

# 균열선단 특이요소를 이용한 직교이방성판의 응력확대계수 결정에 관한 연구

## A Study on Determination of Stress Intensity Factor of Orthotropic Plates using Crack Tip Singular Element

진 치 섭 \*  
Jin, C. S.

최 현 태 \*\*  
Choi, H. T.

이 흥 주 \*\*\*  
Lee, H. J.

### ABSTRACT

Wood, laminates, reinforced concrete, and some special types of metals systems with controlled grain orientation are often orthotropic and at least rectilinearly anisotropic from point to point, if regarded as homogeneous media. Orthotropic bodies where a crack is not associated with a plane of elastic symmetry may be conveniently treated as a crack problem in a generally anisotropic body. At this work, approach for the determination of the stress intensity factors (SIF) of anisotropic body using crack tip singular elements is presented. Calculated values are in good agreement with the others.

### 1. 서 론

1983년도 미국 표준국 보고서는 "미국에서 공학재료의 파괴로 인한 손실비용은 매년 1190억불로 국민총생산량의 4%를 차지하는 데, 기술적인 적절한 대처를 할 경우 연간 350억불을 줄일 수 있고 파괴역학에 관련된 연구결과를 응용하면 280억불을 추가로 줄일 수 있다." 고 밝혀, 공학에서 파괴역학 연구의 중요성을 제시하였다.

고도화 되어가고 있는 산업사회의 발달과 더불어 많은 구조물의 대형화와 용접구조의 발달로 용접이음이 많이 사용되고, 고장력 재료의 개발로 인하여 부재의 파괴인성(fracture toughness)이 낮아지고, 또한 가혹한 사용조건등으로 구조물이 균열로 인한 손상을 받기가 쉽다. 따라서, 이러한 것에 대비하기 위하여 균열을 가진 부재의 강도를 취급하는 학문의 필요성이 증대하게 되었다.

그런데 현재까지의 연구가 기존의 구조해석에만 치중하여 최근 건설분야의 신소재로 각광을 받고 있는 섬유보강콘크리트나, 폴리머 신소재를 비롯하여 목재, 강판, 압반 및 탄성성질이 방향성을 가지는 구조물의 파괴거동을 예측하는 데 연구가 아직 미흡한 실정이다. 이에 본연구는 직교 이방성판의 파괴특성에 관한 수치적 연구로서

먼저 균열선단에서의 응력확대계수(SIF)를 구하는 데 그 의미를 두고자 함이며 이는 균열의 성장과 이에 따른 파괴거동을 해석하는 데 많은 기여가 되리라고 본다.

본 연구는 1/4절점 특이요소(quarter point singular element) [3,7,9]를 사용하고, 변위상관법을 이용하여 균열이 있는 직교 이방성판의 응력확대계수를 구하여 보기로 한다.

### 2. 이방성 탄성이론

이방성 탄성이론은 탄성성질이 방향성을 가지는 복합체의 역학적 성질을 기술하는 데 널리 사용되어 왔다. 이들재료는 해석과정을 단순화 하기 위하여 균질성이라 가정한다. 실제 재료들을 이상적인 연속체로 모델링하기 위하여 보통은 재료를 균질 이방성으로 가정한다. 파괴역학적 관점에서 보는 재료와 구성성분의 파괴해석은 초기 결함의 시작과 전파에 기본을 둔다. 이 분야는 재료가 등방성이며 균질성이 보장되고, 균열의 크기가 미세구조의 치수에 비하여 충분히 클 때 이들의 파괴거동을 합리적으로 결정할 수 있었다. 섬유보강복합체와 같은 실제의 이방성 재료에 대한 파괴역학의 응용은 그 재료의 미세구조의 내적결합의 크기와 치수가 상대적으로 작은 균질의 연속체로 취급함으로써 성립된다.

탄성 이방성 매개체에 대한 일반적인 Hooke 법칙을 tensor notation으로 표기해보면 다음과 같다.

\* 정회원, 부산대학교 토목공학과 교수

\*\* 부산대학교 대학원 토목공학과 박사과정 수료

\*\*\* 부산대학교 대학원 토목공학과 석사과정

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (1)$$

이 식의 역은

$$\epsilon_{ij} = a_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (2)$$

평면확장에 대한 문제들을 고려해 볼때 탄성체는 평면응력상태와 평면 변형률상태에서 박판의 표면에 평행한 대칭면을 각점에서 가지게되므로 이러한 문제들에 대한 독립탄성상수들은 5개가 되고 이들을 공학상수로 표시해보면 식(4)와 같다. 식(2)에서  $a_{ijkl}$ 은 X-Y의 직교 좌표계에서  $a_{ij}$ 로 표기할 수 있다. 이것은 평면응력 상태이고 평면변형률 문제에서는 위의  $a_{ij}$  대신에 다음  $b_{ij}$ 가 된다.

$$b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i3} a_{j3}}{a_{33}} \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (3)$$

평면응력상태에서는

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$a_{11} = 1/E_1, \quad a_{22} = 1/E_2, \quad a_{33} = 1/G_{12}$$

$$a_{12} = -\nu_{21}/E_2, \quad a_{21} = -\nu_{12}/E_1$$

평면응력과 평면변형률 문제들은 변형된 응력 변형률 관계에 들어가는 탄성상수값들을 제외하고는 일치하고있다.

만일 그림 1에서 직교좌표계의 축(X-Y)이 유한요소해석에서 재료의 직교 이방탄성성질에 따르는 축(X'-Y')과 일치하지 않을경우에는 다음 식(5)에 따라 새로운 축으로 변환해야 한다. 이때의 좌표변환은 X, Y축이 서로 직각일때의 것이므로 직교 이방성의 성질을 잘 표현하고 있다고 볼 수 있다. [1, 14]

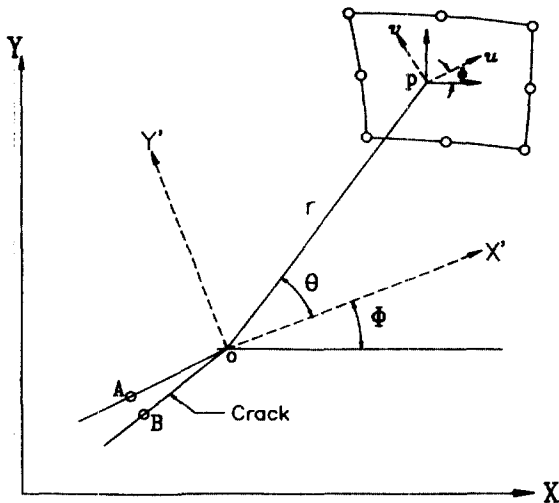


그림 1 좌표계와 변위성분

변환된 매트릭스들  $a_{ij}'$  라고하면 다음식을 이 용한다.

$$a_{ij}' = [T]_0^{-1} [a_{ij}] [T]_0 \quad (5)$$

여기서  $[T]_0^{-1}$  과  $[T]_0$  는 다음과 같다.

$$[T]_0^{-1} = \begin{bmatrix} \cos^2\phi & \sin^2\phi & -\sin\phi\cos\phi \\ \sin^2\phi & \cos^2\phi & \sin\phi\cos\phi \\ 2\sin\phi\cos\phi & -2\sin\phi\cos\phi & \cos^2\phi - \sin^2\phi \end{bmatrix}$$

$$[T]_0 = \begin{bmatrix} \cos^2\phi & \sin^2\phi & 2\sin\phi\cos\phi \\ \sin^2\phi & \cos^2\phi & -2\sin\phi\cos\phi \\ -\sin\phi\cos\phi & \sin\phi\cos\phi & \cos^2\phi - \sin^2\phi \end{bmatrix} \quad (6)$$

### 3. 균열선단 근처에서 응력장과 변위장

Sih 등[2]은 이방성체의 균열선단 근방에서의 응력장과 변위장을 다음과 같이 표현하였다.

응력장

모드 I 에서

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{s_1 s_2}{s_1 - s_2} \left[ \frac{s_2}{(\cos\theta + s_2 \sin\theta)^{1/2}} - \frac{s_1}{(\cos\theta + s_1 \sin\theta)^{1/2}} \right] \right]$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{s_1 - s_2} \left[ \frac{s_1}{(\cos\theta + s_2 \sin\theta)^{1/2}} - \frac{s_2}{(\cos\theta + s_1 \sin\theta)^{1/2}} \right] \right]$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{s_1 s_2}{s_1 - s_2} \left[ \frac{1}{(\cos\theta + s_1 \sin\theta)^{1/2}} - \frac{1}{(\cos\theta + s_2 \sin\theta)^{1/2}} \right] \right] \quad (7)$$

모드 II 에서

$$\sigma_x = \frac{K_{II}}{\sqrt{2r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{s_1 - s_2} \left[ \frac{s_2^2}{(\cos\theta + s_2 \sin\theta)^{1/2}} - \frac{s_1^2}{(\cos\theta + s_1 \sin\theta)^{1/2}} \right] \right]$$

$$\sigma_y = \frac{K_{II}}{\sqrt{2r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{s_1 - s_2} \left[ \frac{1}{(\cos\theta + s_2 \sin\theta)^{1/2}} - \frac{1}{(\cos\theta + s_1 \sin\theta)^{1/2}} \right] \right]$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{s_1 - s_2} \left[ \frac{s_1}{(\cos\theta + s_1 \sin\theta)^{1/2}} - \frac{s_2}{(\cos\theta + s_2 \sin\theta)^{1/2}} \right] \right] \quad (8)$$

변위장

모드 I 에서

$$u_1 = K_I \sqrt{\left(\frac{2r}{\pi}\right)} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{s_1 - s_2} [s_1 p_2 (\cos\theta + s_2 \sin\theta)^{1/2} - s_2 p_1 (\cos\theta + s_1 \sin\theta)^{1/2}] \right\}$$

$$v_1 = K_I \sqrt{\left(\frac{2r}{\pi}\right)} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{s_1 - s_2} [s_1 q_2 (\cos\theta + s_2 \sin\theta)^{1/2} - s_2 q_1 (\cos\theta + s_1 \sin\theta)^{1/2}] \right\} \quad (9)$$

모드 II 에서

$$u_2 = K_{II} \sqrt{\left(\frac{2r}{\pi}\right)} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{s_1 - s_2} [p_2 (\cos\theta + s_2 \sin\theta)^{1/2} - p_1 (\cos\theta + s_1 \sin\theta)^{1/2}] \right\}$$

$$v_2 = K_{II} \sqrt{\left(\frac{2r}{\pi}\right)} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{s_1 - s_2} [q_2 (\cos\theta + s_2 \sin\theta)^{1/2} - q_1 (\cos\theta + s_1 \sin\theta)^{1/2}] \right\} \quad (10)$$

파라미터  $K_I$ 와  $K_{II}$ 는 각각 모드 I과 모드 II에 대응되는 응력확대계수이고  $r$ 와  $\theta$ 는 그림 1에서와 같은 균열선단을 원점으로 하는 극좌표이다. 또  $s_1, s_2$ 는 다음과 같은 특성방정식의 근(일반적으로 복소수)이다.

$$a_{11}s^4 - 2a_{16}s^3 + (2a_{12} + a_{66})s^2 - 2a_{26}s + a_{22} = 0 \quad (11)$$

이 특성방정식은 식(4)의 공학상수를 대입하여 2차 보간식을 이용하는 muller method를 사용하면  $s_1, s_2$ 의 해를 구할 수가 있다.

여기서  $s_j = \alpha_j + i\beta_j$  ( $j=1,2$ ) 이고  $\beta_j > 0$ 인 경우에 근이 존재한다. 이때  $a_{ij}$ 는 이방성재료의 특성 상수이므로 그의 해는 동일하게 다음과 같다.

$$s_1 = (9.56304 \times 10^{-10}) + i(9.50371 \times 10^{-1})$$

$$s_2 = (1.47539 \times 10^{-8}) + i(3.69822) \quad (12)$$

그리고 이방성 탄성체를 복소변수의 해석함수로 나타내면 다음과 같은 파라미터가 나오게 된다.

$$p_j = a_{11}s_j^2 + a_{12} - a_{16}s_j \quad (13)$$

$$q_j = \frac{a_{12}s_j^2 + a_{22} - a_{26}s_j^2}{s_j}$$

$\theta = 180^\circ$ 에 대하여 식(9)와 식(10)은 다음의 매트릭스 형태로 표현된다.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \begin{bmatrix} \operatorname{Re} \left[ \frac{i}{s_1 - s_2} (s_1 p_2 - s_2 p_1) \right] & \operatorname{Re} \left[ \frac{i}{s_1 - s_2} (p_2 - p_1) \right] \\ \operatorname{Re} \left[ \frac{i}{s_1 - s_2} (s_1 q_2 - s_2 q_1) \right] & \operatorname{Re} \left[ \frac{i}{s_1 - s_2} (q_2 - q_1) \right] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

$$\text{또는 } \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{Bmatrix} \quad \dots \quad (15)$$

식 (4)의 symmetric elastic compliance coefficients와 식 (12)에서 구한  $s_1, s_2$ 를 식 (13)에 대입하고 식(15)의 [B]매트릭스가 구해지면 4절에 있는 식(19)의 [A]를 구하여 식(20)에 대입하면 각각의 각도변화에 따른 SIF가 구해지게 된다.

#### 4. 응력확대계수 (S·I·F)

1/4절점 특이 등매개변수 요소는 다음 형태와 같은 변위장을 가진다.

$$u = A + B \sqrt{\frac{x}{L}} + C \frac{x}{L} \quad \dots \quad (16)$$

Ingraffea와 Manu[13] 변위식의  $\sqrt{\frac{x}{L}}$  항을 2개의 변위에 대한 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4u_2 - u_3 \\ 4v_2 - v_3 \end{bmatrix} \sqrt{\frac{r}{L}} \quad \dots \quad (17)$$

일반적인 경우에 대하여

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(u_2 - u_4) - (u_3 - u_5) \\ 4(v_2 - v_4) - (v_3 - v_5) \end{bmatrix} \sqrt{\frac{r}{L}} \quad (18)$$

$$\text{또는 } \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [A] \sqrt{\frac{r}{L}} \quad \dots \quad (19)$$

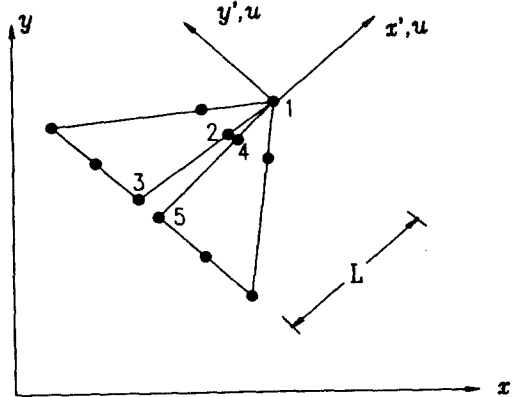


그림 2 균열선단을 따르는 1/4절점 특이요소

여기서  $L$ 은 특이요소의 길이이다. (그림 2 참고)  
 $u_1$  와  $u_2$  는 그림 2 에서처럼 균일선단요소에서  
 균일라 내면을 따르는 절점에서 전계  $\alpha, \gamma$ 의 변위(수  
 를 접선방향의 변위와 법선방향의 변위로 바꾸어  
 나타낸 값이다.

식(14)와 식(18)를 등차시키고 등력 확대계수를  
 대하여 풀면 다음을 얻는다.

$$\begin{cases} K_{II} \\ K_{II} \end{cases} = \frac{E_1 b}{4L} \left[ \frac{A}{L} \left( \frac{r}{2L} \right)^{-1/2} - \frac{A}{2L} \left( \frac{\pi}{2L} \right)^{-1/2} \right] \quad (20)$$

이것이 2차원 직교이방성계에서, 응력 확대계수를  
 구하는 일반적인 식이다.

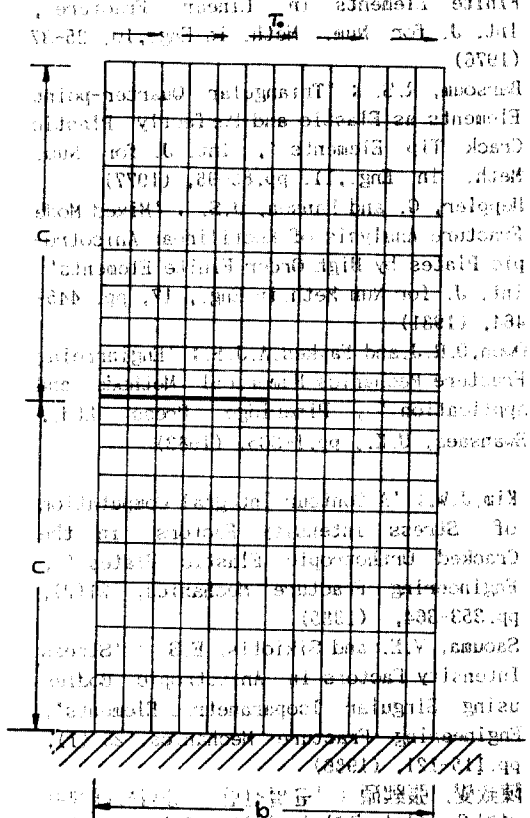


그림 3 Single edged cantilever plate 의 유한  
 요소모델

5. 계산에

그림 3 에서와 같이 상부단에 전단하중을  
 받고 있는 직교 이방성질의 cantilever 를  
 single - edged crack plate 를 유한요소로  
 해석하여 S-I-F 를 구해보았다.

탄성성질은 다음과 같고 유한요소 분할은 그림3  
 과 같다.

$$E_1 = 21 \times 10^6 \text{ psi} \quad E_2 = 1.7 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$\nu_{12} = 0.21 \quad \nu_{21} = 0.017$$

$G_{12} = 1.4 \times 10^6 \text{ psi}$   
 요소분할은 상하대칭으로, 각각 120개의 8절  
 점 등매개 변수요소를 사용하여 총 240개로 하였  
 으며 crack의 길이  $a$ 는 3.5", CMOD(crack mouth  
 opening displacement)는 0.004", 판의 폭  $b$ 는  
 7" 그리고 높이  $2c$ 는 14"로 하였고 단위두께로  
 처리하여 plane stress 상태로 해석 하였다. 그  
 리고 균일선단요소는 1/4절점 특이요소(quarter  
 point singular element)를 사용하였다. 직교 이  
 방향 탄성성질의 방향에 대한 각도  $\alpha(0^\circ - 90^\circ)$   
 에 따른  $K_I$ 와  $K_{II}$  를 구하였으며 등방성인 경우  
 대와도 비교하여 보았다.

6. 결론

그림 3에 의한 유한요소해석 결과로  $K_I, K_{II}$ 가  
 아래 table 1 과 그림 4에 있다.  
 앞서 사출한 바와 같이 이방성의 탄성패러미트  
 는 등방성 확장과 유한요소 해석의 기하학적 측  
 이 불일치 하므로 transformation second order  
 tensor 를 이용하여 좌표변환을 행해야 하며 또  
 한 균일부분의 절절당 변위를 경사진 균일의 각  
 도를 이용하여 변화시켜 주어야 한다.

table 1 혼합모드에서 Single edge crack 을 가  
 진 직교이방성판의  $K_I, K_{II}$

$\alpha$	$K_I$	$K_{II}$
$0^\circ$	26.89	3.96
$10^\circ$	26.43	11.39
$20^\circ$	25.01	19.36
$30^\circ$	22.07	25.85
$40^\circ$	18.95	30.16
$50^\circ$	15.58	31.04
$60^\circ$	12.54	28.98
$70^\circ$	9.90	23.68
$80^\circ$	7.57	17.03
$90^\circ$	5.12	12.32
등방성E1	25.76	4.36
등방성E2	26.18	4.41

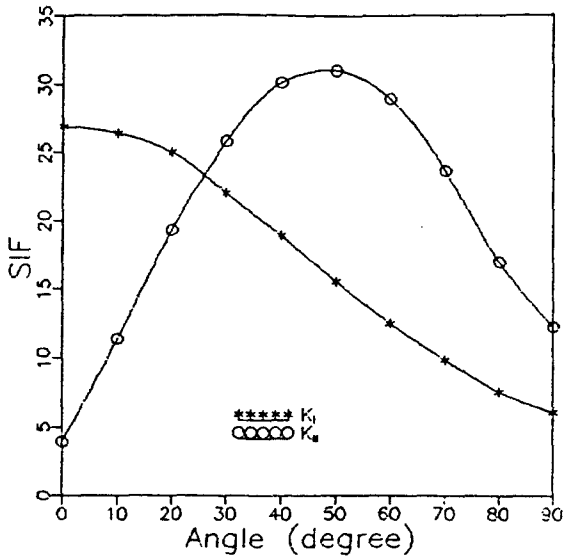


그림 4 혼합모드에서 각도별 SIF의 변화

아래 식(21)에서 보는 바와 같이 응력확대계수 값은 응력의 크기를 나타내므로 K값의 증가와 감소는 응력의 상태를 잘 표현한다.

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta), \tau_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad (21)$$

등방성의 경우 본 논문에서 사용된 탄성계수  $E_1$ 은  $E_2$ 의 약 13배 가량 되므로 탄성계수가  $E_1$ 의 경우일때보다  $E_2$ 를 사용하였을때  $K_{II}$ 이 더 크게 나온것으로 보아 각도변화가 x축을 기점으로 커짐에 따라서  $K_{II}$ 의 값이 작아지는 것은 당연하리라 생각한다. 그러나  $K_{II}$ 는 재료성질이 전단탄성계수와 연관이 되므로 이론적으로 그 해의 분포를 추측 한다는 것은 어려운 일이라 생각한다.

또 이와 비슷한 요소를 사용해서 이방성 각도 0° 일때 27.6과 3.43의 값을 얻은 Saouma et al(11)의 보고와 잘 일치함을 볼수 있다.

본 논문에서 사용된 프로그램은 직교이방성이 아닌 현재까지 SIF를 계산한 다른 기법[9,13]에도 적용이 가능하다는 것이다. 이상의 것을 토대로 균열전파 program을 작성하고 이방성체의 균열거동을 연구해 볼 수 있으며 그리고 Graphic기법에 의한 이방성체의 균열전파를 직접 나타내어 볼 수도 있을것이다.

## 7. 참고문헌

- 1) Leknitskii, S.G.; 'The Theory of Elasticity of an Anisotropic Body', Holden Day Inc., San Francisco, pp.15-50, (1963)
- 2) Sih, G.C., Paris, P.C. and Irwin, G.R.; 'On Cracks in Rectilinearly Anisotropic Bodies', Int. J. Fracture Mech., 1(3), 189-203 (1965)

- 3) Benzley, S.E.; 'Representation of Singularities with Isoparametric Finite Element', Int. J. for Num. Meth. in Eng., 8, 537-545 (1974)
- 4) Atluri, S.N., Kobayashi, A.S. and Nakagaki, M.; 'An assumed displacement hybrid finite element model for linear fracture mechanics', Int. J. of Fracture, 11(2), pp. 257-270, (1975)
- 5) Foschi, R.O. and Barrett, J.D.; 'Stress Intensity Factors in Anisotropic Plates using Singular Isoparametric Elements', Int. J. for Num. Meth. in Eng., 10, 1281-1287 (1976)
- 6) Barsoum, R.S.; 'On the Use of Isoparametric Finite Elements in Linear Fracture', Int. J. for Num. Meth. in Eng., 10, 25-37 (1976)
- 7) Barsoum, R.S.; 'Triangular Quarter-point Elements as Elastic and Perfectly Plastic Crack Tip Elements', Int. J. for Num. Meth. in Eng., 11, pp.85-98, (1977)
- 8) Hepler, G. and Hansen, J.S.; 'Mixed Mode Fracture Analysis of Rectilinear Anisotropic Plates by High Order Finite Elements', Int. J. for Num. Meth. in Eng., 17, pp. 445-464, (1981)
- 9) Owen, D.R.J. and Fawkes, A.J.F.; 'Engineering Fracture Mechanics Numerical Methods and Application', Pineridge Press Ltd., Swansaea, U.K., pp.1-305, (1983)
- 10) Kim, J.W.; 'A Contour Integral Computation of Stress Intensity Factors in the Cracked Orthotropic Elastic Plates', Engineering Fracture Mechanics, 21(2), pp.353-364, (1985)
- 11) Saouma, V.E. and Sikiotis, E.S.; 'Stress Intensity Factors in Anisotropic Bodies using Singular Isoparametric Elements', Engineering Fracture Mechanics, 25 (1), pp.115-121, (1986)
- 12) 陳致燮, 張熙碩; '균열선단 응력확대계수 결정을 위한 후처리 기법', 대한토목 학회 논문집 11(1), (1991)
- 13) Ingraffea, A.R. and Manu, C.; 'Stress Intensity Factor computation in three dimensions with quarter point elements. Int. J. Numer. Meth. Engng. 15, pp. 1427-1445, (1980)
- 14) Chawla, K.K.; 'Composite materials science and engineering' Materials Research and Engineering, Springer-Verlag New York Inc. pp.204-213, (1987)