efficiently calculating the design sensitivity and the reliability for the complicated structure such as ship structure, the probabilistic finite element method is introduced to formulate the deterministic design sensitivity analysis method and incorporated with the second moment reliability methods such as MVFOSM, AFOSM and SORM. Also, the probabilistic design sensitivity analysis needed in the reliability-based design is performed.

The reliability analysis is carried out for the initial yielding failure, in which the derivative derived in the deterministic design sensitivity is used. The present PFEM-based reliability method shows good agreement with Monte Carlo method in terms with the variance of response and the associated probability of failure even at the first or first few iteration steps.

The probabilistic design sensitivity analysis evaluates explicitly the contribution of each random variable to probability of failure. Further, the reliability index variation can be easily predicted by the variation of the mean and the variance of the random variables.

1. 서론

구조물의 최적설계를 수행하기 위해서는 각 반복계산 단계마다 강성행렬을 작성하고 연립 방정식의 해를 구하는 과정을 되풀이하여야 하는데, 이는 매우 비효율적일 뿐만 아니라 순수한 구조해석만으로는 설계변수를 어떻게 변화시키는 것이 설계를 가장 좋은 방향으로 향상시킬 수 있는지에 대한 정보를 전혀 얻을 수 없다. 따라서 설계변수의 변화에 따른 목적함수, 혹은 구속조건함수의 변화정도를 알기위하여는 감도해석을 수행해야 한다. 구조응답이 설계변수들의 함수로 명확하게 표현되는 경우는 감도를 쉽게 계산할 수 있지만, 실제적으로 이것은 거의 불가능하며, 구조응답은 설계변수의 매우 복잡한 음함수 형태(implicit form)로 주어지는 것이 일반적이다. 이 경우 감도를 구할 수 있는 유용한 방법중의 하나가 알고리즘에 의해 단계적 계산을 수행하는 확률 유한요소법이다. 본 논문에서는 먼저 복잡한 구조물에서도 구조응답의 1차 혹은 2차 미분계수를 효율적으로 구할 수 있는 확률 유한요소법 알고리즘을 사용하여 선형 탄성해석의 가정하에서 확정론적 감도해석 방법을 정식화하고자 한다[1,2].

또한 2차 모우먼트방법에 의한 신뢰성해석을 수행할 경우, 한계상태 방정식이 음함수 형태로 주어지는 복잡한 구조물에 대하여는 한계상태 방정식의 확률변수에 대한 1차 혹은 2차 미분계수를 구하는 것이 어려워, 기존에는 Monte Carlo 방법[3]이나 회귀분석법[4]등을 사용하여

신뢰성해석을 수행하고 있지만, 이러한 방법들은 구조해석을 여러번 반복해야하는 문제점이 있으므로, 본 논문에서는 앞에서 구한 확정론적 감도해석 결과를 이용하여 기존의 신뢰성해석 방법의 하나인 2차 모우먼트 방법(MVFOSM, AFOSM, SORM)을 그대로 사용할 수 있는 보다 효율적인 신뢰성해석 방법을 제시하고자 한다[5].

설계조건은 크게 확정론적인 설계와 신뢰성해석에 기초한 확률론적 설계로 나눌 수 있으므로, 본 논문에서는 먼저 확률 유한요소법 알고리즘에 의해 확정론적 감도해석(deterministic sensitivity analysis) 방법을 개발하고, 이를 바탕으로 신뢰성해석을 수행한 뒤, MVFOSM 에 기초한 확률론적 감도해석 (probabilistic sensitivity analysis) 방법을 개발하였다[6].

작은 예로서는 간단한 박판 구조물에 대해 평면응력 문제와 판굽힘 문제를 중심으로 하여 확정론적 및 확률론적 감도해석 결과의 유용성을 살펴보고, 신뢰성 해석 결과의 정확성을 검증하기 위하여 Monte Carlo 방법에 의한 해석도 병행하였다.

2. 확정론적 감도해석

감도해석 방법으로서 가장 일반적이라 할 수 있는 수치미분 방법은 설계변수가 많은 복잡한 구조물인 경우에는 구조해석을 여러번 반복해야 하는등의 문제점이 있으므로 해석적으로 감도를 직접 구할 수 있는 방법의 개발이 필요하다. 설계변수의 갯수에 관계없이 구조응답의 1차 혹은 2차 미분계수를 1회의 구조해석으로 직접 구할 수 있는 확률 유한요소법은 감도해석을 하는데 있어서 매우 유용한 방법이다.

선형 탄성 유한요소해석에서 X 를 설계변수, k 를

* 서울대학교 조선공학과 연수연구원

** 정희원, 서울대학교 조선공학과 부교수

부재강성행렬, u 를 부재단변위라 하면, 응력항은 $\sigma(X) = k(X)u(X)$ 이므로, 응력항의 설계 변수에 대한 1차 미분은

$$\frac{\partial \sigma}{\partial X} = \frac{\partial k}{\partial X}u + k \frac{\partial u}{\partial X} \quad (1)$$

와 같다. 여기서 k 는 설계변수의 함수로 명확히 표현되어 있으므로 설계변수에 대한 1차 미분계수를 바로 구할 수 있지만 $\partial u/\partial X$ 는 현단계에서 직접 계산할 수 없으므로, 먼저 전체좌표계에서의 절점변위에 대한 1차 미분계수를 구한 다음 좌표변환을 통하여 구하여야 한다. 선형 탄성 유한요소 해석에서의 절점 변위는 $U = K^{-1}P$ 로서 구해지므로 변위의 설계변수에 대한 1차 미분은 다음식으로 구할 수 있다.

$$\frac{\partial U}{\partial X} = K^{-1} \left(-\frac{\partial K}{\partial X}U + \frac{\partial P}{\partial X} \right) \quad (2)$$

여기서 P 는 외부 절점하중 벡터이다. 한편 응력항의 설계변수에 대한 2차 미분은

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial X_i \partial X_j} &= \frac{\partial^2 k}{\partial X_i \partial X_j}u + \frac{\partial k}{\partial X_j} \frac{\partial u}{\partial X_i} \\ &+ \frac{\partial k}{\partial X_i} \frac{\partial u}{\partial X_j} + k \frac{\partial^2 u}{\partial X_i \partial X_j} \end{aligned} \quad (3)$$

와 같고 변위의 2차 미분계수는 전체좌표계에서의 절점변위에 대한 2차 미분계수를 구한 다음 좌표변환을 통하여 구한다. 변위의 2차 미분은 식(2)로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial X_i \partial X_j} &= K^{-1} \frac{\partial K}{\partial X_i} K^{-1} \left(-\frac{\partial K}{\partial X_j}U + \frac{\partial P}{\partial X_j} \right) \\ &+ K^{-1} \left(\frac{\partial^2 K}{\partial X_i \partial X_j}U + \frac{\partial K}{\partial X_j} \frac{\partial U}{\partial X_i} - \frac{\partial^2 P}{\partial X_i \partial X_j} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

이러한 감도해석 방법은 X 를 확률변수로 보는 경우에도 계산이 가능하므로, 2차 모우먼트 방법에 의한 신뢰성 해석을 수행하는데 필요한 상태함수의 확률변수에 대한 1차 혹은 2차 미분계수를 구하는데 직접 사용될 수 있다.

3. 구조 신뢰성 해석

신뢰성 해석을 수행하기 위해서는 먼저 상태함수를 정의하여야 한다. 상태함수는 설계자가 정의하기에 따라 다르지만 본 논문에서는 serviceability 한계상태로서 탄성한계 내에서 구조물의 임의의 절점응력, 또는 부재 응력이 항복응력(또는 절점변위가 허용변위)를 넘어서는 경우를 한계상태로 정의하였다.

Serviceability 관점에서 한계상태 방정식(혹은 상태함수 $G(X)$)은 응력 σ 의 함수로서 다음과 같이 표현되는 것이 일반적이다. 즉 임의의 절점에서

$$Z = G(X) = \sigma_y - \sigma(X) = 0 \quad (5)$$

여기서 σ_y 는 항복응력을 의미하며 확률변수로서

취급된다. 2차 모우먼트 방법은 상태함수를 확률변수에 대해 1차, 혹은 2차 근사시키는 것을 기본으로 하고 있으므로, 식(5)를 확률변수 σ_y 및 X 의 임의의 점 σ_y^* 및 X^* 에 대해 2차항까지 Taylor 전개하여 근사시키면

$$\begin{aligned} g(X) &= \sigma_y - \sigma(X^*) - \sum_i \frac{\partial \sigma(X^*)}{\partial X_i} (X_i - X_i^*) \\ &- \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 \sigma(X^*)}{\partial X_i \partial X_j} (X_i - X_i^*)(X_j - X_j^*) \end{aligned} \quad (6)$$

결국 여기에서는 응력의 1차 및 2차 미분계수가 필요한데, 2장의 감도해석 과정을 바로 사용할 수 있다.

MVFOSM(mean value first order second moment method)을 사용하여 신뢰성 해석을 수행하는 경우는 확률변수의 평균치에서 응력의 1차 미분계수를 구하며, AFOSM(advanced first order second moment method)에서는 원점에서 가장 가까운 파괴면상의 한점(most probable failure point ; MPFP)을 찾기 위한 반복계산 과정이 필요한데, 각 반복계산점에서 응력의 1차 미분계수를 계산해야 한다. 본 논문에서는 MPFP를 찾는 기존의 여러가지 AFOSM 기법 중에서 좌표변환을 하지 않고 원래의 좌표계에서 바로 반복계산을 수행하는 Parkinson 방법[7]을 사용하였다. 대부분의 AFOSM 방법이 확률변수들의 서로 다른 분산의 크기를 고려하기 위하여 먼저 모든 확률변수들을 표준 정규분포 $N(0,1)$ 을 갖는 새로운 변수로 좌표변환을 하고 계산을 수행하지만, 한계상태방정식이 확률변수의 음함수 형태로 주어지는 경우는 상태함수를 변환된 좌표로 표현하는데 어려움이 있으므로 이러한 경우에는 좌표변환을 하지 않고 반복계산의 과정에서 확률변수들의 분산특성을 고려하는 Parkinson 방법을 사용하는 것이 바람직하다. 한편, SORM에 의한 신뢰성 해석을 위하여는 MPFP에서의 상태함수의 2차 미분계수가 필요한데 (3,4)식으로부터 구할 수 있다. 본 논문에서는 기존의 여러가지 SORM 기법중 Tvedt가 제안한 알고리즘[8]을 사용하였다.

4. 확률론적 감도 해석

구속조건이 파괴확률로 주어지는 신뢰성 구조설계를 수행하는 경우는 설계변수(혹은 확률변수)에 대한 파괴확률, 또는 신뢰성지수의 감도가 필요하다. 이를 위하여 먼저 식(6)과 같이 선형화된 한계상태 방정식에 대해 MVFOSM을 사용하여 신뢰성지수를 구하면 다음과 같다.

$$\bar{Z} = (\bar{\sigma}_y - \bar{\sigma}) \quad (7)$$

$$Var(Z) = S_Z^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{G}}{\partial X_i} \frac{\partial \bar{G}}{\partial X_j} cov(X_i, X_j) \quad (8)$$

$$\beta = \frac{\bar{Z}}{S_Z} \quad (9)$$

여기서 \bar{Z} 는 $g(X)$ 의 평균, $Var(Z) = S_Z^2$ 는 분산을 의미하며, $cov(X_i, X_j)$ 는 확률변수 X_i 와 X_j 의 공분산(covariance)이다.

확률변수의 평균치에 대한 신뢰성지수 β 의 감도(β_X)는 식(9)로부터

$$\beta_{X_q} = \frac{\partial \beta}{\partial \bar{X}_q} \Big|_{X=X} = \left(\frac{1}{S_Z} \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{X}_q} - \frac{\bar{Z}}{S_Z^2} \frac{\partial S_Z}{\partial \bar{X}_q} \right) \Big|_{X=X} \quad (10)$$

와 같이 구할 수 있다.

한편 분산계수의 변화에 따른 파괴확률의 변화를 파악하기 위해서는, 설계 초기에 분산계수가 주어져 있는 경우(즉, $V_X = \bar{V}_X$), 신뢰성지수의 분산계수에 대한 감도(β_V)가 필요하며 식(10)을 분산계수 V_X 에 대해 직접 미분하여 구할 수 있다. 즉,

$$\beta_{V_q} = \frac{\partial \beta}{\partial V_q} \Big|_{V_X = \bar{V}_X} = - \frac{\bar{Z}}{S_Z^2} \frac{\partial S_Z}{\partial V_q} \Big|_{V_X = \bar{V}_X} \quad (11)$$

식(10,11)에서는 상태함수의 1차 및 2차 미분계수가 필요하며 2장에서 구한 확장론적 감도해석의 결과를 바로 사용할 수 있다.

한편 각 확률변수들을 표준 정규분포를 가지는 새로운 변수 Y 로 좌표변환을 하면 Z 의 분산은 다음과 같이 변형된다.

$$S_Z^2 = \sum_i \left(\frac{\partial \bar{G}}{\partial Y_i} \right)^2 = \sum_i (\alpha_{Y_i})^2 \quad (12)$$

즉, $\alpha_{Y_i} (= \partial \bar{G} / \partial Y_i)$ 는 $\partial \bar{G} / \partial X$ 에 변수들의 분산특성을 고려하여 계산한 값이며, 또 Y 는 모두 $N(0,1)$ 을 가지는 표준화된 변수이므로 α_{Y_i} 의 값이 큰 변수가 파괴확률에 미치는 영향이 크다고 할 수 있으므로 확률변수의 평균과 표준편차가 주어져 있는 경우에 대하여 확률변수들의 상대적 중요도를 판단할 수 있다. 또

$$\alpha_{Y_q}^2 (\%) = \frac{(\alpha_{Y_q})^2}{\text{Var}(Z)} \times 100 \quad (13)$$

으로 정의하면 $\alpha_{Y_q}^2 (\%)$ 는 Z 의 분산에서 각 확률변수들이 차지하는 정도의 백분율을 의미하게 된다.

5. 박판 구조물의 적용예

여기에서는 박판 구조물을 대상으로 하여 평면응력 문제와 판굽힘 문제를 중심으로 감도해석 방법과 신뢰성해석 방법을 설명한다. 유한요소로서는 평면응력 문제에서 삼각형 요소를, 판굽힘 문제에서 사각형 요소를 사용하였고 임의의 요소에 걸리는 최대 응력은 다음식으로 주어지는 등가응력 σ_e 를 사용하였다.

$$\sigma_e(X) = (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + \tau_{xy}^2)^{1/2} \quad (14)$$

여기서 응력성분 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 도 설계변수 혹은 확률변수의 함수이다. 등가응력의 설계변수에 대한 1차 미분은

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_e}{\partial X_i} = D_{X_i}(\bar{\sigma}_e) \quad (15)$$

이며 여기서,

$$D_{X_i}(\cdot) = \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial X_i} \frac{\partial}{\partial \sigma_x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial X_i} \frac{\partial}{\partial \sigma_y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial X_i} \frac{\partial}{\partial \tau_{xy}} \quad (16)$$

이다. 또한 등가응력의 2차 미분은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_e}{\partial X_i \partial X_j} &= D_{X_i} \left(\frac{\partial \sigma_e}{\partial \sigma_x} \right) \cdot \frac{\partial \sigma_x}{\partial X_j} + \frac{\partial \sigma_e}{\partial \sigma_x} \cdot \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial X_i \partial X_j} \\ &+ D_{X_i} \left(\frac{\partial \sigma_e}{\partial \sigma_y} \right) \cdot \frac{\partial \sigma_y}{\partial X_j} + \frac{\partial \sigma_e}{\partial \sigma_y} \cdot \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial X_i \partial X_j} \\ &+ D_{X_i} \left(\frac{\partial \sigma_e}{\partial \tau_{xy}} \right) \cdot \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial X_j} + \frac{\partial \sigma_e}{\partial \tau_{xy}} \cdot \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial X_i \partial X_j} \quad (17) \end{aligned}$$

식(16,17)에서 필요한 응력성분의 1차 및 2차 미분은 식(1,3)으로부터 구할 수 있다.

신뢰성해석을 위한 상태함수는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} G(X) &= \sigma_y - \sigma_e(X) \\ &= \sigma_y - (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + \tau_{xy}^2)^{1/2} \quad (18) \end{aligned}$$

2차 모우먼트 방법에 의해 신뢰성해석을 수행하기 위해서는 확률변수에 대한 상태함수의 1차 혹은 2차 미분계수가 필요한데, 식(15)을 보면 이 값들은 결국 등가응력의 1차 혹은 2차 미분계수로부터 계산되므로 식(15,17)의 설계변수를 확률변수로 확장함으로써 얻을 수 있다.

수치해석 예로서 평면응력 문제에 대해서는 Fig.1 (a)과 같이 네개의 삼각형 요소로 분할된 판 구조물을, 판굽힘 문제에 대하여는 Fig.1 (b)와 같이 네개의 사각형 요소로 분할된 판 구조물을 택하였다. 확률변수로는 외부하중(P)과 항복응력(σ_y), 부재두께, 탄성계수(E), Poisson's ratio(ν)등을 택하였다. 각 경우에 대한 입력데이터는 Table 1에 주어져 있으며 평면응력 문제는 17개, 판굽힘 문제에는 16개의 확률변수로 구성되어 있다.

Table 2는 각 경우에 있어서 응력이 큰 두 부재(혹은 절점)의 등가응력에 대한 확률변수의 확장론적 감도해석 결과이다. 확률 유한요소법을 사용하면 모든 확률변수에 대한 모든 절점응력의 1차 감도를 1회의 구조해석으로 구할 수 있다. 또한 이 값들은 신뢰성해석을 수행하는데 필요한 상태함수의 모든 확률변수에 대한 1차 미분계수를 구하는데 직접 사용될 수 있다.

Table 3는 이러한 1차 미분계수를 바탕으로 구조 응답의 불확실성을 계산한 결과인데, 비교목적으로 구한 Monte Carlo 방법의 결과와 잘 일치하고 있다. Table 4는 MVFOSM, AFOSM 및 SORM 등의 2차 모우먼트방법에 의해 모든 절점에서의 등가응력이 항복응력을 넘어설 확률(또는 절점변위가 허용변위를 넘어설 확률)을 구한 결과이며, 여기에서도 Monte Carlo 방법의 결과와 잘 일치하고 있다.

Table 5는 감도해석 결과와 신뢰성해석 결과를 바탕으로 식(10,11,12)에 의해 확률변수의 평균 혹은 분산계수에 대한 신뢰성지수의 감도를 구한 결과인데, α_Y^2 의 결과를 보면 두 경우 모두 부재두께 및 하중의 영향이 큼을 알 수 있다.

Table 6는 이러한 감도해석 결과를 바탕으로 확률변수의 평균치 혹은 분산을 변화시켰을 때, 파괴확률이 어떻게 변화하는지를 실제로 계산해 본 결과인데, 감도해석에 의한 예측치는 선형예측으로서 다음식에 의해 구한다.

$$\beta^e = \beta^o + \beta_x \cdot \Delta X \text{ (or } \beta^o + \beta_y \cdot \Delta Y) \quad (19)$$

평면응력 문제에서의 case 2 는 판두께의 평균을 20% 증가시킨 1.2cm로, case 3 는 판두께와 하중 $P_{1,3}$ 의 C.O.V.을 각각 반으로 줄인 5%,20%로 하고 그 외의 데이터는 Table 1 에 따르는 것으로 하였다. 두 경우 모두 예측치와 재해석 결과가 잘 일치하고 있는데, case 2 의 결과를 보면 판두께의 평균을 20% 증가시킴으로서 최대 파괴확률이 10배 정도 감소되었다. 그리고 case 3 에서는 최대응력은 2번부재에서 걸리지만(분산의 변화는 응력의 평균치와 무관하다.) 파괴확률은 3번부재가 가장 크게 나타났는데, 이것은 Table 5의 β_y 에서 알 수 있는 바와 같이, 2번부재의 파괴확률이 부재두께와 하중 P_1 의 분산에 매우 민감하게 변화하기 때문에 이 변수들의 분산을 줄임에 따라 2번부재의 파괴확률이 크게 감소하여 3번부재보다 더 안전해진 것이다.

판굽힘 문제에서의 case 2 는 판두께의 평균을 10% 증가시킨 2.2cm로, case 3 는 판두께의 C.O.V.을 반으로 줄인 5%로 하고 그 외의 데이터는 Table 1 에 따르는 것으로 하였다. 여기에서도 두 경우 모두 예측치와 재해석 결과가 잘 일치하고 있다. case 2 의 결과를 보면 판두께의 평균을 10% 증가시킴으로서 최대 파괴확률이 원래의 거의 1/5 정도로 감소되었으며, case 3 에서는 약 1/3 정도로 감소되었다.

6. 결 론

확률 유한요소법 알고리즘을 사용하여 확정론적 감도해석 방법을 검토하고, 이를 바탕으로 신뢰성해석 및 확률론적 감도해석 방법을 정식화하여 박판 구조물의 평면응력 문제 및 판굽힘 문제에 적용하여 수치계산을 수행한 결과로부터 다음과 같은 결론을 도출하였다.

- (1) 확률 유한요소법을 사용함으로써 구조응답이 설계변수의 음함수적으로(implicitly) 표현되는 경우에 대하여도 확정론적 감도해석을 효율적으로 수행할 수 있다.
- (2) 신뢰성해석에 필요한 상태함수의 확률변수에 대한 1차 혹은 2차 미분계수를 확정론적 감도해석 결과로부터 바로 구함으로써, 한계상태 방정식이

확률변수의 음함수 형태로 표현되는 복잡한 구조물에 대하여도 2차 모우먼트 방법에 의한 신뢰성해석을 큰 어려움 없이 수행할 수 있다.

- (3) 확정론적 감도해석 방법과 신뢰성해석 방법을 응용하여 구한 확률론적 감도해석 결과로부터, 신뢰성설계시, 확률변수들의 상대적 중요도를 파악할 수 있을 뿐만 아니라, 설계변수(혹은 확률변수)의 평균 혹은 분산계수의 변화에 따른 신뢰성지수의 변화량을 미리 예측할 수도 있다.
- (4) 앞으로 더 연구되어야 할 분야로서는, 재료 및 기하학적 비선형성을 고려한 확률론적 비선형 구조해석 및 최적 신뢰성설계등을 들 수 있다.

참 고 문 헌

- [1] Nagagiri, S., Hisada, T., "확률 유한요소법 입문", 배풍관.
- [2] Der Kiureghian, A. and Ke, J.B., "Finite-Element Based Reliability Analysis of Frame Structures.", ICOSSAR '85, Kobe, Japan.
- [3] 김수현, "Monte Carlo 법을 이용한 파괴확률 계산법 연구", 서울대학교 공학석사 학위논문, 1989.
- [4] Wu, Y.T., "Efficient Methods for Mechanical and Structural Reliability Analysis and Design", Ph.D. Thesis, University of Arizona, Tucson, Arizona, 1984.
- [5] 양영순, 김지호, "평면 FRAME 구조물의 확률 유한요소해석", 한국전산구조공학회, 제 2 권, 제 4 호, pp.89-98, 1989.12.
- [6] 김지호, "확률 유한요소법에 의한 구조 신뢰성해석", 서울대학교 공학박사 학위논문, 1991.
- [7] Parkinson, D.B., "Computer Solution for the Reliability Index", Eng. Struct., Vol.2, pp. 57-62, 1980.
- [8] Tvedt, L., "Two Second-Order Approximations to the Failure Probability", Veritas Report RDIV/20-004-83, Det norske Veritas, Oslo, Norway, 1983.

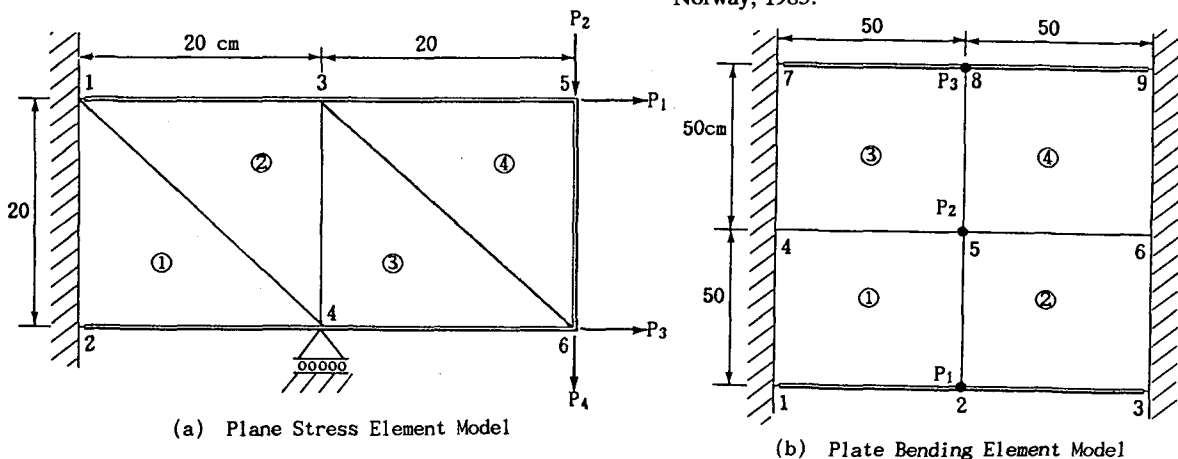


Fig.1 Two Models for Numerical Analysis

Table 1 Statistics of Random Variables
(a) for the Plane Stress Element

X	σ_a	σ_y	$P_{1,3}$	$P_{2,4}$	E	t	ν
X	20	24	50kN	-80	2.1e4	1cm	0.3
V(%)	-	5	40	20	10	10	10

(b) for the Plate Bending Element

σ_a	σ_y	W_a	$P_{1,3}$	P_2	E	t	ν
18	24	0.5cm	-25	-50	2.1e4	2	0.3
-	10	5	10	20	5	10	5

normal distribution, V : C.O.V., σ_a : allowable stress, σ_y : yield stress
t : thickness, ν : Poisson's ratio, W_a : allowable lateral displacement
unit of σ_a , σ_y & E : kN/cm²

Table 2 Results of Deterministic Sensitivity Analysis

X	Plane Stress		Plate Bending	
	σ_2	σ_3	σ_1	σ_2
P_1	0.822E-01	0.248E-01	-0.668E+00	-0.666E+00
P_2	-0.972E-01	-0.109E+00	-0.449E-01	-0.457E-01
P_3	0.367E-02	-0.871E-02	0.466E-01	0.474E-01
P_4	-0.955E-01	-0.123E+00	-	-
E_1	-0.156E-04	-0.972E-05	0.181E-03	-0.434E-04
E_2	0.113E-03	-0.935E-04	-0.200E-03	0.239E-04
E_3	-0.120E-03	0.296E-03	0.396E-04	0.646E-04
E_4	0.226E-04	-0.193E-03	-0.204E-04	-0.451E-04
t_1	-0.328E+03	-0.204E+03	-0.121E+05	-0.191E+05
t_2	-0.173E+05	-0.196E+04	-0.630E+04	0.753E+03
t_3	-0.251E+04	-0.132E+05	0.125E+04	0.204E+04
t_4	0.475E+03	-0.405E+04	-0.643E+03	-0.142E+04
ν_1	-0.216E+03	-0.135E+03	0.492E+03	-0.678E+04
ν_2	-0.559E+04	0.344E+04	-0.124E+04	0.159E+04
ν_3	0.488E+03	-0.553E+04	0.114E+04	0.150E+04
ν_4	-0.688E+02	0.586E+03	0.312E+03	-0.207E+02

Table 3 Mean and Variance of the Responses

(a) for the Plane Stress Element Model

	U_5	V_5	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	
mean	P	0.0266	-0.0514	5.015	19.708	19.412	15.553
	M	0.0270	-0.0522	5.058	19.898	19.579	15.793
V(%)	P	18.12	16.73	39.46	16.59	16.12	16.71
	M	18.38	17.12	39.61	17.17	16.37	16.88

(b) for the Plate Bending Element Model

	W_2	W_5	σ_1	σ_2	σ_4	σ_5	
mean	P	-0.3604	-0.3229	17.769	17.754	15.899	15.913
	M	-0.3781	-0.3321	18.169	18.071	16.192	16.245
V(%)	P	24.08	22.92	18.31	23.84	21.48	23.91
	M	25.68	23.62	18.98	24.63	21.90	23.99

P : present method(PFEM), M : Monte Carlo Simulation (simulation number : 3,000)
unit : U, V & W : cm, σ_i (equivalent stress of element(or node) ①) : kN/cm²

Table 4 Results of Component Reliability Analysis by Each Method

(a) for the Plane Stress Element Model

	$Z\sigma_1$	$Z\sigma_2$	$Z\sigma_3$	$Z\sigma_4$	
MV	β	8.203	1.233	1.369	2.951
	P_f	1.175e-16	1.089e-1	8.555e-2	1.583e-3
AF	β	6.527	1.167	1.301	2.617
	P_f	3.366e-11	1.216e-1	9.664e-2	4.441e-3
SO	P_f	3.306e-11	1.171e-1	9.655e-2	4.069e-3
	P_f	-	1.270e-1	1.027e-1	5.375e-3

(b) for the Plate Bending Element Model

	Zw_2	Zw_5	$Z\sigma_1$	$Z\sigma_2$	$Z\sigma_4$	$Z\sigma_5$	
MV	β	1.545	2.268	1.541	1.284	1.941	1.798
	P_f	6.113e-2	1.166e-2	6.160e-2	9.959e-2	2.263e-2	3.610e-2
AF	β	1.304	1.930	1.419	1.171	1.794	1.620
	P_f	9.611e-2	2.682e-2	7.798e-2	1.207e-1	3.643e-2	5.265e-2
SO	P_f	1.060e-1	2.878e-2	7.259e-2	1.197e-1	3.620e-2	5.294e-2
	P_f	1.054e-1	2.938e-2	8.078e-2	1.142e-1	3.812e-2	5.034e-2

MV : MVFOSM, AF : AFOSM, SO : SORM, MC : Monte Carlo simulation
simulation number in MC : 200,000(plane stress) or 100,000(plate bending)
 $Z\sigma_i$: limit state equation ($\sigma_y - \sigma_i$)

Table 5 Probabilistic Sensitivities for the Maximum Probability of Failure

(a) for the Plane Stress Element Model

(b) for the Plate Bending Element Model

X	σ_y	β_x	β_v	$\sigma_y^2(\%)$	σ_y	β_x	β_v	$\sigma_y^2(\%)$
P ₁	-0.472E+00	-0.291E-04	-0.686E+00	22.28	0.342E+00	0.131E-03	-0.150E+01	11.72
P ₂	0.446E+00	0.248E-04	-0.123E+01	19.93	0.939E-01	0.916E-05	-0.566E-01	0.88
P ₃	-0.211E-01	-0.106E-05	-0.137E-02	0.04	-0.243E-01	-0.976E-05	-0.760E-02	0.06
P ₄	0.439E+00	0.245E-04	-0.119E+01	19.28	-	-	-	-
E ₁	0.941E-02	0.447E-08	-0.109E-02	0.01	0.937E-02	0.891E-08	-0.225E-02	0.01
E ₂	-0.679E-01	-0.326E-07	-0.569E-01	0.46	-0.516E-02	-0.491E-08	-0.683E-03	0.00
E ₃	0.722E-01	0.341E-07	-0.642E-01	0.52	-0.139E-01	-0.133E-07	-0.500E-02	0.02
E ₄	-0.136E-01	-0.651E-08	-0.229E-02	0.02	0.974E-02	0.927E-08	-0.244E-02	0.01
t ₁	0.941E-02	0.940E-01	-0.109E-02	0.01	0.786E+00	0.353E+01	-0.793E+01	61.78
t ₂	0.498E+00	0.467E+01	-0.306E+01	24.81	-0.309E-01	-0.155E+00	-0.123E-01	0.10
t ₃	0.722E-01	0.715E+00	-0.642E-01	0.52	-0.837E-01	-0.423E+00	-0.899E-01	0.70
t ₄	-0.136E-01	-0.137E+00	-0.229E-02	0.02	0.584E-01	0.290E+00	-0.439E-01	0.34
v ₁	0.186E-02	0.620E-01	-0.427E-04	0.00	0.209E-01	0.139E+01	-0.112E-01	0.04
v ₂	0.481E-01	0.159E+01	-0.286E-01	0.23	-0.491E-02	-0.328E+00	-0.620E-03	0.00
v ₃	-0.421E-02	-0.140E+00	-0.218E-03	0.00	-0.462E-02	-0.308E+00	-0.548E-03	0.00
v ₄	0.593E-03	0.198E-01	-0.433E-05	0.00	0.639E-04	0.426E-02	-0.105E-06	0.00
σ_y	0.345E+00	0.281E-03	-0.293E+01	11.88	0.493E+00	0.193E-03	-0.312E+01	24.33

Table 6 Comparison of the Reliability Index between the Estimated and the Full Reanalysis Results

(a) for the Plane Stress Element Model

	Case 1	Case 2		Case 3	
	$\beta^o(P_f)$	β^o	$\beta^*(P_f)$	β^o	$\beta^*(P_f)$
Z σ_1	6.527(3.366e-11)	6.908	7.407(6.476e-14)	8.192	9.052(7.050e-20)
Z σ_2	1.167(1.216e-1)	2.236	2.276(1.142e-2)	1.461	1.503(6.638e-2)
Z σ_3	1.301(9.664e-2)	2.412	2.470(6.755e-3)	1.436	1.448(7.377e-2)
Z σ_4	2.617(4.441e-3)	3.589	3.735(9.369e-5)	3.189	3.318(4.535e-4)

All data are same as Table 1 (Case 1), but the mean of t is 1.2 cm ($\Delta t = 0.2$) in the Case 2, the C.O.V. of t is 5% ($\Delta V_t = -0.05$) and the C.O.V.s of P_{1,3} are 20% ($\Delta V_{P_{1,3}} = -0.2$) in the Case 3
 β^o : estimated value by the Sensitivity results
 β^* : full reanalysis result by PFEM-based AFOSM

(b) for the Plate Bending Element Model

	Case 1	Case 2		Case 3	
	$\beta^o(P_f)$	β^o	$\beta^*(P_f)$	β^o	$\beta^*(P_f)$
Z w_2	1.304(9.611e-2)	2.929	2.392(8.376e-3)	1.884	2.088(1.839e-2)
Z w_5	1.930(2.682e-2)	3.781	3.219(6.441e-4)	2.366	2.499(6.224e-3)
Z σ_1	1.419(7.798e-2)	2.227	2.290(1.100e-2)	1.772	1.853(3.191e-2)
Z σ_2	1.171(1.207e-1)	1.821	1.915(2.777e-2)	1.575	1.698(4.479e-2)
Z σ_4	1.794(3.643e-2)	2.511	2.643(4.109e-3)	2.014	2.065(1.944e-2)
Z σ_5	1.620(5.265e-2)	2.271	2.386(8.509e-3)	1.899	1.995(2.526e-2)

All data are same as Table 1 (Case 1), but the mean of t is 2.2 cm ($\Delta t = 0.2$) in the Case 2 and the C.O.V. of t is 5% ($\Delta V_t = -0.05$) in the Case 3