

회전기기 진동의 Order Tracking을 위한 재합성 필터의 설계

The Design of Reconstruction Filter
for the Order Tracking of the Rotating Machinery

정 승호* 박 영필** 이 상조**
Seung-Ho Jung Young-Pil Park Sang-Jo Lee

1. 서론

회전 기기의 이상으로 인하여 발생하는 진동은 축 회전 속도의 고주파 성분(super-harmonic)이나 또는 분수조파 성분(sub-harmonic)으로 나타나는 경우가 대부분이기 때문에 [1] 회전기기의 진동을 주파수 영역에서 해석함에 있어 파워 스펙트럼의 주파수 축을 Hz로 나타내기 보다는 축 회전 속도의 order로써 나타내는 것이 매우 유용하다. 스펙트럼을 order로써 나타내기 위해서는 샘플링 시간을 축 회전 속도와 동기(synchronization)시켜야 하는데 이 방법으로는 회전축에 엔코더(encoder)를 부착하여 엔코더에서 발생하는 펄스 신호를 이용하여 샘플링하는 방법과 order tracking 필터를 이용하는 방법이 있다. 그러나 전자의 방법은 원하는 회전축마다 엔코더를 부착하여야 하며 경우에 따라서는 엔코더를 부착하기가 어려운 경우도 있으며, 회전기기의 운전개시나 종료시처럼 회전속도가 급격히 변화하는 경우에는 낮은 주파수에서 중첩(aliasing)에 의한 오차가 수반될 수도 있다. 후자의 방법은 order tracking 필터이외에도 여러 부수장비가 필요하며 기준 주파수(축 회전속도)가 급격히 변화하는 경우 PLL(phase locked loop)에서 tracking 오차가 발생된다.

최근에 발표된 논문에서 [2, 3] 일정한 시간간격으로 샘플링한 데이터들로부터 신호를 재합성하여 회전축의 속도와 동기가 되도록 재 샘플링함으로써 스펙트럼의 주파수를 회전 속도의 order로써 나타내는 방법을 제시하였다. 그러나 위 논문에서는 신호의 재합성에 필요한 재합성 필터(reconstruction filter)의 설계 방법에 대하여 구체적인 언급이 없이 다만 결과만을 논하였다.

따라서 본 논문에서는 재합성 필터의 설계 방법에 대하여 구체적인 방법을 제시하고 또한 동기화 샘플링의 장점 및 고려 사항에 대하여 고찰하였다.

2. 신호의 재합성 이론

연속적인 시간함수 $x(t)$ 를 일정시간 간격 T 로 샘플링 했을 때의 이산화 시간 함수 $x^*(t)$ 는 direct delta 함수 $\delta(t)$ 를 이용하여 식 (1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} x^*(t) &= x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) \\ &= x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \delta(t-kT) \end{aligned} \quad (1)$$

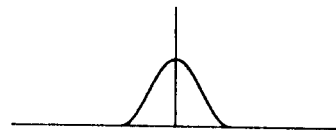
연속함수 $x(t)$ 의 Fourier 변환식을 $X(f)$ 라 하면 이산화 함수 $x^*(t)$ 의 Fourier 변환식 $X^*(f)$ 는

$$\begin{aligned} X^*(f) &= X(f) * \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{k}{T}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

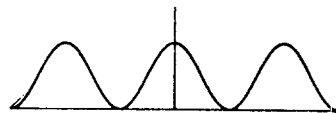
가 되며 여기서 * 는 대합적분(convolution integral)을 의미한다. 따라서 $X(f)$ 에서 가장 높은 주파수 성분을 f_c 라 할때 샘플링 주파수 $f_s (=1/T)$ 가

$$f_s \geq 2f_c \quad (3)$$

이 되면 주파수 영역에서의 중첩(aliasing)이 일어나지 않는다. 그림 1은 $X(f)$ 와 $X^*(f)$ 의 차이를 도식적으로 나타낸 그림이다. 그림 1에서 볼 수 있듯이 이산화 함수 $x^*(t)$ 의 Fourier 변환은 주기함수가 되므로 $x^*(t)$ 로부터 $x(t)$ 를 재합성하기 위해서는 $x^*(t)$ 를 통과대역이 $|f| < f_s/2$ 인 이상적인 저대역필터(ideal low pass filter)를 통과시키면 된다.



(a) 연속함수의 Fourier 변환



(b) 이산화함수의 Fourier 변환

그림 1. 연속함수와 이산화 함수의 Fourier 변환

* 연세대학교 대학원

** 연세대학교 기계과

즉,

$$X(f) = X^*(f)H(f) \quad (4)$$

또는

$$x(t) = x^*(t) * h(t) \quad (5)$$

이며, 여기서

$$H(f) = \begin{cases} T & |f| \leq f_s/2 \\ 0 & |f| > f_s/2 \end{cases} \quad (6)$$

$$h(t) = (\sin \pi t/T) / (\pi t/T) \quad (7)$$

이다.

따라서 재합성된 $x(t)$ 는

$$\begin{aligned} x(t) &= \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \delta(t-kT) \right\} * \frac{\sin \pi t/T}{\pi t/T} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \frac{\sin((\pi/T)(t-kT))}{(\pi/T)(t-kT)} \end{aligned} \quad (8)$$

가 된다.

그러나 여기서의 문제점은 그림 2 에서와 같이 이상적인 저대역 통과 필터의 충격응답함수(impulse response function) $h(t)$ 의 영으로의 접근속도가 매우 느리기 때문에 재합성을 하기 위해서는 많은 계산을 필요로 한다. 이것의 해결 방안으로 샘플링 주파수 f_s 를 Nyquist 샘플링 주파수 $2f_c$ 보다 크게함으로써 그림 3 에서와 같이 저대역 통과 필터의 조건을 완화시키고 이렇게 함으로써 $h(t)$ 의 접근속도를 빠르게 할 수 있다.

만일 샘플링 주파수 f_s 가

$$f_s = 2\beta f_c \quad (\beta > 1) \quad (9)$$

인 경우 재합성 필터의 조건은 다음과 같다.

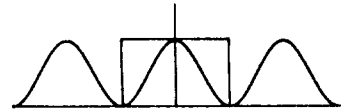
$$H(f) = \begin{cases} T & |f| \leq f_c \\ \text{arbitrary} & f_c < |f| < f_1 \\ 0 & |f| \geq f_1 \end{cases} \quad (10)$$

여기서 $f_1 = \frac{f_s}{2} (1 - \frac{1}{2\beta})$ 이다.

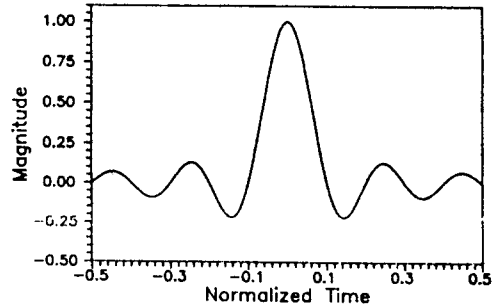
3. 재합성 필터의 설계법

식 (10)을 만족하는 재합성 필터의 형태는 여러가지가 있으나 설계시의 용용성을 부여하기 위해 다음과 같은 형태의 충격응답함수를 갖는 필터에 대하여 고찰하기로 한다.

$$h(t) = \begin{cases} a_0 + 2 \sum_{i=1}^N a_i \cos \frac{2\pi i t}{2MT} & |t| < MT \\ 0 & |t| > MT \end{cases} \quad (11)$$

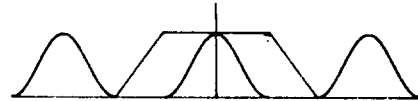


(a) 주파수응답함수

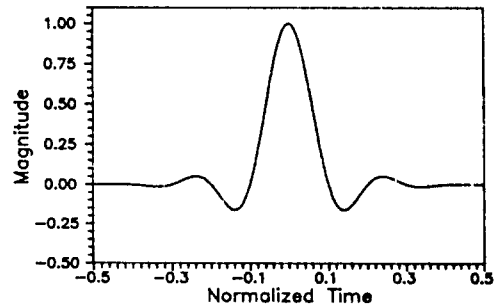


(b) 충격응답함수

그림 2. 이상적인 저대역 통과 필터



(a) 주파수응답함수



(b) 충격응답함수

그림 3. 일반화된 재합성 필터

여기서 M 은 $h(t)$ 가 정의되는 구간을 나타내는 정수로서 결국은 신호 재합성시 $2M$ 개의 데이터가 계산에 사용되며, N 은 Fourier 계수의 갯수로서 정의 된다. 이때 M 이 증가할수록, 또 N 이 증가할수록 재합성 오차는 줄어든다.

식 (11)의 $h(t)$ 를 Fourier 변환하면 식 (12)와 같으며 이것은 폭이 $|t| < MT$ 인 Box 윈도우 함수의 Fourier 변환식을 이용한 결과이다.

$$H(f) = 2MT \sum_{i=-N}^N a_i \frac{\sin \pi(2MTf-i)}{\pi(2MTf-i)} \quad (12)$$

식 (11)과 식 (12)에서 $t'=t/2MT$ 와 $f'=2MTf$ 로 무차원화하면 식 (11)과 식 (12)는 다음 식이 된다.

$$h(t') = a_1 + 2MT \sum_{i=1}^N a_n \cos 2\pi i t' \quad (13)$$

$$H(f') = 2MT \sum_{i=-N}^N a_i \frac{\sin \pi(f'-i)}{\pi(f'-i)} \quad (14)$$

결국 재합성 필터의 설계는 식 (14)가 재합성 필터의 조건식 (10)을 만족하도록 a_i 를 결정하는 문제로 귀착된다. 본 연구에서는 a_i 를 결정함에 있어 선형 최적화 방법(linear programming)을 이용하였다.

M, N 이 유한 일때 식 (10)을 정확히 만족하는 것이 불가능하므로 다음과 같이 δ_1 과 δ_2 를 도입하여 이 δ_1 과 δ_2 가 최소가 되도록 a_i 들을 구한다.

즉, 비용함수(cost function)

$$J = w_1 \delta_1 + w_2 \delta_2 \quad (15)$$

가 최소가 되며 다음의 구속 조건들을 만족하도록 한다. 여기서 w_1, w_2 는 가중치이다.

$$\begin{aligned} H(f') &\leq 1 + \delta_1 & |f'| &\leq (1-\alpha)M \\ H(f') &\geq 1 - \delta_1 & |f'| &\leq (1+\alpha)M \\ H(f') &\leq \delta_2 & |f'| &\geq (1+\alpha)M \\ H(f') &\geq -\delta_2 & |f'| &\geq (1+\alpha)M \\ a_i &\geq 0 & i &\leq (1+\alpha)M \\ a_j &: \text{free} & j &> (1+\alpha)M \\ i, j &= 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (16)$$

여기서 $\alpha = 1 - 1/\beta$ 이다.

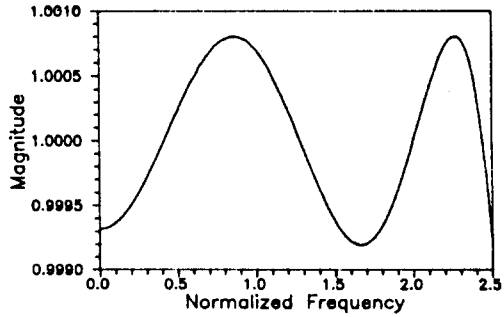
이때, 만약 δ_1 이 주어진다면 비용함수를 $J = \delta_2$ 로 바꾸어도 무방하다. 그리고 위의 방법으로 설계된 필터를 이용하여 신호를 재합성하였을 경우 재합성된 신호는 사용된 샘플테이타 값과 반드시 일치하지 않는다. 이것은 문제가 되지않으나 만약 샘플테이타 값과 반드시 일치하도록 하려면 위와 구속조건 이외에 다음과 같은 구속 조건을 첨가시키면 된다.

$$h(0) = a_0 + 2 \sum_{i=1}^N a_i = 1 \quad (17)$$

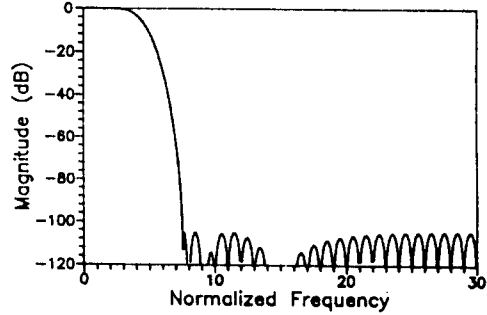
$$h(nT) = a_0 + 2 \sum_{i=1}^N a_i \cos(\pi i n/M) = 0, \quad n=1, 2, \dots, M$$

다음은 위에서 기술된 방법으로 재합성 필터를 설계한 예의 결과를 실었다. 이때 사용된 파라미터의 값은 $M=5, N=7, \delta_1=0.0008$ 이며 설계된 재합성 필터의 주파수 응답 및 충격 응답함수는 그림 4와 그림 3에 나와있다.

그림 4는 구속조건식 (16)만을 고려하여 설계한 것으로 통과대역에서의 최대오차는 0.08%이고 차단대역에서의 최대오차는 대략 104dB 이다. 이 필터는 equiripple의 특성을 갖는다. 그림 5는 식 (17)의 구속조건도 함께 고

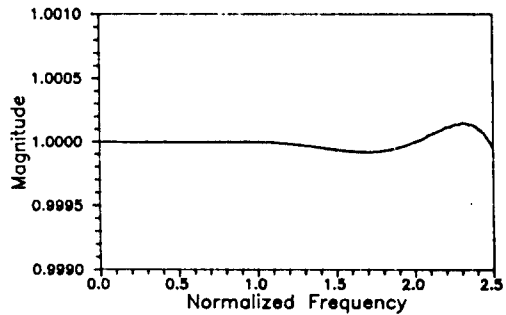


(a) 통과영역에서의 주파수응답

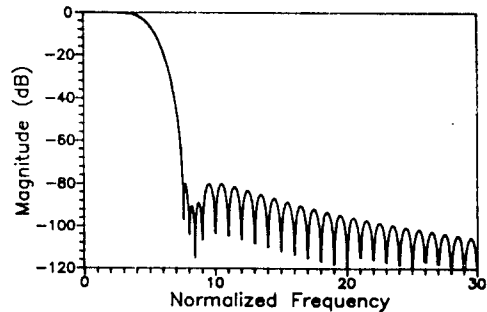


(b) 전체영역에서의 주파수응답

그림 4. 식 (16)을 만족하는 재합성 필터



(a) 통과영역에서의 주파수응답



(b) 전체영역에서의 주파수응답

그림 5. 식 (16-17)을 만족하는 재합성 필터

러한 경우로서 통과대역에서의 최대오차는 0.0015%이고 차단대역에서의 최대오차는 80dB 이다. 후자는 전자보다 통과대역에서의 오차는 매우 좋으나 차단영역에서의 최대오차는 크다. 하지만 점점 감소하는 경향을 가지므로 전체적으로는 성능이 나쁘다고 할 수는 없다.

3. 동기화 샘플링의 장단점

회전기기의 진동을 해석함에 있어 동기화 샘플링을 행한 경우 많은 장점을 갖는다. 만약 기준 주파수(즉 회전속도)의 한 주기당 P개를 동기화 샘플링을 했다면 해석 가능한 최대 order는 P가 되고, FFT(또는 DFT)하는 데이터의 갯수를 기준 주파수의 M주기가 되도록 잡는다면 분해능은 $1/M$ order가 된다. 또한 기준 주파수의 주기와 일치되도록 샘플링하기 때문에 파워의 누설(Power Leakage)이 발생하지 않는다. 그리고 선택된 order의 스펙트럼을 보고자 할 때 FFT 대신 DFT를 사용할 수 있어 불필요한 계산을 줄일 수 있다. 단점으로는 재합성 필터가 causal하지 않기 때문에(음의 시간에서 충격응답함수의 값이 영이 아님) 실시간 처리가 불가능하다는 점이다. 그러나 회전기기의 운전개시나 종료시의 진동해석시(이 때 많은 정보를 수집할 수 있음) 아주 유용하게 사용할 수 있으며 이상 진단의 경우 주기적으로 데이터를 일괄 처리하여 order의 스펙트럼을 조사함으로써 이상여부를 쉽게 파악할 수 있다.

4. 재합성 필터의 사용예

위에서 예로 든 필터를 사용하여 sweep sine의 스펙트럼을 order로써 나타내보자. 여기서 재샘플링해야 할 시간 간격은 참고문헌에(3) 나온 Computed Order Tracking 방법을 사용하였다. sweep sine의 신호는 10 Hz 에서 80 Hz 까지 20 Hz/sec로 주파수를 증가시켰으며, 샘플링 시간 간격은 0.002 sec로 최대주파수 80 Hz에 대한 Nyquist 샘플링 주파수보다 약 3배정도 크게하였다. 이들 데이터로부터 재합성필터를 이용하여 신호를 재합성한 후, 기준 주파수의 한 주기당 12개의 데이터를 재샘플링 하였다.

그림 6은 고정 시간간격으로 샘플링 한 경우의 신호를 보여주며 그림 7은 재합성 필터를 사용하여 재샘플링한 경우의 신호를 보여주고 있다.

5. 결론

본 논문에서는 스펙트럼을 기준 주파수의 order축으로 나타내는데 필수적인 동기화 샘플링을 수행함에 있어 필요한 재합성 필터의 설계법에 대하여 연구하였다. 재합성 필터를 사용함으로써 기존의 방법에서 발생하는 여러가지 오차를 방지할 수 있으며 소프트웨어적으로 처리하기 때문에 부수적인 장비가 필요하지 않다. 또한 원하는 order만의 스펙트럼을 보고자 할 때는 FFT 대신 DFT를 사용함으로써 불필요한 계산을 줄일 수 있다.

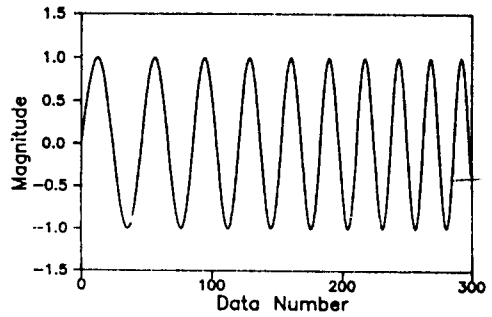


그림 6. 일정 시간간격으로 샘플링한 신호

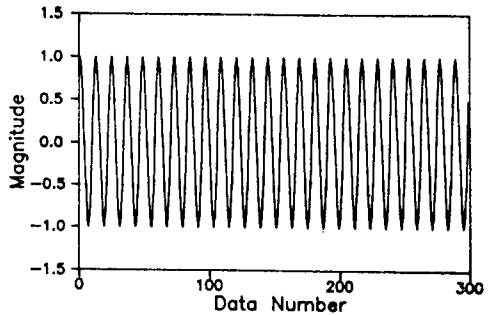


그림 7. 재합성필터를 이용하여 동기화 샘플링한 신호

참고 문헌

1. Bently, D.E., "Interpreting Vibration Information from Rotating Machinery," Sound and Vibration, February, 1986, pp14 - 23.
2. Potter, Ron, "A New Order Tracking Method for Rotating Machinery," Sound and Vibration, September, 1990, pp30 - 34.
3. Potter, Ron and Gribler, Mike, "Computer Order Tracking Obsoletes Older Methods," SAE Noise and Vibration Conference, May 16-18, 1989, pp63 - 67.
4. Brigham, E.O., The Fast Fourier Transform and Its Applications, Prentice-Hall, 1988.