變斷面 보의 固有振動數 方程式 推定

Natural Frequency Equations of Tapered Beams

○李 柄求*　　吳 相晉**　　牟 正萬***
Byoung-Koo Lee　Sang-Jin Oh　Jeong-Man Mo

1. 서론

보는 土木, 建築, 機械, 船舶, 航空等 各種 構造工學 關聯分野에서 가장 基本이 되는 構造單位 中의 하나이다. 構造物에서 斷面을 變斷面으로 하는 境遇에 材料가 節約되는 經濟的 잇점이 있을 뿐만 아니라 美的 感覺等 여러가지 이유로 變斷面을 많이 使用하는 추세이다.

이 論文은 變斷面 보의 自由振動을 解析한 結果를 統計的으로 처리하여 變斷面 보의 固有振動數를 算定할 수 있는 固有振動數 方程式을 推定하는데 硏究目的이 있다.

2. 보의 變斷面

本 硏究에서 變斷面은 一般的으로 널리 使用되고 있는 그림 1과 같이 斷面의 變化諸元이 直線的으로 變化하는 變斷面을 採擇한다. 그림 1(a)에서 보의 임의점 x에서의 斷面積 A_x 및 斷面2次모멘트 I_x는 各各 다음 式들과 같이 表示된다.

$$A_x = A_a[\,1+(k-1)x/\ell\,]^m \tag{1.1}$$

$$I_x = I_a[\,1+(k-1)x/\ell\,]^n \tag{1.2}$$

$$\text{여기서, } k = d_b/d_a \tag{1.3}$$

윗 式들에서 m, n은 斷面形狀係數이고 各各의 記號들은 그림 1(a), (b)에 定義되어 있다.

(1.1), (1.2)式의 變斷面 式들은 어떤 斷面形狀에도 適用시킬 수 있으나, 그림 1(b)와 같이 3가지 斷面形狀에 대하여 m, n값을 決定하면 다음과 같다.

(1) 變化높이 矩形斷面

$$m = 1,\quad n = 3 \tag{2}$$

(2) 變化幅 矩形斷面

$$m = 1,\quad n = 1 \tag{3}$$

(3) 正方形斷面 또는 圓形斷面

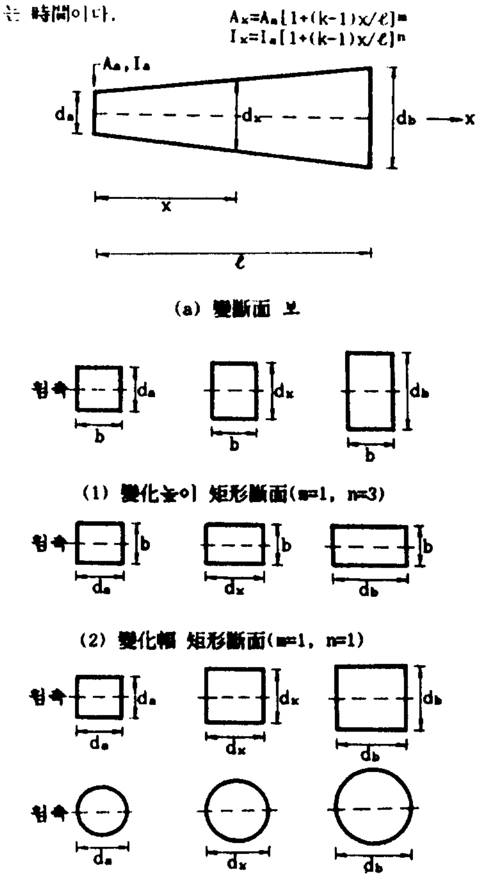
$$m = 2,\quad n = 4 \tag{4}$$

3. 數學的 模型 및 數値解析 方法

보의 自由振動은 調和振動을 한다고 하면 橫方向 變位의 調和振動式은 다음과 같이 表示된다.

$$w(x,\ t) = w_x \sin(\omega t) \tag{5}$$

윗 式에서 w_x는 調和振動의 振幅, ω는 固有角振動數, t는 時間이다.



(a) 變斷面 보

(1) 變化높이 矩形斷面(m=1, n=3)

(2) 變化幅 矩形斷面(m=1, n=1)

(3) 正方形 또는 圓形斷面(m=2, n=4)

(b) 斷面形狀

그림 1. 變斷面 보 및 斷面形狀

變斷面 보의 自由振動을 支配하는 偏微分方程式은 다음 (6)式과 같다.

$$E\frac{d^2 I_x}{dx^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2E\frac{dI_x}{dx}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + EI_x\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A_x\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{6}$$

윗 式에서 E는 彈性係數, ρ는 單位體積當 質量이다. 微分方程式을 無次元으로 誘導하기 위하여 보의 軸方

* 圓光大學校 土木工學科 敎授
** 圓光大 工業技術開發硏究所 硏究員
*** 裡里農林高等學校 農業土木科

向 座標 x 및 橫方向 變位의 振幅 w_x를 보의 길이 ℓ로 正規化하면 다음과 같다.

$$\xi = x/\ell, \quad \eta = w_x/\ell \qquad (7)$$

(1.2)式으로 부터 dI_x/dx, d^2I_x/dx^2, (5)式으로 부터 $\partial^2w/\partial x^2$, $\partial^3w/\partial x^3$, $\partial^4w/\partial x^4$, $\partial^2w/\partial t^2$을 各各 구하여 (1.1)式과 함께 (6)式에 代入하고 (7)式을 利用하여 整理하면 다음과 같은 變斷面 보의 自由振動을 支配하는 無次元 微分方程式을 誘導할 수 있다.

$$\begin{aligned} d^4\eta/d\xi^4 = &-2n(k-1)[1+(k-1)\xi]^{-1}\, d^3\eta/d\xi^3 \\ &- n(n-1)(k-1)^2[1+(k-1)\xi]^{-2}\, d^2\eta/d\xi^2 \\ &+ C_i^2[1+(k-1)\xi]^{m-n}\, \eta \end{aligned} \qquad (8)$$

윗 式에서 C_i는 無次元 固有振動數로 다음 (9)式과 같고 i는 모드數이다.

$$C_i = \omega_i \ell^2(\rho A_a/EI_a)^{1/2}, \; i = 1,2,3,4,\cdots \qquad (9)$$

보의 힌지端, 固定端 및 自由端의 境界條件은 다음과 같다.

$$\text{힌지端} : \eta = d^2\eta/d\xi^2 = 0 \qquad (10)$$

$$\text{固定端} : \eta = d\eta/d\xi = 0 \qquad (11)$$

$$\text{自由端} : d^2\eta/d\xi^2 = d^3\eta/d\xi^3 = 0 \qquad (12)$$

微分方程式 (8)式을 數値解析하여 無次元 固有振動數 C_i 및 그에 대응하는 振動形 $\eta=\eta_i(\xi)$를 구한다. 이 微分方程式에는 固有値 C_i項이 包含되어 있으므로 먼저 C_i값을 假定하여 微分方程式에 代入한 後에 端部條件에 따라서 앞에서 誘導한 左端(ξ=0)의 힌지, 固定 또는 自由端의 境界條件을 利用하여 微分方程式의 數値積分을 施行한다. 假定한 固有値 C_i값이 自由振動의 固有値인지는 右端(ξ=1)의 힌지, 固定 또는 自由端의 境界條件의 滿足與否로 判斷한다. 이 硏究에서 微分方程式의 數値積分은 Runge-Kutta method를 利用하고, 固有値 C_i값은 行列값 探査法을 利用하여 찾았다.

本 硏究의 數値解析 結果를 檢證하기 위하여 同一한 變斷面 보의 無次元 固有振動數를 計算하여 構造解析用 汎用프로그램인 SAP80의 結果와 比較하였으며, 두 結果가 모두 優秀하게 接近하는 것을 確認하였다.

4. 固有振動數 方程式 推定

그림 2는 端部條件이 힌지-힌지이고 斷面形狀이 變化높이 矩形斷面(m=1, n=3)인 變斷面 보에 대하여 C_i-k의 關係를 나타낸 것이다. 工學的으로 k값은 1 - 3의 範圍이면 充分하므로 1에서 3까지 0.25씩 增加시킨 9개의 k 값에 대하여 第4固有振動數까지 계산하여 그림에 나타내었다. 그림 2에서 C_i와 k는 거의 直線的인 關係에 있음을 알 수 있다. 다른 端部條件과 다른 斷面形狀에 대해서도 모두 거의 直線的인 關係에 있음을 알 수 있었다.

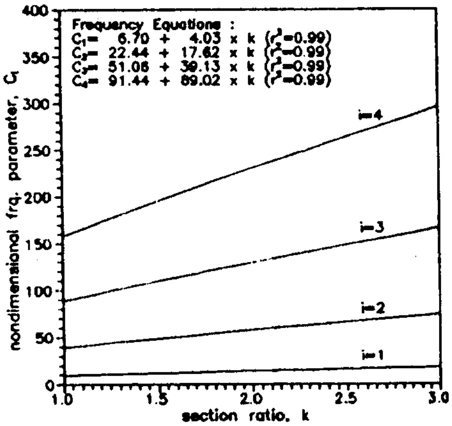


Fig. 2 frequency vs. section ratio
(hinged-hinged, m=1, n=3)

따라서 C_i와 k의 關係를 다음과 같은 1次式으로 回歸分析하면 無次元 固有振動數 方程式을 推定할 수 있다.

$$C_i = a_i + b_i k, \; i = 1,2,3,4,\cdots \qquad (13)$$

윗 式에서 a_i, b_i는 모드별 상수이다.

이 硏究에서는 變斷面 보의 斷面形狀으로 採擇한 變化높이 矩形斷面(m=1, n=3), 變化幅 矩形斷面(m=1, n=1), 正方形斷面/圓形斷面(m=2, n=4)의 3가지 斷面形狀과 힌지-힌지, 힌지-固定, 固定-固定, 自由-固定의 4가지 端部條件을 組合한 12개의 變斷面 보에 대한 固有振動數 方程式을 (13)式과 같은 1次式으로 回歸分析하여 斷面形狀別, 端部條件別로 整理하여 表 1에 收錄하였다.

表 1에서 볼 수 있듯이 모든 境遇에 있어서 r^2이 0.94以上을 보이고 있으며 더우기 대부분의 r^2이 0.99를 나타내고 있어서 C_i와 k는 거의 直線의 相關性을 보이고 있다.

表 1. 變斷面 보의 固有振動數 方程式

斷面形狀	端部條件	固有振動數 方程式(단, 1≤k≤3)
(1)變化높이 矩形斷面 (m=1, n=3)	힌지-힌지 (그림 2)	C_1 = 6.70 + 4.03k (0.99)*
		C_2 = 22.44 + 17.62k (0.99)
		C_3 = 51.06 + 39.13k (0.99)
		C_4 = 91.44 + 69.02k (0.99)
	힌지-固定	C_1 = 6.86 + 8.80k (0.99)
		C_2 = 26.70 + 23.96k (0.99)
		C_3 = 58.24 + 47.54k (0.99)

		C_4 = 101.41 + 79.55k (0.99)
	固定-固定	C_1 = 12.94 + 9.76k (0.99)
		C_2 = 35.86 + 26.76k (0.99)
		C_3 = 70.47 + 52.32k (0.99)
		C_4 = 116.63 + 86.39k (0.99)
	自由-固定	C_1 = −0.87 + 4.29k (0.99)
		C_2 = 7.88 + 14.33k (0.99)
		C_3 = 30.70 + 31.70k (0.99)
		C_4 = 65.09 + 57.42k (0.99)
(2)變化幅 矩形斷面 (m=1, n=1)	힌지-힌지	C_1 = 9.93 + 0.01k (0.99)
		C_2 = 39.43 + 0.04k (0.99)
		C_3 = 88.74 + 0.08k (0.99)
		C_4 = 157.80 + 0.10k (0.99)
	힌지-固定	C_1 = 15.13 + 0.42k (0.94)
		C_2 = 49.68 + 0.40k (0.94)
		C_3 = 103.94 + 0.42k (0.95)
		C_4 = 177.95 + 0.43k (0.96)
	固定-固定	C_1 = 22.64 + 0.00k (0.99)
		C_2 = 62.07 + 0.00k (0.99)
		C_3 = 121.35 + 0.00k (0.99)
		C_4 = 200.34 + 0.01k (0.99)
	自由-固定	C_1 = 2.99 + 0.63k (0.98)
		C_2 = 21.05 + 1.18k (0.98)
		C_3 = 60.61 + 1.25k (0.99)
		C_4 = 119.75 + 1.30k (0.99)
(3)正方形/ 圓形斷面 (m=2, n=4)	힌지-힌지	C_1 = 6.69 + 3.51k (0.99)
		C_2 = 21.70 + 18.15k (0.99)
		C_3 = 49.88 + 39.97k (0.99)
		C_4 = 89.92 + 70.06k (0.99)
	힌지-固定	C_1 = 5.68 + 9.95k (0.99)
		C_2 = 25.02 + 25.51k (0.99)
		C_3 = 56.32 + 49.28k (0.99)
		C_4 = 99.35 + 81.40k (0.99)
	固定-固定	C_1 = 12.36 + 10.23k (0.99)
		C_2 = 35.07 + 27.40k (0.99)
		C_3 = 69.60 + 53.03k (0.99)
		C_4 = 115.71 + 87.13k (0.99)
	自由-固定	C_1 = −3.06 + 6.26k (0.99)
		C_2 = 4.89 + 17.12k (0.99)
		C_3 = 27.36 + 34.78k (0.99)
		C_4 = 61.56 + 60.65k (0.99)

* : ( )은 r^2이고 r은 相關係數이다.

表 1을 利用하면 變斷面 보의 固有振動數를 쉽게 計算할 수 있다. 例로서 다음과 같은 條件의 變斷面 보의 固有振動數를 算出하면 다음과 같다.

變斷面 보의 條件

ℓ = 1m, 힌지-固定 보, 힌지端 直徑 15cm, 固定端 直徑 20cm의 圓形斷面($k=20/15=1.333$, $A_a=1.767\times10^{-2}m^2$, $I_a = 2.485\times10^{-5}m^4$), 보의 材料는 알루미늄($E$=70Gpa, ρ = 2710 N-sec²/m⁴)

固有振動數 算定方法

表 1에서 圓形斷面(m=2, n=4), 힌지-固定의 固有振動數 方程式에 k=1.333을 代入하여 C_i를 구한다.

$$C_1 = 5.68 + 9.95 \times 1.333 = 18.943$$
$$C_2 = 25.02 + 25.51 \times 1.333 = 59.025$$
$$C_3 = 56.32 + 49.28 \times 1.333 = 122.010$$
$$C_4 = 99.35 + 81.40 \times 1.333 = 207.856$$

(9)式에 斷面의 性質 A_a, I_a 및 材料의 機械的 性質 E, ρ를 代入하고 整理하면 ω_i=190.59C_i이다. 이로 부터 ω_i를 구하고 이를 2π로 나누면 다음과 같이 固有振動數가 計算된다.

$$f_1 = \omega_1/2\pi = 190.59 \times 18.943/2\pi = 574.6\text{Hz} \ (574.5)$$
$$f_2 = \omega_2/2\pi = 190.59 \times 59.025/2\pi = 1790.\text{Hz} \ (1790.)$$
$$f_3 = \omega_3/2\pi = 190.59 \times 122.010/2\pi = 3701.\text{Hz} \ (3701.)$$
$$f_4 = \omega_4/2\pi = 190.59 \times 207.856/2\pi = 6305.\text{Hz} \ (6305.)$$

以上에서 固有振動數 方程式을 利用하여 固有振動數를 計算하는 方法을 例示하였으며, ( )속에 收錄한 SAP80의 結果와 아주 優秀하게 接近하는 것을 알 수 있다. 本 硏究에서 推定된 固有振動數 方程式은 工學的으로 利用하기에 充分하다고 思料된다.

5. 결론

이 論文은 變斷面 보의 固有振動數 方程式 推定에 관한 硏究이다. 變斷面 보의 自由振動을 支配하는 微分方程式을 數値解析하여 C_i - k의 關係를 얻고, 이를 回歸分析하여 無次元 固有振動數 方程式을 推定하였다. 變斷面 보의 幾何學的 形狀은 3가지 斷面形狀과 4가지 端部條件을 組合한 12가지 變斷面 보에 대한 無次元 固有振動數 方程式을 推定하였다. 推定된 固有振動數 方程式은 모두 相關係數가 1에 가까운 完全相關性을 보였다. 또한 固有振動數 方程式에 의한 變斷面 보의 固有振動數는 構造解析用 汎用프로그램인 SAP80의 結果와 아주 優秀하게 接近하였다. 本 硏究에서 推定된 變斷面 보의 固有振動數 方程式은 構造關聯 用役會社等 實務分野에서 높은 活用性이 期待된다.

參考文獻

1. Heidebrecht, A. C., " Vibration of Non-Uniform Simply-Supported Beams," Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.93, No. EM2, 1967, pp.1-15.

外 多數의 論文 參考.