Laguerre Polynomial을 이용한 저수지군의 최적제어

김 민 환* 이 재 형** 전 일 권***

1. 緖 論

현대 산업사회의 발전과 더불어 수자원의 필요성은 더욱 증대되고 있으며, 또한 개발비도 이에 못지 않게 상승하고 있다. 수자원의 부족과 개발비의 상승이 저수지의 운영, 관리상의 문제을 제기하고 있다. 이런 관리상의 문제점을 개선하고 통일된 알고리즘을 제시하려는 노력이 끊임없이 계속 되어 왔으며, 저수지군의 최적운영계획을 설정하는 방법은 지대한 관심의 대상이다.

저수지군의 관리를 위한 수학적인 모형의 복잡성과 복잡한 제약조건의 반영 때문에 통일된 알고리즘을 구성 하는 것은 쉬운일이 아니다. 이런 문제를 극복하기 위해 기존에 동적계획법이 많이 사용 되어 왔으나 이 방법은 잘 알려진 바와 같이 이산화에 따른 계산용량과 계산시간이 지수적으로 팽창 한다는 단점을 가지고 있다. Polynomial을 이용한 비선형계획법에 의하여 이러한 난점의 개선을 시도 하였다.

본 연구에서는 Laguerre Polynomial을 이용하여 목적함수, 시스템 방정식, 제약조건식의 형태를 시간에 무관하고 간단한 QP(Quadratic Programming)형태로 전환하였다. 이렇게 전환된 QP문제의 해는 Laguerre Polynomial의 계수가 된다.

위와 같은 논리전개를 뒷받침하기 위해 다음절에서 저수지군의 제어문제구성을 다루고, 제3절에서는 2절에서 구성된 제어문제의 수리계획법을 기술한다. 끝으로 본 연구의 성과를 평가 하기위해서 기존의 연구 모형에 대하여 수치실험을 실시하였다.

* 호남대학 토 목공학과 조교수** 전북대학교 토목공학과 부교수 ** 박사과정

2. 貯水池群에 대한 제어문제의 구성

선형상태방정식에 의한 동적 시스템식은 다음과 같다.

$$x(t+1)=\alpha(t)x(t)+\beta(t)u(t)+\gamma(t), \qquad x(0)=x0 \quad (\text{given}) \qquad (2\text{-}1)$$

여기서 상태변수 x(t)와 제어변수u(t)는 각각 n-상태벡터, r-제어벡터이다. 그리고 $\alpha(t)$와 $\beta(t)$는 적절한 차원을 갖는 상수 매트릭스이다. 식(2-1)은 다음과 같은 부등제약조건식이 만족되는 u(t),t=1,....,T을 구하고자 한다.

$$y(t)+y1T(t)x(t)+y2T(t)u(t)\leqq 0 \qquad t=1,.....,T \qquad (2\text{-}2)$$

목적함수는 다음과 같은 일반적인 형태의 식을 최대(최소)화 한다.

$$q1T(T)x(T)+1/2xT(T)Q1(T)x(T)+\sum_{t=0}^{T-1}[q1T(t)x(t)+q2T(t)u(t)$$
$$+1/2\{x(t)TQ1(t)x(t)+2x(t)TQ12u(t)+u(t)TQ2(t)u(t)\}] \qquad (2\text{-}3)$$

여기서 Q1,Q2,Q12 는 적절한 차원을 갖는 매트릭스이고, q1과q2는 벡터이다.

2-1. 저수지 수위의 제약

Vi는 댐(i=1,2,3,...)의 저수용량이다. 만일에 Vi가 모형에서 결정변수인 경우에는 댐의 적정규모를 정할 수 있게 된다. 댐의 저수용량의 상한과 하한은 해를 얻기 위해 필요하다. 저수량x는 正規化된 값으로 한다. 위락목적을 위한 可用貯水量에 대해서는 각 저수지의 최저수위를 규정함으로서 목적을 달성하도록 한다. 각저수지의 저수량은 이 값을 밑돌수 없도록 제약조건을 부가한다. 홍수조절의 고려에 대해서는 각 저수지의 최대 저수수준을 규정한다. 각 xi가 이 수위를 넘을 수 없도록 제약을 가한다. 저수지들 사이에 유통되는 물의 양은 저수수준과 같은 형태로 정규화된 양으로 표시된다. 방류량(제어변수) uti(i=1,2,3,...)는 i번째 저수지에서 t-기간에 방류되는 물의 양을 나타낸다. 이와 같은 관계를 수식적으로 나타내면,

$$xt - V \langle 0 \text{ ,or } \rangle 0 \qquad (2\text{-}4)$$

2-2. 연속성의 제약

연속성의 제약은 어떤 系에서 저류량의 연속조건을 의미한다. 손실이 없다면 하천에서 유입량과 유출량이 같다는 의미이다. 그림2-1에 대해서

식으로 나타내면,

$$\begin{bmatrix} xt+11 \\ xt+12 \\ xt+13 \\ xt+14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xt1 \\ xt2 \\ xt3 \\ xt4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ut1 \\ ut2 \\ ut3 \\ ut4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma t1 \\ \gamma t2 \\ \gamma t3 \\ \gamma t4 \end{bmatrix} \tag{2-5}$$

2-3. 방류량의 제약

방류량은 상태의 제약, 종기상태의 제약, 유입량등에 의하여 구속을 받게 된다. 또 하류부의 하천오염방지, 용수공급의 적정한 유지등의 목적을 달성하기 위하여 방류량의 제약이 필요하다. 그러나 만일 이들의 제약조건을 그대로 열거할 경우 상호 종속의 가능성이 높고, 만일 서로 종속될 경우 제어는 제약조건이 수동적으로 다루어 질 수 밖에 없다. 그렇지 않기 위해서는 종속 형태를 피하여야 한다. 즉 이들의 관계를 단일의 관계로 묶는 것이 바람직하다. 일반적인 제약조건으로 변형시키기 위해서 종기조건 xT을 연속방정식에 대입하여 일차적인 부담을 줄인다. 이러한 절차를 따르면,

$$\eta t \leqq xt \leqq \xi t \tag{2-6}$$

ηt와 ξt은 상한 및 하한을 나타내는 벡터량이다. 상태제약 조건식에 연속방정식을 적용시킴으로서 방류량제약 조건식으로 전환 가능 하다. 전환하기 위하여 t대신 t-1을 연속방정식에 대입하여 xt = f(xt-1, ut-1)을 얻고, 이 식을 다시 상태제약 조건식(2-6)에 대입한다. 식(2-6)은 다음과 같은 방류량제약 조건식으로 변환된다.

$$\eta t \leqq xt-1 + \beta\, ut-1 + \gamma t-1 \leqq \xi t \tag{2-7}$$

여기서 ut-1에 관한 부등식이 되도록 상태변수와 유입량을 이항하여 정리하면,

$$\eta t-1c \leqq ut-1 \leqq \xi t-1c \tag{2-8}$$

로 되며 $\eta t-1c$ 및 $\xi t-1c$은 ηt 및 ξt과 β-1(xt-1, γt-1)등의 관계로 부터 얻어진다. 윗 식에서 t-1대신에 t을 대입하면 일반적인 관계로 나타낼 수 있다.

$$a(xt,\ yt) \leqq ut \leqq b(xt,\ yt) \tag{2-9}$$

실제로 식(2-5)의 β의 값을 가지고 식(2-9)을 상한값과 하한값으로 구분

하여 나타내면 다음과 같이 나타 낼 수 있다.

$$g1(xt,\ ut) = K\ xt + at - ut \leqq 0 \qquad (2\text{-}10)$$

$$g2(xt,\ ut) = ut - K\ xt - bt \leqq 0$$

이상과 같은 절차에 의하여 얻어진 방류량의 제약조건식은 상태방정식에 종속된 형태로 변환된다.

2-4.목적함수의 제약

본 논문의 목적함수의 형태는 각 계획목표 달성으로부터 얻어지는 총편익의 극대화이다. 즉,

$$Z = \mathrm{Max}\sum_{t=0}^{T-1} cnT\ un \qquad (2\text{-}11)$$

윗 식에서 ctT=[ct1, ct2,...ctl]이고, 여기서 l은 댐의 수이다. 또 ut=[ut1, ut2,...utl]T이며, 식(2-11)은 ut을 방류했을때 발생하는 비용, 혹은 ut에 대해 선형함수 관계로 규정한 것이다.

3. 數理計劃 모형

본 논문에서는 선형시스템방정식, 선형제약조건식, Quadratic criterion로 구성된 문제를 Laguerre polynomial을 이용하여 간단한 QP의 문제로 구성 하였다.

이산형최적제어 문제를 해결하기 위하여 상태변수, 제어변수와 경계조건을 m차 이산형 Laguerre Polynomial의 항으로 나타내면 다음과 같다.(1)

$$x(t)=GTL(t), \quad x(t-1)=WTL(t), \quad x(t+1)=FTL(t)$$

$$u(t)=HTL(t), \quad u(t+1)=ETL(t) \qquad (3\text{-}1)$$

$$x(0)=GTL(0)=GTV1, \quad x(T)=GTL(T)=GTV2$$

여기서, 계수매트릭스는

$$G = [g1,\ g2,\ .\ .\ .\ .\ ,\ gn]\ , \qquad W = [w1,\ w2,\ .\ .\ .\ .\ ,\ wn]$$

$$F = [f1,\ f2,\ .\ .\ .\ .\ ,\ fn]\ , \qquad H = [h1,\ h2,\ .\ .\ .\ .\ ,\ hr]$$

$$E = [e1,\ e2,\ .\ .\ .\ .\ ,\ er]\ ,$$

계수매트릭스는 다음과 같은 관계를 가지고 있다.

$$FT = GT\ M, \quad WT = GT\ M\text{-}1, \quad ET = HT\ M\text{-}1 \qquad (3\text{-}2)$$

여기서 M은 축변환(Shift transformation)매트릭스이다.

식(3-1)을 목적함수식(2-3)에 대입하고, 이산형 Laguerre series 의 직

교성의 성질을 이용하여 정리하면 다음과 같은 간단한 QP함수로 전환 된다.

$$(1/2)Z^T\bar{B}z + \bar{b}^T z \qquad (3\text{-}3)$$

그리고, 시스템방정식(2-1)에 식(3-1)과 (3-2)를 대입하여 정리하면,

$$\bar{G}z + \bar{g} = 0 \qquad (3\text{-}4)$$

또한 제약조건식(2-2)에 식(3-1)을 대입하여 정리하면,

$$\bar{H}z + \bar{h} \leq 0 \qquad (3\text{-}5)$$

식(2-1), (2-2), (2-3)를 Laguerre Polynomial을 이용하여 변형된 식 (3-3) ,(3-4), (3-5)는 등호제약조건식(Equality Constraints)과 부등제약조건식(Inequality Constraints)이 있는 QP(Quadratic Programming)문제로 변환 시켰다. 이렇게 변환된 QP문제의 해를 구한 z값은 Laguerre Polynomial의 계수가 된다. 즉, 이 계수값은 식(3-1)에 대입하면 제어변수$u(t)$와 상태변수$x(t)$를 구할 수 있고, 목적함수값도 평가할 수 있다.

4. 수치실험 및 고찰

다목적 4개의 복합저수지군의 최적방류법칙을 정하기 위하여 Laguerre Polynomial을 이용한 최적기법에 의해서 수치실험을 행한다. 복합저수지군의 상황은 그림2-1에 도시 하였다. 식(2-5)에서 유입량γ_t은 결정론적인 값(예측된 값)이며, 본 수치 실험에서는 시간에 관계없이 일정한 경우를 대상으로 실시 하였다.

방류를 수행하는 기준은 관개 및 발전용수의 효율적인 이용에 관한 배려이다. 따라서 각 저수지에 수력 발전기가 있는 것으로 한다. 방류로 얻어지는 편익은 임의의 함수로 정한다. 목적함수의 형태는 식(2-11)인데, 여기서 c_{ti}는 각 저수지에서 t-기간에 방류되는 물의 양을 편익으로 환산하는 변환 매개변수이다. 각 저수지에 대한 c_{ti} 값은 참고문헌(2)의 값을 사용 하였다.

본 예제의 상태 및 제어 변수의 제약조건은 다음과 같다.

$$[0,\ 0,\ 0,\ 0]^T \leq x \leq [10,\ 10,\ 10,\ 15]^T \qquad (4\text{-}1)$$

$$[0,\ 0,\ 0,\ 0]^T \leq u \leq [3,\ 4,\ 4,\ 7]^T \qquad (4\text{-}2)$$

유입량은

$$\gamma t = [\ 2,\ 3,\ 0,\ 0]^T \qquad t=1,\ldots,T \qquad (4\text{-}3)$$

초기 저수수준은 다음과 같다.

$$x = [\ 5,\ 5,\ 5,\ 5]^T \qquad (4\text{-}4)$$

방류량 및 저수수준을 조절하기 위해서 식(2-10)과 같은 양측 제약조건식을 사용하여 수치실험 하였다. 식(2-15)에서 γt=constant 문제에 대한 at 및 bt 는 참고문헌(2)에 주어진 값을 사용 하였다.

Laguerre polynomial을 이용하여 QP형태로 전환된 모형에서 polynomial의 계수z를 구하기 위하여 이용된 Augmented 라그란지 곱수 방법에 의한 비선형 프로그램(3)을 수행하여 얻어진 계수값에 의해서 제어$u(t)$ = $HTL(t)$을 결정할 수 있고, 시스템방정식에 의해서 상태$x(t)$를 결정할 수 있다. 얻어진 최적추적로는 그림4-1에 도시하였다.

본 알고리즘에 의해서 얻어진 편익값은 반복법에 의한 것이 아니기 때문에 반복횟수에 의한 기존(2,4,5)의 알고리즘과는 비교할 수 없다. 참고문헌(2), (4), (5)의 최종값과 본 연구의 편익값이 표4-1에 비교하여 나타낸 바와 같이 거의 비슷한 값을 보여 주고 있다.

Table 4-1 Total benefit

Heidari(4)	Yakowitz(2)	Lee(5)	본 연구
401.3	401.15	404.17	403.50

5. 결 론

기존의 방정식을 Laguerre polynomial과 이 성질을 이용하여 다른형태의 방정식으로 변환하여 수행 가능성을 검토한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 기존의 식(2-1), (2-2), (2-3)을 Laguerre polynomial과 이 성질을 이용하여 등호제약과 부등제약조건식이 있는 QP문제을 구성하였다. 구성된 QP문제의 목적함수는 시간에 무관한 함수로서 단계별 해의 저장과 전진 및 후진 계산이 필요없이 단번에 해가 구해진다.

2. 구성된 QP문제을 비선형프로그램을 이용하여 Laguerre polynomial의

계수를 구하였는데 이 계수값은 원래의 수리모형을 만족하였다. 평가된 편익값은 다른 방법에 의해서 얻은 값과 비슷한 값을 얻었다.

3. 그림4-1에서 살펴 본바와 같이 무효방류량이 李(5)의 연구결과 보다 미소하게 발생하였다. 이는 저수수준을 최대로 유지하면서 방류량을 억제하고 있음을 나타낸다. 즉 저수지군을 보다 효율적으로 운영할 수 있는 수리계획법임을 입증한다.

참 고 문 헌

1. ING-RONG HORNG and SHINN-JANG HO,"Optimal control using discrete Laguerre polynomials",Int. J. Control, Vol.41, No.6, 1613-1619, 1985
2. Daniel M. Murray and Sidney J. Yakowitz, "Constrained differential dynamic programming and its application to multireservoir control", Water Resources Research, Vol.15, No.5, 1017-1027, 1979
3. Donald A. Pierre and Michael J. Lowe,"Mathematical programming via augmented lagrangians", Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
4. Heidari, M.,V.T.Chow,P.V.Kokotovic, and D. Meredith,"Discrete differential dynamic programming approach to water resources systems optimization", Water Resources Research, 7, 1971
5. 李 在炯,"貯水池群의 最適運營計劃에 관한 方法論", 서울대학교 대학원 박사학위 논문, 1983

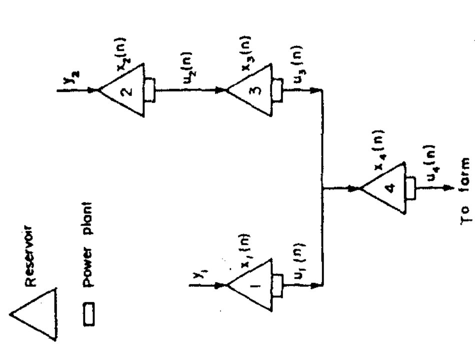

Fig.2-1 Reservoir network of simplified system

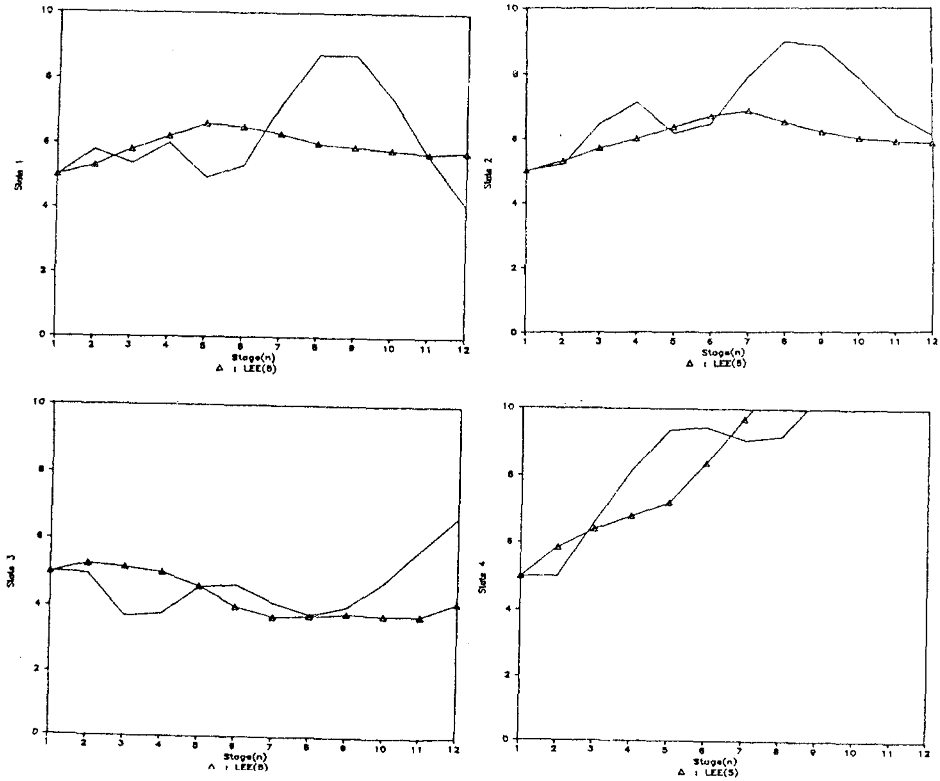

Fig.4-1 Optimal trajectory for the example