

# 월수문사상의 모의발생을 위한 추계학적 모형의 비교

이 원 환\* 김 분 모\*\* 심 재 현\*\* 김 민 수\*\*\*

## 1. 서 론

적절한 수공구조물의 설계와 장기간의 치수 및 이수계획에 있어서 미래의 사상을 정확하게 예측할 수 있다는 것은 커다란 이점을 갖는다. 수공학의 분야에서 이러한 미래의 현상을 예측하고자 하는 수학적 모형은 여러가지가 발표된 바 있다. 본 연구에서는 이러한 수학적 모형중에서 추계학적 모형 (Stochastic Model)을 선정하였으며, 현재 발표되어 있는 모형중 자기회귀모형 (Auto Regressive Model) 과 이동평균모형 (Moving Average Model) 들의 조합으로 AR(p), ARMA(p,q) 모형에 대해 월유량을 모의발생하였으며, 개별 지점에 대해 적용하는 일변량 모형 (Univariate Model) 과 유역전체의 시간적, 공간적 특성을 고려하는 다변량 모형 (Multivariate Model)을 각각의 모형에 대해 적용하였다. 또한 적용한 수문사상은 남한강 상류유역의 4개 지점에 대한 월유량 사상과 금강유역의 3개 지점에 대한 월증발량 사상 및 낙동강 유역의 2개 지점에 대한 월유량 사상을 택하여 각 모형들의 적용성을 검토하였다. 이러한 다수의 모형을 각 유역 및 지점에 대해 적용하여 일변량 및 다변량 모형의 특성을 비교하였고, 각 수문사상에 대한 적정 모형을 파악하였다.

## 2. 자료적출

본 연구에서 사용한 자료는 낙동강 유역 2개 지점 (진동, 낙동)의 1964~1989년의 26년의 월유량 자료와 남한강 상류유역 4개 지점 (단양, 평창, 영월, 정선)의 1962~1986년의 25년의 월유량 자료 및 금강유역의 3

\* 연세대학교 토목공학과 교수, 공학박사 \*\* 연세대학교 대학원 토목공학과 박사과정 \*\*\* 연세대학교 대학원 토목공학과 석사과정

개 지점 (추풍령, 청주, 군산)의 1968~1989년의 22년의 월증발량 자료를 사용하였다. 3개의 자료를 택한 이유는 적용모형에 있어 일정지점과 일정한 자료의 특성으로 인한 생길 수 있는 오류를 줄이고 적용에 있어서 일반성을 기하기 위한 것이다.

### 3. 적용모형

#### 3.1 일변량 1차 자기회귀 모형 (Univariate AR(1) Model)

$v$  를 연수,  $m$  을 월수로 나타낼 때 일변량 AR(1) 모형은 다음과 같은 시계열의 식으로 나타낼 수 있다.

$$Z_{v,m} = \Phi_1(m) \cdot Z_{v,m-1} + \sigma_m \cdot \epsilon_{v,m} \quad \text{----- (3.1)}$$

$$\sigma_m = \sqrt{1 - \Phi_1^2(m)} \quad \text{----- (3.2)}$$

여기서  $\Phi_1(m)$  은 식 (2-11) 의  $\gamma_{1,m}$  으로 대체할 수 있는 매개변수이고  $\sigma_m$ 은 무작위 성분에 대한 매개변수이며,  $\epsilon_{v,m}$  은 표준정규난수이다.

#### 3.2 일변량 2차 자기회귀 모형 (Univariate AR(2) Model)

$$Z_{v,m} = \Phi_1(m) \cdot Z_{v,m-1} + \Phi_2(m) \cdot Z_{v,m-2} + \sigma_m \cdot \epsilon_{v,m} \quad \text{----- (3.3)}$$

윗식의 매개변수  $\Phi_1(m)$ ,  $\Phi_2(m)$ ,  $\sigma_m$  은 다음 식으로 구하게 된다.

$$\Phi_1(m) = \frac{\gamma_{1,m} - \gamma_{1,m-1} \cdot \gamma_{2,m}}{1 - \gamma_{1,m-1}^2} \quad \text{----- (3.4)}$$

$$\Phi_2(m) = \frac{\gamma_{2,m} - \gamma_{1,m} \cdot \gamma_{1,m-1}}{1 - \gamma_{1,m-1}^2} \quad \text{----- (3.5)}$$

$$\sigma_m = 1 - \sum_{k=1}^2 \Phi_k(m) \cdot \sigma_{k,m} \quad \text{----- (3.6)}$$

#### 3.3 일변량 ARMA(1,1) 모형

$$Z_{v,m} = \Phi_1(m) \cdot Z_{v,m-1} + \theta_m \cdot \epsilon_{v,m-1} + \epsilon_{v,m} \quad \text{----- (3.7)}$$

$$\gamma_{2,m} = \gamma_{1,m} \cdot \Phi_1(m)$$

$$\gamma_{1,m} = \frac{(1 - \theta_m \cdot \Phi_1(m))(\Phi_1(m) - \theta_m)}{1 + \theta_m^2 - 2\Phi_1(m)\theta_m} \quad \text{----- (3.8)}$$

$\gamma_{1,m}, \gamma_{2,m}$  은 시계열의  $m$  월에서의 1, 2차 계열상관계수이다.

3.4 다변량 1차 자기회귀 모형 (Multivariate AR(1) Model)

$n$  을 지점의 번호,  $i$  가 1 에서  $n$  까지 변하는 상수라 하면 시계열  $Z_t^{(i)}$  의 행렬 ( $n \times 1$ ) 으로 이루어지는  $Z_t$  에 대한 다변량 AR(1) 모형은 다음과 같이 나타낼수 있다.

$$Z_t = A_1 \cdot Z_{t-1} + B \cdot E_t \quad \text{----- (3.9)}$$

여기서  $A_1, B$  행렬은 식 (2.12) 의 상호상관계수를 모수로 갖는 ( $n \times n$ ) 행렬이고,  $E_t$  는 ( $n \times 1$ ) 의 행렬로 이루어지는 무작위성분 벡터이다.

$$A_1 = M_1 \cdot M_0^{-1} \quad \text{----- (3.10)}$$

$$D = B B^T - M_0 - A_1 \cdot M_1^T \quad \text{----- (3.11)}$$

$$M = E\{Z_t \cdot Z_{t-k}^T\}$$

3.5 다변량 2차 자기회귀 모형 (Multivariate AR(2) Model)

$$Z_t = A_1 Z_{t-1} + A_2 Z_{t-2} + B E_t \quad \text{----- (3.12)}$$

$$A_1 = (M_1 - M_2 M_0^{-1} M_1^T) M_0^{-1} M_1^T \quad \text{--- (3.13)}$$

$$A_2 = (M_2 - M_1 M_0^{-1} M_1^T) M_0^{-1} M_1^T \quad \text{---- (3.14)}$$

$$D = B B^T - M_0 - (A_1 M_1^T + A_2 M_2^T) \quad \text{----- (3.15)}$$

3.6 다변량 ARMA(1,1) 모형

$$Z_t = A_1 Z_{t-1} + B E_t - C E_{t-1} \quad \text{----- (3.16)}$$

$$M_0 = A M_1^T + B B^T - C B^T A^T - C C^T \quad \text{----- (3.17)}$$

$$M_1 = A M_0 - C B^T \quad \text{----- (3.18)}$$

$$M_2 = A M_1 \quad \text{----- (3.19)}$$

$$A = M_2 M_1^{-1} \quad \text{----- (3.20)}$$

$$B B^T C C^T = F \quad \text{----- (3.21)}$$

$$= M_0 - M_2 M_1^{-1} M_1^T (M_2 M_1^{-1} M_0 - M_1^T M_2 M_1^{-1})^T$$

$$C B^T = M_2 M_1^{-1} M_0 - M_1^T G \quad \text{----- (3.22)}$$

$$(B C)(B C)^T = F G G^T \quad \text{----- (3.23)}$$

$$(B - C)(B - C)^T = F - G - G^T \quad \text{----- (3.24)}$$

#### 4. 결과분석

월유량의 주기성을 판별하기 위해 자기상관계수를 구하여 correlogram 으로 도시한 결과, 월유량 및 증발량의 사상 모두가 모든 지점에서 12 개월의 주기가 뚜렷하게 나타났으며, 각 모의발생 모형에 의한 결과 역시 같은 주기성을 보이고 있다. 3 절에서 기술한 각각의 모의발생 모형에 계산된 모수들을 대입하여 월유량을 모의발생하였는데 발생년수는 100년 이고 난수의 초기치 영향이나 각 모형의 초기치를 0 으로 계산한 영향, 즉 편의성 (biasedness) 을 고려하여 전반부 50년치를 제거한 나머지 50년의 발생치를 모의발생계열로 채택하였다. 각각의 모형에 의해 발생된 계열의 통계량은 표 1,2,3에 나타내었으며 원자료와 비교하기 위해 correlogram 을 그림에 도시하였다. 월증발량 사상의 경우 각 모형들에 의한 correlogram이 그림에서 알 수 있듯이 거의 일치하는 양상을 보이고 있어 각 모형에 의한 모의발생치가 비슷한 값을 보이고 있다.

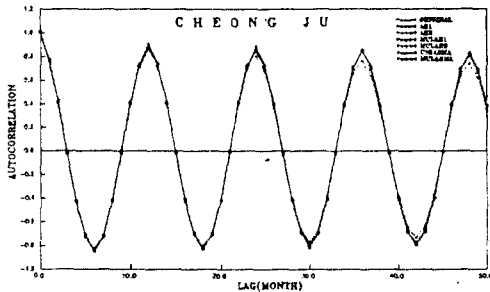


그림 1. 청주지점 월증발량의 correlogram

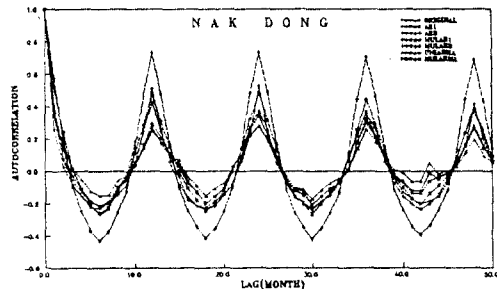


그림 2. 낙동지점 월유량의 correlogram

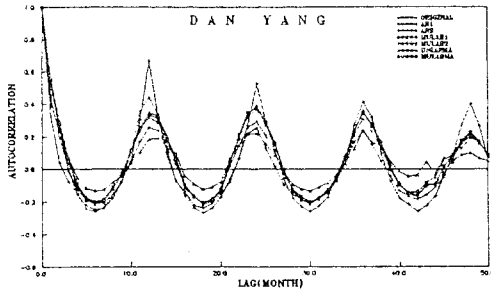


그림 3. 단양지점 월유량의 correlogram

표 3. 단양지점의 월유량의 모의발생결과

주) Model 11 : 일반형 AR(1)모형  
 Model 12 : 일반형 AR(2)모형  
 Model 13 : 일반형 AR(1)모형  
 Model 14 : 일반형 AR(2)모형  
 Model 15 : 일반형 ARMA(1,1)모형  
 Model 16 : 일반형 ARMA(1,1)모형

월	통계량	평균	표준편차	왜곡도	월	통계량	평균	표준편차	왜곡도
1	원자료	16.04	20.52	2.338	7	원자료	319.27	214.27	1.186
	Model11	15.54	24.24	3.588		Model11	303.68	210.73	1.065
	Model12	12.64	16.65	4.270		Model12	261.05	210.71	1.450
	Model13	11.74	9.63	1.129		Model13	312.75	231.84	1.237
	Model14	11.75	9.98	1.327		Model14	319.15	243.98	1.372
	Model15	14.60	15.92	2.010		Model15	367.57	332.75	1.310
	Model16	12.69	11.19	1.469		Model16	319.14	255.35	1.261
2	원자료	29.93	35.95	1.501	8	원자료	286.43	299.43	2.800
	Model11	33.90	66.64	4.282		Model11	267.37	214.69	1.685
	Model12	20.14	20.47	2.230		Model12	233.08	164.96	1.790
	Model13	25.85	32.70	2.296		Model13	272.89	237.42	1.959
	Model14	26.02	34.02	2.337		Model14	272.01	232.47	1.865
	Model15	39.72	71.31	3.010		Model15	343.37	395.04	2.330
	Model16	37.77	66.93	3.254		Model16	291.60	257.24	1.572
3	원자료	44.01	40.28	1.314	9	원자료	223.11	210.05	1.065
	Model11	53.54	65.29	2.704		Model11	251.26	427.30	4.302
	Model12	24.79	14.89	1.370		Model12	168.74	225.14	2.530
	Model13	54.33	64.25	2.417		Model13	240.86	377.87	4.488
	Model14	53.81	61.64	2.212		Model14	237.01	367.71	4.474
	Model15	83.08	144.59	3.390		Model15	359.24	758.29	5.300
	Model16	64.30	105.34	4.513		Model16	233.99	322.89	3.880
4	원자료	75.75	56.16	1.079	10	원자료	49.58	50.85	1.776
	Model11	99.70	122.67	3.703		Model11	41.52	45.07	3.142
	Model12	55.23	32.62	1.790		Model12	59.93	50.73	1.600
	Model13	98.57	115.46	3.426		Model13	43.17	51.15	2.977
	Model14	99.65	122.08	3.818		Model14	45.93	59.93	3.421
	Model15	147.42	284.48	5.200		Model15	56.63	81.31	2.950
	Model16	106.66	158.88	4.931		Model16	53.54	81.71	4.040
5	원자료	105.89	100.03	1.421	11	원자료	23.36	30.60	3.177
	Model11	131.66	125.44	1.215		Model11	18.98	18.51	1.835
	Model12	74.40	87.71	2.010		Model12	40.16	53.17	3.910
	Model13	121.68	108.28	1.054		Model13	19.35	19.63	1.697
	Model14	122.10	107.35	1.981		Model14	20.63	22.83	1.928
	Model15	166.41	182.88	1.700		Model15	26.87	36.73	2.350
	Model16	119.60	100.00	1.154		Model16	23.42	30.47	2.894

원자료	141.17	118.56	1.231	원자료	15.86	19.96	1.957
Model1	205.06	247.67	2.364	Model1	12.21	12.29	1.425
Model2	121.65	145.89	2.270	Model2	14.19	16.51	2.150
6 Model3	200.35	259.86	3.232	Model3	12.71	13.88	1.714
Model4	197.30	256.13	3.325	Model4	13.16	14.94	1.816
Model5	301.63	475.48	3.290	Model5	17.80	26.22	2.770
Model6	219.83	254.89	2.156	Model6	13.43	16.05	1.980

표 2. 낙동지점의 월유량의 모의발생결과

월	통계량	평균	표준편차	왜곡도	월	통계량	평균	표준편차	왜곡도
1	원자료	23.11	18.94	3.087	7	원자료	222.91	142.51	.560
	Model1	21.85	15.51	2.148		Model1	193.71	139.02	1.609
	Model2	20.62	16.23	3.160		Model2	190.85	166.74	1.600
	Model3	21.17	12.37	1.130		Model3	204.87	150.63	1.307
	Model4	18.96	5.43	.450		Model4	175.51	64.14	.331
	Model5	21.65	14.01	1.190		Model5	216.83	167.77	1.050
	Model6	19.74	9.83	.652		Model6	197.38	126.03	.888
2	원자료	29.07	21.53	1.444	8	원자료	175.19	94.43	.723
	Model1	29.22	25.89	2.590		Model1	171.93	94.25	1.914
	Model2	25.22	16.79	1.790		Model2	158.72	70.75	1.190
	Model3	28.93	23.10	2.090		Model3	170.60	94.74	1.062
	Model4	24.04	8.33	1.124		Model4	156.45	44.80	.751
	Model5	30.20	27.08	2.100		Model5	182.14	120.11	1.410
	Model6	25.33	15.31	1.335		Model6	165.53	86.98	1.376
3	원자료	44.07	46.97	2.695	9	원자료	162.55	114.15	.680
	Model1	56.56	70.87	2.798		Model1	165.78	174.39	2.429
	Model2	33.34	27.23	1.570		Model2	138.12	132.82	2.210
	Model3	58.42	75.13	2.852		Model3	163.74	175.56	3.506
	Model4	36.07	20.98	1.709		Model4	128.65	57.90	.938
	Model5	69.09	107.78	3.240		Model5	179.87	202.92	3.030
	Model6	47.36	52.61	2.805		Model6	152.64	125.98	1.644
4	원자료	77.73	74.68	2.036	10	원자료	48.62	27.03	1.004
	Model1	112.00	164.22	4.073		Model1	45.18	29.63	1.917
	Model2	51.48	34.95	1.050		Model2	63.41	34.97	1.010
	Model3	113.77	165.71	4.110		Model3	45.35	30.10	1.854
	Model4	63.98	39.74	1.578		Model4	41.14	13.30	.804
	Model5	135.74	245.75	4.760		Model5	48.79	38.87	1.930
	Model6	89.66	98.67	2.277		Model6	43.48	25.43	1.158
5	원자료	61.35	46.20	.762	11	원자료	33.45	19.79	.979
	Model1	74.96	60.73	.818		Model1	32.06	19.46	1.190
	Model2	36.80	43.28	2.270		Model2	50.47	39.56	2.330
	Model3	67.62	50.04	1.010		Model3	32.44	20.16	1.167
	Model4	50.74	20.31	.210		Model4	28.83	9.10	.558
	Model5	72.77	59.98	1.310		Model5	34.28	24.79	1.300
	Model6	62.13	44.40	1.062		Model6	30.74	17.40	.909
6	원자료	68.29	63.93	2.671	12	원자료	23.95	11.72	.583
	Model1	85.56	93.24	2.272		Model1	22.62	12.22	.998
	Model2	62.83	56.92	2.480		Model2	24.27	14.04	1.160
	Model3	82.30	74.09	1.700		Model3	22.64	12.58	1.090
	Model4	59.48	25.60	.698		Model4	20.89	5.86	.452
	Model5	90.02	89.00	1.920		Model5	23.25	14.64	1.040
	Model6	71.52	55.38	1.775		Model6	22.02	11.69	1.025

주) Model11 : 인버팅 AR(2)모형  
 Model12 : 인버팅 ARMA(1,1) 모형  
 Model13 : 인버팅 ARMA(1,1) 모형  
 Model14 : 인버팅 AR(2)모형  
 Model15 : 인버팅 ARMA(1,1) 모형  
 Model16 : 인버팅 ARMA(1,1) 모형

표 1. 청주지점의 월증발량의 모의발생결과

월	동계량	평균	표준편차	왜곡도	월	동계량	평균	표준편차	왜곡도
1	원자료	33.39	4.84	-.555	7	원자료	125.48	21.67	-.484
	Mode11	33.26	5.11	1.182		Mode11	121.70	18.53	.145
	Mode12	32.16	5.22	.600		Mode12	120.57	22.64	-.110
	Mode13	33.17	4.78	.623		Mode13	121.70	18.82	.104
	Mode14	33.14	4.65	.576		Mode14	122.42	19.39	.178
	Mode15	33.15	4.98	.600		Mode15	121.87	19.66	.040
	Mode16	33.40	4.95	.640		Mode16	121.09	22.19	.279
2	원자료	42.77	7.02	-.123	8	원자료	127.63	16.53	-.248
	Mode11	42.87	7.28	1.014		Mode11	126.89	15.55	.248
	Mode12	41.94	6.50	.610		Mode12	125.35	13.47	.340
	Mode13	42.95	7.11	.694		Mode13	126.99	15.54	.288
	Mode14	42.91	7.15	.657		Mode14	126.84	15.81	.238
	Mode15	42.89	7.35	.680		Mode15	127.21	16.50	.330
	Mode16	44.19	8.33	.831		Mode16	127.32	16.77	.249
3	원자료	76.50	8.82	1.125	9	원자료	99.50	12.95	-.630
	Mode11	78.05	10.23	.539		Mode11	97.95	15.24	.507
	Mode12	75.13	9.22	.160		Mode12	94.64	14.98	.210
	Mode13	78.08	10.20	.558		Mode13	98.00	15.14	.480
	Mode14	78.31	10.07	.657		Mode14	97.92	14.87	.411
	Mode15	78.16	10.72	.600		Mode15	97.95	16.01	.470
	Mode16	78.74	10.77	.914		Mode16	98.28	14.10	.253
4	원자료	114.40	13.32	.267	10	원자료	77.29	8.43	.352
	Mode11	115.91	16.83	.061		Mode11	76.50	7.61	.327
	Mode12	110.82	10.34	-.200		Mode12	79.48	7.30	.120
	Mode13	115.87	16.74	.052		Mode13	76.48	7.54	.273
	Mode14	115.99	17.26	.193		Mode14	76.52	7.80	.288
	Mode15	116.01	17.67	.110		Mode15	76.41	7.92	.330
	Mode16	116.38	17.08	.085		Mode16	77.29	9.15	.193
5	원자료	145.64	16.68	1.615	11	원자료	43.04	4.64	.462
	Mode11	146.45	16.10	-.771		Mode11	42.81	4.50	.118
	Mode12	144.69	15.76	.060		Mode12	46.39	5.13	.680
	Mode13	146.57	16.21	-.754		Mode13	42.88	4.57	.060
	Mode14	146.79	16.11	-.712		Mode14	42.90	4.60	.050
	Mode15	146.71	16.90	-.750		Mode15	42.86	4.80	.100
	Mode16	147.07	16.29	-.409		Mode16	43.33	5.14	-.043
6	원자료	143.67	22.49	-.042	12	원자료	32.56	4.54	.097
	Mode11	147.07	31.16	.819		Mode11	31.99	4.48	.154
	Mode12	140.08	22.79	.580		Mode12	32.41	4.87	.440
	Mode13	147.77	30.98	.507		Mode13	31.99	4.52	.202
	Mode14	147.98	30.71	.410		Mode14	32.01	4.36	.126
	Mode15	148.02	32.28	.460		Mode15	31.97	4.72	.170
	Mode16	150.14	32.32	.668		Mode16	32.12	4.53	.371

주) Mode11 : 이변량 AR(1)모형  
 Mode12 : 이변량 AR(2)모형  
 Mode13 : 이변량 AR(1)모형  
 Mode14 : 이변량 AR(2)모형  
 Mode15 : 이변량 ARMA(1,1)모형  
 Mode16 : 이변량 ARMA(1,1)모형

## 5. 결론

- 1) 월증발량 사상의 경우 각 대상지점 사이의 공선형성은 기대할 수가 없었는데 일변량 및 다변량의 각 모형에 의한 모의발생 결과 역시 큰 차가 없어 이러한 사실을 입증해 주고 있다.

- 2) 실측 월유량 사상과 모의발생 월유량 사상의 correlogram 을 비교한 결과, 모두 12 개월 주기가 뚜렷하고 비정상 시계열임을 알았다.
- 3) 전체 모의발생치들과 원시계열의 기본통계량들을 비교한 결과 일변량 모형에 비해 다변량 모형의 결과가 높은 정도를 나타내었다.
- 4) 동일수계, 동일유역내의 자료해석에 있어서는 각 지점간의 상관성 (공선형성)이 크게 작용하므로 추계학적 해석에 있어서는 일변량 해석보다 다변량 해석이 더욱 합리적이라는 것을 수치적으로 확인할 수 있었다.

## 6. 참고문헌

1. 이원환, 심재현, 안시권, "다변량 AR(1) 모형에 의한 월류량 모의발생", 제29회 수문학 연구발표회 논문초록집, pp.171-181, 1987.
2. 심재현, "다변량 AR(1) 모형에 의한 월유량의 모의발생에 관한 연구 - 낙동강 상류 유역을 중심으로 -", 연세대 석사학위논문, 1987.
3. 심재현, "월유량에 대한 일변량 및 다변량 AR 모형의 비교", 한국수문학회지, 제 23 권 제 1 호, 1990. 3.
4. 건설부, 한국수문조사년보, - 1986.
5. 건설부, 국제수문조사서, 우량, 수위편, 1962-1978.
6. 건설부, 국제수문개발계획(IHP) 대표유역 연구조사보고서, 1982-1985
7. 유동배, "다지점 ARMA(1,1) 모형을 이용한 월유량 모의발생 결과의 비교분석 - 낙동강 유역을 중심으로 -", 연세대 석사학위논문, 1991.
8. Box, G.P. and Jenkins, G.M., Time Series Analysis, forecasting and control, pp.23-34, Holden-Day, 1976.
9. Bras, R.L. and Rodriguez-Iturbe, I., Random Functions and Hydrology, pp.92-147, Addison Wesley, 1985.
10. Kottegota, N.T., Stochastic Water Resources Technology, pp.145-154, Mac-millan Press, 1980.
11. Roesner, L. A. and Yevjevich, V., "Mathematical Models for Time Series of Monthly Precipitation and Monthly Runoff", Hydrology Paper, No.15, Colorado State University, Fort Collins, Colorado, 1966.
12. Yevjevich, V., Salas, J. D., and Delleur, J. W., Applied Mode



- ling of Hydrologic Time Series, pp.347-412. Water Resources Publication, 1980.
13. Yevjevich, V., Stochastic Process in Hydrology, pp. 71-78. Water Resources Publication, 1972.
  14. Young, G.K. and Pisano, W.C., "Operational Hydrology using Residuals", Journal hydraulics Division, ASCE, Vol.94, NO. HY4, pp.909-923, 1968.1.