

편심배치방식 자기부상 시스템의 본드선도 모델링 및 다변수 제어

오 박 전 수 김 종 식
부산대학교 공과대학 기계설계공학과

Bond Graph Modeling and Multivariable Control of Maglev systems with a Combined Lift and Guidance

Jeon Soo Park Jong Shik Kim
Dept. of Mechanical Design Eng.
Pusan National University

ABSTRACT

A logical and systematic procedure to derive a mathematical model for magnetically levitation(maglev) systems with a combined lift and guidance is developed by using bond graph. First, bond graph is constructed for the energy-feeding system with magnetic leakage flux. And, the overall maglev system in which lift and guidance dynamics are coupled is modeled by using the concept of multi-port field in bond notations. Finally, the LQG/LTR control systems are designed for single-input single-output and for multi-input multi-output maglev systems.

In this paper, it has been shown that the bond graph is an excellent method for modeling multi-energy domain systems such as maglev systems and the multivariable control system is required to improve the performance of the maglev system with a combined lift and guidance.

1. 서론

흡인식 자기부상 시스템은 자석과 철 레일 사이를 통과하는 자속밀도의 강약에 따라 부상력이 결정되기 때문에 본질적으로 불안정한 시스템이며, 또한 시스템의 매개변수가 공진장(air gap)의 변화에 매우 민감한 비선형 시스템으로써 제어동역학 측면에 필요한 모델식을 찾기가 쉽지않다. 특히, 부상과 안내를 겸용하게 되는 편심배치방식(stagger configuration type) 자기부상 시스템은 부상력과 안내력이 편심량 및 공진장에 대하여 서로 강한 연성효과(coupling effect)를 가지고 있기 때문에 수직 부상력과 측면 안내력에 관한 수학적 모델식을 구축하는데 많은 어려움이 있다.

한편, 제어기 설계과정에서는 개별배치방식 자기부상 시스템의 부상모델(support model)만을 대상으로한 제어기 설계[1,2]가 대부분이며, 편심배치방식 자기부상 시스템의 모델을 사용했다고 하더라도 측면 안내특성을 무시하거나 부상과 안내방향의 동역학을 각각 분리하여 개별적으로 제어한 정도이다[3]. 이것은 편심배치방식 자기부상 시스템의 부상력과 안내력이 수직변위인 공진장과 측면변위인 편심량에 대하여 매우 민감한 비선형 특성이 있음을

상기해볼 때, 전체 자기부상 시스템의 구현시 강인성 문제가 크게 대두될 것으로 사료된다.

본 논문에서는 전기/자기 및 기계적 요소들이 복합되어 이루어진 편심배치방식 자기부상 시스템의 수학적 모델식을 보다 조직적이며 논리 정연하게 유도하기 위하여 본드선도 기법[4,5]을 이용한다. 우선, 시스템의 내부단자로서 구성되는 자기변환기에 자속 흐름 확장 및 자속 유출량을 고려하여 부상방향의 에너지 공급 시스템을 모델링한다. 다음, 지지 및 안내방향의 동역학을 동시에 고려한 편심배치방식 자기부상 시스템을 본드선도의 다접점 필드(multiport field) 개념[6]을 이용하여 모델링한다. 끝으로, 안정도-강인성 및 성능-강인성 문제를 제어시스템 설계시 직접 고려할 수 있는 LQG/LTR(linear quadratic Gaussian control with loop transfer recovery)제어방법을 적용하여 단일 입출력 및 다변수 제어시스템[7,8]을 설계하여 그 성능들을 비교분석한다.

2. 본드선도에 의한 자기부상 시스템의 모델링

자기부상 시스템의 이상화 모델은 일반적으로 그림2.1과 같다.

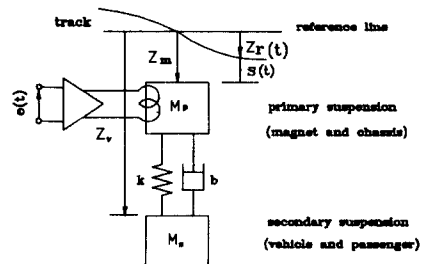


그림2.1 흡인식 자기부상 시스템
Fig. 2.1 Schematic diagram of the maglev system

자기부상 시스템은 1)입력단과 연결된 에너지 공급 시스템의 동역학 2)승차감 및 안정성 향상을 위하여 고려된 2차 현가장치의 동역학 3)부상력과 트랙의 상호 작용으로 인한 처짐 동역학이 조합되어 나타나는 3개의 에너지 접점 구조를 갖는 본드선도로 표시될 수 있다. 하지만 본 논문에서는 에너지 공급 시스템만을 대상으로 하여 2차 현가 및 트랙의 처짐 동역학이 무시된 편심배치방식 자기부상 시스템에 대하여 본드선도 기법을 적용하여 조직적으로 모델링하기로 한다.

2.1 에너지 공급 시스템(energy feeding system) 모델링

그림2.2는 구동자석의 기하학적 형상 및 에너지 공급 시스템에 대한 개략도이다.

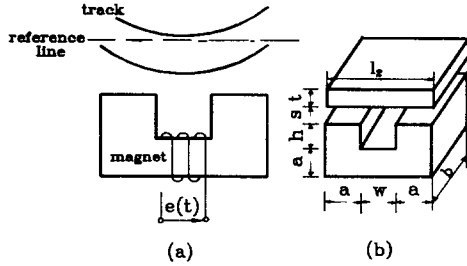


그림2.2 에너지 공급 시스템과 자석의 형상

Fig. 2.2 Energy feeding system and the geometric shape of driving magnet

여기서 s , l_1 , l_2 는 각각 자속흐름이 발생하는 공진장, 자석 그리고 트랙의 길이를 나타내고 t 는 트랙의 두께를 표시한다.

이제 에너지 공급시스템의 동적방정식을 유도하기 위하여 자기 플럭스는 자석의 극단과 트랙 사이에 수직으로 흐르고, 차량의 전방 속도에 의하여 트랙에 유기되는 와류전류(eddy current)를 무시하며 자석 특성상 발생할 수 있는 포화 효과를 무시하고 선형구간에서만 고려하기로 한다. 이때 전기장과 기계장을 연결시켜 주는 자기장에 대한 본드선도는 그림2.3과 같다.

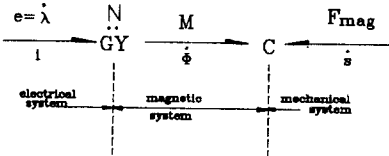


그림2.3 에너지 공급 시스템의 자기변환기에 대한 본드선도

Fig. 2.3 Bond graph of the magnetic transducer interacting with electrical and mechanical systems

그림2.3은 입력전류 $i(t)$ 에 의하여 출력단에 자기력 M 을 발생시키고 발생된 자기장속에서 공진장을 통과하는 자속 ϕ 에 의하여 다시 입력단에 상응하는 출력전압 $e(t)$ 를 부가하는 본드선도로서 자이레이터 계수인 코일의 감은 수 N 이 그들의 관계를 규정짓고 있다. 또한 공진장과 자석 그리고 레일을 통과할 때 축적되는 에너지 저장 만큼의 자기력 감소를 나타내기 위하여 커패시턴스와 등가인 에너지 저장요소가 첨가되어 다음의 관계식을 갖는다.

$$M = R_{eq} \cdot \phi \quad (2.1)$$

여기서 R_{eq} 는 공진장과 자석 그리고 트랙에 관한 리럭턴스(reluctance)인 R_{gap} , R_{mag} 그리고 R_{track} 의 합으로서 전자석의 특성계수이며 기계시스템의 스프링과 같은 효과를 갖는다. 즉,

$$R_{eq} = 2R_{gap} + R_{mag} + R_{track} \\ = \frac{1}{\mu_0 A} \left[2s + l_1/\mu_1 + l_2/\mu_2 \right] \quad (2.2)$$

여기서 μ_0 , μ_1 및 μ_2 는 각각 공기부과율, 트랙부과율 그리고 자석

부과율을 나타내고 A 는 공진장에서 자속흐름에 수직인 자석의 단면적($A=ab$)이다. 따라서 트랙과 자석 사이의 실질 변위인 공진장 s 가 기계장에서 첨가되는 또 하나의 입력이 되므로 자기변환기를 중심으로 전기장에 에너지 발산요소로 전기저항 R 을, 기계장에 질량 M_p 의 에너지 저장요소로 이너턴스 I 를 첨가하게 되면 그림2.4와 같은 에너지 공급 시스템의 본드선도를 얻을 수 있다.

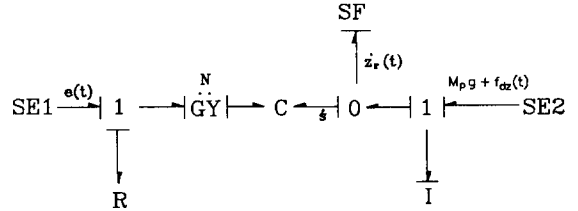


그림2.4 에너지 공급 시스템의 본드선도

Fig. 2.4 Bond graph of the energy feeding system

여기서 z_r 는 트랙과의 상호작용으로 인한 처짐량이고 $f_{dz}(t)$ 는 시스템 외부에서 발생할 수 있는 중력을 제외한 모든 외력이다. 따라서 그림2.4로부터 에너지 공급 시스템에 대한 동적방정식은 다음과 같이 유도된다.

$$\frac{\mu_0 AN^2 \dot{i}}{(2s+l_1/\mu_1+l_2/\mu_2)} - \frac{\mu_0 AN^2 \dot{s}}{(2s+l_1/\mu_1+l_2/\mu_2)^2} = e(t) - R \cdot i \quad (2.3a)$$

$$M_p \ddot{z}_m + F_{mag} = M_p g + f_{dz}(t) \quad (2.3b)$$

여기서 자기변환기의 입력전류 $i(t)$ 에 대한 출력, 자기부상력 F_{mag} 는 다음과 같다.

$$F_{mag} = \frac{\mu_0 AN^2 i^2}{(2s+l_1/\mu_1+l_2/\mu_2)^2} = \frac{1}{\mu_0 A} \left[\frac{N \cdot i}{R_{eq}} \right]^2 \quad (2.4)$$

만약, 자석과 트랙 사이의 자속흐름유출(flux leakage)을 고려하고자 할 경우에는 앞에서 그려진 본드선도에 유출량을 공통흐름 접합으로 연결함으로써 쉽게 확장할 수 있다. 이와같이 본드선도는 에너지 증감이 발생하는 위치에 적절한 접합요소를 추가함으로써 확장된 모델식을 쉽게 얻을 수 있는 장점을 갖고 있다.

그림2.5는 유출량을 고려한 경우에 대한 에너지 공급 시스템의 본드선도이다. 여기서 ϕ 는 total flux, ϕ_n 는 net flux 그리고 ϕ_l 는 leakage flux 이다.

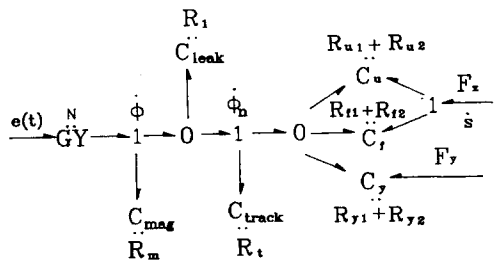


그림2.5 플럭스 유출을 고려한 경우의 본드선도

Fig. 2.5 Bond graph of the maglev system with a flux leakage

여기서 실제 자속이 유출하는 형태를 자석의 한쪽 극에서 다른 극으로의 직접적인 유출과 맨 끝단에서 발생하는 와류유출로 고려하면 유출 발생이 고려된 리럭턴스 R_l 을 다음과 같이 구할 수 있다[9].

$R_l = (\text{직접 유출 리액턴스}) + (\text{외류 유출 리액턴스})$

$$= \frac{1}{\mu_0 A} \left[w + \frac{2b}{a} (a + w) \right] \quad (2.5)$$

따라서 자기장의 공급 자기력 M_1 과 자기변환기의 출력자속 ϕ_n 의 관계를 정리하여 전체 리액턴스 R_{tot} 을 구하여 $M_1 = R_{tot} \phi_n$ 을 정립시켜 주게 되면 플럭스 유출을 고려하지 않은 식(2.2)의 R_{eq} 대신 R_{tot} 로 대치함으로써 유출이 고려된 에너지 공급시스템의 동적방정식을 유도할 수 있다. 그림2.5의 결합방정식에서 전체 리액턴스 R_{tot} 과 그때의 자기 부상력 F_{mag} 는 각각 다음과 같다.

$$R_{tot} = [1 + (R_m/R_l)] R_g(s) + R_m + R_t + (R_m R_t / R_l) \quad (2.6)$$

$$F_{mag} = \frac{1}{\mu_0 A} \left[\frac{N \cdot i}{R_{tot}} \right]^2 \quad (2.7)$$

2.2 편심배치방식 자기부상 시스템의 모델링

자기부상 시스템은 레일 표면 위를 부상한 상태에서 주행하기 때문에 주행시의 공기 저항, 트랙의 불균일 등으로 인하여 발생하는 앞뒤방향의 흔들림, 좌우방향의 병진운동 그리고 한쪽으로는 쏠림운동에 대하여 지지 및 안내를 위한 제어장치가 요구된다. 본 논문에서는 차량을 경량화하고 궤도 구조도 비교적 단순하게 하기 위하여 지지 자석과 안내 자석을 겸용하는 편심배치방식 자기부상 시스템에 대하여 생각하기로 한다.

일반적으로 그림2.6과 같이 폭을 달리 하는 2개의 U형태 자석을 마주보게 배치하게될 때 자속 흐름에 대한 자기력을 평가하기 위하여 플랜지효과(flange effect)에 의한 부가폭(additional width) δ 를 계산해야 한다.

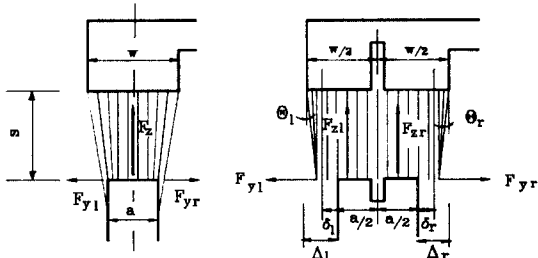


그림2.6 플랜지효과에 의한 부가폭

Fig. 2.6 Parameters for derivation of lift and guidance forces

부가폭 δ 는 보통 자석의 구석 4곳에 대하여 복소 평면상에 등각 사상(conformal mapping)을 수행하여 얻게 되는데 본 논문에서는 참고 논문[10]을 참조하여 δ 를 다음과 같이 선정한다.

$$\delta = \frac{s}{\pi} + \frac{\Delta}{\pi} \tan^{-1}(s/\Delta) \quad (2.8)$$

이제 본드선도를 구축하기 위하여 자기장의 변환기 성질을 파악하기로 한다. 그림2.6으로부터 균일흐름 자속, 플랜지 효과로써 부가된 길이 δ 만큼 확장되어 흐르는 수직방향의 플랜지 자속 그리고 측면 자속에 대한 리액턴스 R_u , R_f 및 R_y 는 각각 다음과 같이 계산된다.

$$R_u = \frac{s}{\mu_0(ab)} \quad (2.9)$$

$$R_f = \frac{s}{\mu_0(\delta_r + \delta_l)b} \quad (2.10)$$

$$R_y = \frac{s}{\mu_0(\text{eff}_r(\Delta-\delta) + \text{eff}_l(\Delta-\delta))b} \quad (2.11)$$

여기서 b 는 자석의 길이, δ 는 부가폭 그리고 $\text{eff}(\Delta-\delta)$ 는 측면방향으로 뻗어가는 자속흐름의 길이를 균일흐름으로 등가할 때의 유효 길이를 의미하며, 유효길이는 다음과 같이 계산된다.

$$\pi \cdot \text{eff}(\Delta-\delta) = s(\theta_1 - \theta_r) = s \cdot \tan^{-1} \frac{\Delta}{s} \quad (2.12)$$

따라서 완전한 U형태 자석에 있어서 자속흐름 유출이 고려된 본드선도는 자속의 흐름에 따라 자석과 트랙 그리고 공진장에 커패시턴스 형태로 자기 에너지를 저장한 앞 절의 에너지 공급 시스템과 마찬가지로 자기력 감소가 발생하는 지점에 공통작용접합을 부가하고 그 사이에 공통흐름접합을 삽입하여 커패시턴스 형태의 에너지 저장요소를 첨가함으로써 얻을 수 있다. 그림2.7은 자속흐름 유출이 고려된 U형태 자석에 대한 본드선도이다.

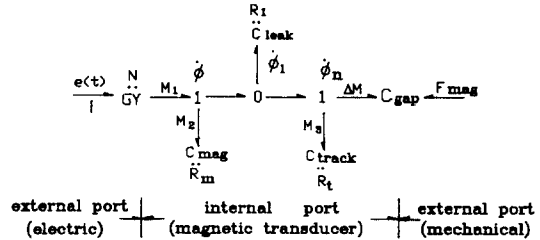


그림2.7 자석흐름 유출이 고려된 U형태 자석의 본드선도
Fig. 2.7 Bond graph of the U-shaped magnet with flux leakage

그림2.7에 표시되어 있는 커패시턴스 C_{mag} , C_{track} 및 C_{leak} 에 대한 리액턴스 R_{mag} , R_{track} , R_{leak} 는 식(2.2)와 식(2.5)에 각각 정의되어 있다. 그리고 커패시턴스 C_u , C_f , C_y 에 대한 요소방정식을 결정하는 각각의 리액턴스 R_u , R_f 및 R_y 는 식(2.9), 식(2.10) 그리고 식(2.11)에 표시되어 있다.

다음, 에너지 저장요소에 저장되는 에너지를 이용하여 균일흐름 및 플랜지효과에 의하여 발생하는 수직 부상력 F_{zu} , F_{zf} 그리고 측면 안내력 F_y 를 구하면 각각 다음과 같다.

$$i) \quad E(\phi_u, s) = \frac{1}{2} (R_{u1} + R_{u2}) \phi_u^2 \quad (2.13)$$

$$F_{zu} = \frac{\partial E(\phi_u, s)}{\partial s} = \frac{\mu_0 AN^2 i^2}{4s^2} \quad (2.14)$$

$$ii) \quad E(\phi_f, s) = \frac{1}{2} (R_{f1} + R_{f2}) \phi_f^2 \quad (2.15)$$

$$F_{zf} = \frac{\mu_0 AN^2 i^2}{4s^2} \left[\frac{2s}{\pi a} + \frac{\Delta_r}{\pi a} \tan^{-1} \frac{s}{\Delta_r} + \frac{\Delta_l}{\pi a} \tan^{-1} \frac{s}{\Delta_l} \right] \quad (2.16)$$

$$iii) \quad E(\phi_y, s) = \frac{1}{2} (R_{y1} + R_{y2}) \phi_y^2 \quad (2.17)$$

$$F_y = \frac{\mu_0 AN^2 i^2}{4s^2} \left[\frac{s}{\pi a} \right] \left[\tan^{-1} \frac{\Delta_r}{s} - \tan^{-1} \frac{\Delta_l}{s} \right] \quad (2.18)$$

따라서 그림2.7의 본드선도로부터 얻을 수 있는 결합 방정식들을 이용하여 1개의 U자형 자석에서 얻을 수 있는 수직 부상력 F_z 와 측면 안내력 F_y 를 구하면 각각 다음과 같다.

$$F_z = \frac{\mu_0 AN^2 i^2}{4s^2} \left[1 + \frac{2s}{\pi a} + \frac{\Delta r}{\pi a} \tan^{-1} \frac{s}{\Delta r} + \frac{\Delta l}{\pi a} \tan^{-1} \frac{s}{\Delta l} \right] \quad (2.19)$$

$$F_y = \frac{\mu_0 AN^2 i^2}{4s^2} \left[\frac{s}{\pi a} \right] \left[\tan^{-1} \frac{\Delta r}{s} - \tan^{-1} \frac{\Delta l}{s} \right] \quad (2.20)$$

만약 자석과 레일의 폭을 같게하고 중심선에 대한 자석 배치를 그림 2.8과 같이 y만큼 편심시킨다면, 즉 $(\Delta r = -\Delta l) \rightarrow y$ 이 되면, 이때 자석배치 방식은 편심배치방식이 된다.

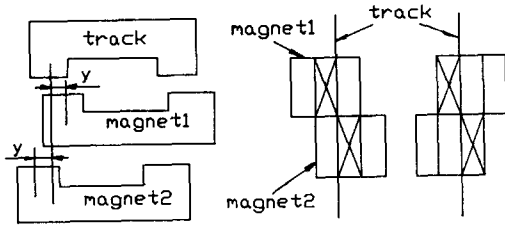


그림 2.8 편심배치방식
Fig. 2.8 Stagger configuration type

그림 2.8에 대한 본드선도를 구축하기 위하여 공간장의 균일흐름 자속 R_u 를 균일한 면적흐름으로 이상화하여 다음과 같이 수정한다.

$$R_u(s, y) = \frac{s}{\mu_0(a - k_r \cdot y)b} \quad (2.21)$$

여기서 k_r 은 이상화모델에 대한 보정계수로서 일반적으로 $-a/y < k_r < a/y$ 범위의 값을 가지며 자속의 균일면적 흐름에 대한 오차의 정도에 따라서 그 값이 결정된다.

따라서 식(2.9)를 식(2.21)로 대체하고 식(2.19)와 식(2.20)에 $\Delta r = -\Delta l$ 을 y 로 치환하게 되면 편심된 2개의 자석에서 얻을 수 있는 편심배치방식 자기부상 시스템의 수직 부상력 F_z 와 측면 안내력 F_y 에 대한 자기력은 다음과 같다.

$$F_z(y, s) = \frac{\mu_0 AN^2 i^2}{4s^2} \left[1 + \frac{2s}{\pi a} + \frac{y}{a}(1 - k_r) - \frac{2y}{\pi a} \tan^{-1} \frac{y}{s} \right] \quad (2.22)$$

$$F_y(y, s) = \frac{\mu_0 AN^2 i^2}{4s^2} \left[\frac{2s}{\pi a} \tan^{-1} \frac{y}{s} \right] \quad (2.23)$$

식(2.22)와 식(2.23)은 편심배치방식 자기부상 시스템의 수직 부상력과 측면 안내력에 대한 일반적인 수학적 모델을 표현하고 있다. 이것을 자기부상 시스템을 제어하고자할 때 흔히 참고하고 있는 식(3.9)과 비교해보면 측면 변위가 수직 부상력에 실제적으로 기여하는 정도를 나타내는 $(1 - k_r)y/a$ 항이 더 첨가되어 있다. 이는 식(2.21)에서 보는 바와 같이 이상화 모델에 대한 보정계수인 $k_r=1$ 일때의 경우로서 자석과 레일이 적당히 편심된 경우에는 자석과 레일이 서로 마주보는 폭 만큼만 자속흐름이 있다고 생각하는 경우이다. 하지만 실제적으로는 편심량 y 가 고정값으로 한정되지 않고 변할 수 있는 값으로서 자속흐름의 직진성이 항상 보장되는 값을 것으로 사료되는 바, 실험에 의하여 k_r 에 따른 수직 부상력의 평가가 더욱 이루어져서 편심량이 수직 부상력에 미치는 영향이 해석되어져야만 할 것으로 여겨진다.

그림 2.9는 편심배치방식 자기부상 시스템의 전체 본드선도이다. 여기서 $f_{az}(t)$ 및 $f_{ay}(t)$ 는 시스템 외부에서 발생하는 힘으로 특히, $f_{ay}(t)$ 는 차량측면에서 불어오는 돌풍(wind gust)을 의미한다. 그리고 $z_r(t)$ 및 $y_r(t)$ 는 트랙 표면의 불규칙(irregularity)

및 트랙 처짐에 의한 변위 입력을 나타낸다.

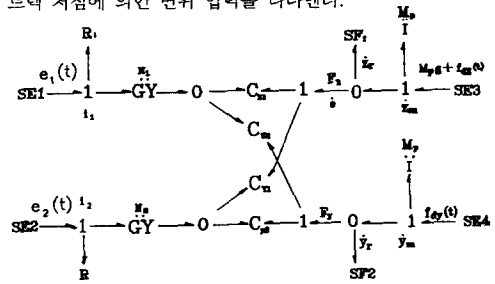


그림 2.9 편심배치방식 자기부상 시스템의 전체 본드선도
Fig. 2.9 Overall bond graph of the maglev system with a combined lift and guidance

그림 2.9로부터 전체 자기부상 시스템의 기계장에서의 동적방정식은 다음과 같이 유도된다.

$$M_p \ddot{z}_m = M_p g - \frac{\mu_0 AN^2}{4s^2} \left[i_1^2 \alpha(s, y) + i_2^2 \alpha(s, -y) \right] + f_{dz}(t) \quad (2.24a)$$

$$M_p \ddot{y}_m = - \frac{\mu_0 AN^2}{4s^2} \left[i_1^2 \beta(s, y) + i_2^2 \beta(s, -y) \right] + f_{dy}(t) \quad (2.24b)$$

여기서 $\alpha(s, y)$ 와 $\beta(s, y)$ 는 공간장의 균일흐름 자속에서 발생하는 오차를 무시하여 $k_r = 1$ 일 때의 값으로서 각각 다음과 같다.

$$\alpha(s, y) = \left(1 + \frac{2s}{\pi a} - \frac{2y}{\pi a} \tan^{-1} \frac{y}{s} \right) \quad (2.25)$$

$$\beta(s, y) = \left(\frac{2s}{\pi a} \right) \tan^{-1} \frac{y}{s} \quad (2.26)$$

다음, 전기장에서의 전류/전압 관계식을 본드선도 모델링 방법으로 유도하기 위하여 자석의 편심배치 구조에서 자속 흐름을 균일한 면적흐름으로 이상화할 때 전기에너지 저장요소의 계수인 인덕턴스 $L(s, y)$ 를 구하면 다음과 같다.

$$L(s, y) = \frac{\mu_0 AN^2}{2s} \left[1 - k_r \frac{y}{a} \right] \quad (2.27)$$

그러므로 식(2.27)과 그림 2.9의 본드선도에서 전기장에 관한 접합 방정식을 이용하여 전기장에서의 전류/전압 관계식을 구하면 다음과 같다.

$$v(t) = e_1(t) = Ri(t) + \frac{d}{dt} \left[\frac{\mu_0 AN^2 i}{2s} \left(1 - k_r \frac{y}{a} \right) \right] \quad (2.28)$$

지금까지 부상/안내를 위한 편심배치방식 자기부상 시스템에 관한 동적방정식인 식(2.24)와 식(2.28)을 유도하였다. 다만 자석과 트랙에서의 자속 흐름에 대한 자기력 감소의 효과가 무시되었고 공간장을 통과할 때 나타날 수 있는 자속 유출이 배제되었지만, 이것들은 공간장에서의 리턴스에 비해 무시할 만하다. 그러므로 식(2.24)와 식(2.28)을 적용하여 부상/안내 겸용 자기부상 시스템의 동적거동을 해석하고 제어시스템을 설계하는 데는 무리가 없을 것으로 사료된다.

끝으로, 제어시스템 설계목적상 앞에서 유도된 부상/안내를 위한 편심배치 방식 자기부상 시스템의 비선형 동적방정식들을 작동점 (s_0, y_0) 및 $(s_0, -y_0)$ 근처에서 선형화 하기로 한다. 우선 식(2.24)에서 작동점 근처에서 차량을 지지해야 하는데 요구되는 전류 i_0 를 계산하면 다음과 같다.

$$i_0 = \left(\frac{2M_p g s_0^2}{\mu_0 AN^2 a_0} \right)^{1/2}, \quad i_{10} = i_{20} \quad (2.29)$$

여기서 $\alpha_0 = \alpha(s_0, y_0)$ 그리고 $\beta_0 = \beta(s_0, y_0)$ 를 의미한다.

먼저, 식(2.28)의 전류/전압 관계식을 작동점 및 정상상태에서의 전류 i_0 근처에서 작은 편차를 가했을 때 (i_0, s_0, y_0) 및 ($i_0, s_0, -y_0$) 근처에서 Taylor 급수전개를 하여 작동점 근처에서의 편차 $\Delta i(t), \Delta s(t)$ 그리고 $\Delta y(t)$ 의 제곱 이상의 고차항을 무시하면 다음과 같은 선형화된 방정식들을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \Delta v_1(t) &= R_1 \Delta i_1(t) + L_{01} \dot{\Delta i}_1(t) - i_0 [Z_{s1} \Delta \dot{s}(t) + Z_y \Delta \dot{y}(t)] \\ \Delta v_2(t) &= R_2 \Delta i_2(t) + L_{02} \dot{\Delta i}_2(t) - i_0 [Z_{s2} \Delta \dot{s}(t) + Z_y \Delta \dot{y}(t)] \end{aligned} \quad (2.30)$$

여기서 L_{0i}, Z_{si} 그리고 Z_y 는 공칭 인덕턴스, 단위 수직길이당 인덕턴스 그리고 단위 측면길이당 인덕턴스로서 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} L_{01} &= \frac{\mu_0 AN^2}{2s_0} \left[1 - \frac{k_r}{a} \cdot y_0 \right], & L_{02} &= \frac{\mu_0 AN^2}{2s_0} \left[1 + \frac{k_r}{a} \cdot y_0 \right], \\ Z_{s1} &= \frac{\mu_0 AN^2}{2s_0^2} \left[1 - \frac{k_r}{a} \cdot y_0 \right], & Z_{s2} &= \frac{\mu_0 AN^2}{2s_0^2} \left[1 + \frac{k_r}{a} \cdot y_0 \right], \\ Z_y &= \frac{\mu_0 AN^2}{2s_0} \left(-\frac{k_r}{a} \right) \end{aligned}$$

그리고 기계장의 동적방정식인 식(2.24)를 선형화하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M_p \Delta \ddot{z}_m &= K_{zz} \Delta s(t) + K_{zy} \Delta y(t) + K_{zi1} \Delta i_1(t) + K_{zi2} \Delta i_2(t) \\ M_p \Delta \ddot{y}_m &= K_{yz} \Delta s(t) + K_{yy} \Delta y(t) + K_{yi1} \Delta i_1(t) + K_{yi2} \Delta i_2(t) \end{aligned} \quad (2.31)$$

여기서

$$\begin{aligned} K_{zz} &= \frac{\partial F_z}{\partial s} = \frac{\mu_0 AN^2}{2} \frac{i_0}{s_0} \left[\frac{2\alpha_0 + \alpha_1}{i_0} \right], & K_{zy} &= 0, \\ K_{yy} &= \frac{\partial F_y}{\partial y} = -\frac{\mu_0 AN^2}{2} \frac{i_0}{s_0} \cdot 2 \cdot \beta_1, & K_{yz} &= 0, \\ -K_{yi1} &= K_{yi2} = \frac{\partial F_y}{\partial i} = \frac{\mu_0 AN^2}{2} \frac{i_0}{s_0} \left[\frac{\beta_0}{i_0} \right], \\ K_{zi1} &= K_{zi2} = \frac{\partial F_z}{\partial i} = -\frac{\mu_0 AN^2}{2} \frac{i_0}{s_0} \left[\frac{\alpha_0}{i_0} \right], \\ \alpha_1 &= \frac{s_0}{\pi a} \left(1 + \frac{y_0^2}{s_0^2 + y_0^2} \right), & \beta_1 &= \frac{1}{\pi a} \left(\frac{s_0^2}{s_0^2 + y_0^2} \right) \end{aligned}$$

3. 자기부상 시스템의 LQG/LTR 제어기 설계

3.1 선형화 모델 및 설계사양 설정

앞 장에서 유도한 편심배치방식 자기부상 시스템의 선형화 모델을 상태공간 모델식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_p x_p(t) + B_p u_p(t) + \Gamma_p d(t) \\ y(t) = C_p x_p(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

여기서, 상태벡터 $x(t) = [\Delta s \ \Delta \dot{z}_m \ \Delta \ddot{z}_m \ \Delta y \ \Delta \dot{y} \ \Delta \ddot{y}_m]^T$ 이고 제어 입력 $u(t)$ 는 자석1과 자석2의 각 전압 그리고 외란입력 $d(t)$ 는 트랙 불균일성에 대한 속도성분 및 차량의 측면으로부터 받는 바람에 의한 외력이다. 출력벡터 $y(t)$ 는 공진장과 측면변위이며 시스템 행렬 A_p 와 입력행렬 B_p, Γ_p 는 각각 다음과 같다.

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 & A_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & A_{62} & 0 & A_{64} & A_{65} & A_{66} \end{bmatrix}, \quad B_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ B_{31} & B_{32} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -B_{61} & -B_{62} \end{bmatrix}, \quad \Gamma_p = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ D_{31} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ D_{61} & D_{62} \end{bmatrix}$$

여기서

$$\begin{aligned} A_{31} &= \frac{K_{zz}}{2M_p} \left[\frac{R_1}{L_{01}} + \frac{R_2}{L_{02}} \right], & A_{32} &= \frac{K_{zi}}{M_p} \left[\frac{K_{zz}}{K_{zi}} - i_0 \left(\frac{Z_{s1}}{L_{01}} + \frac{Z_{s2}}{L_{02}} \right) \right] \\ A_{33} &= -\frac{1}{2} \left[\frac{R_1}{L_{01}} + \frac{R_2}{L_{02}} \right], & A_{35} &= -\frac{K_{zi}}{M_p} \left[\frac{Z_y}{L_{01}} + \frac{Z_y}{L_{02}} \right] i_0 \\ A_{62} &= -\frac{K_{yi}}{M_p} \left[\frac{Z_{s1}}{L_{01}} - \frac{Z_{s2}}{L_{02}} \right] i_0, & A_{64} &= -\frac{K_{yy}}{2M_p} \left[\frac{R_1}{L_{01}} + \frac{R_2}{L_{02}} \right] \\ A_{65} &= -\frac{K_{yi}}{M_p} \left[\frac{K_{yy}}{K_{yi}} + i_0 \left(\frac{Z_y}{L_{01}} - \frac{Z_y}{L_{02}} \right) \right], & A_{66} &= A_{33} \\ B_{31} &= -\frac{1}{L_{01}} \frac{K_{zi}}{M_p}, & B_{32} &= -\frac{1}{L_{02}} \frac{K_{zi}}{M_p} \\ B_{61} &= -\frac{1}{L_{01}} \frac{K_{yi}}{M_p}, & B_{62} &= \frac{1}{L_{02}} \frac{K_{yi}}{M_p} \\ D_{31} &= -A_{32}, & D_{61} &= -A_{62}, & D_{62} &= \frac{1}{2M_p} \left[\frac{R_1}{L_{01}} + \frac{R_2}{L_{02}} \right] \end{aligned}$$

본 논문에서는 플랜트 출력측으로 반영된 외란입력에 대한 외란 제거 성능 그리고 구동기와 설계된 동적 보상이 갖는 시간지연 요소 및 시스템 파라미터인 자석의 질량 M_p 의 $\pm 20\%$ 변화를 모델링 오차로 간주하여 모델링 오차에 대한 안정도-강인성에 관한 설계 사양을 고려하기로 한다. 그래서 EXPO'93 자기부상 시스템의 데이터[11] 및 참고문헌[12]을 참고하여 외란 및 모델링 오차가 에너지 지를 갖는 주파수역을 그림3.1에 표시하였다. 이때, 선정된 설계 사양들은 다음과 같다.

- 1) 일정한 명령입력과 외란에 대하여 0-정상상태오차를 갖는다.
- 2) 외란제거 조건($\omega_d=20\text{rad/s}$)과 안정도-강인성 조건($\omega_e=250\text{rad/s}$)을 감안하여 루프 전달함수행렬(TFM)의 게인교차주파수(gain crossover frequency) ω_c 를 $120(\text{rad/s})$ 로 한다.

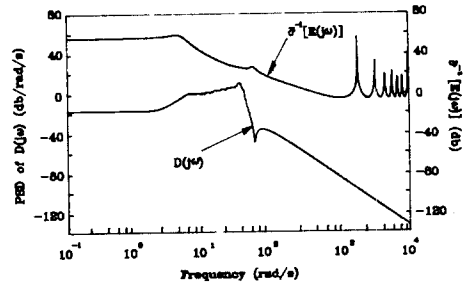


그림3.1 외란 및 모델링 오차가 에너지를 갖는 영역
Fig. 3.1 Characteristic of disturbance and modeling error

3.2 스케일링(scaling) 및 설계플랜트 모델

제어시스템을 설계하기에 앞서 종종 플랜트 모델식의 스케일링이 필요한 경우가 있다. 특히 다변수 제어시스템인 경우 비합리적이지 않는 단위를 물리적으로 유용한 단위로 바꾸는 수단으로, 혹은 설계 목적상 제어입력과 출력에 대한 가중치를 두고자 할 때 사용함으로써 시스템의 극점에는 영향을 주지 않지만 전달함수행렬의 특이값 형상을 변화시킬 수 있다. 본 논문에서 사용한 S_y 는 출력

벡터 y 에 대한 대각선 스케일링 행렬(diagonal scaling matrix)로서 mks단위로 유도된 시스템을 공진장 센서가 검출하는 mm단위로의 변환 및 각 방향의 출력에 대한 가중치를 주기위해 사용했다. 그리고 설계사양 1)을 만족하기 위하여 각각의 제어입력 채널에 적분기를 첨가하여 설계플랜트모델을 다음과 같이 선정하였다.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.2)$$

여기서,

$$A = \begin{bmatrix} A_p & B_p \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [C_p \ 0]$$

3.3 LQG/LTR 제어시스템의 성능해석

이제 다변수 제어시스템인 편심배치방식 자기부상 시스템이 단일입출력 제어시스템으로의 제어기 설계가 가능한지를 검토하기 위하여 단일입출력 및 다변수 LQG/LTR 제어시스템에 대한 성능을 비교 분석하기로 한다.

그림3.2 및 그림3.3은 단일입출력 LQG/LTR 제어시스템의 감도 전달함수 및 출력측으로 반영된 정규화된 외란이 $[-1 \ -1]^T$ 방향으로 주어졌을 때의 수직 변위와 측면 변위에 대한 시간응답이다.

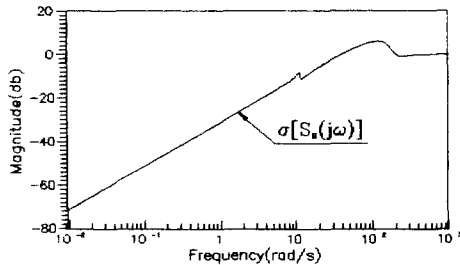


그림3.2 단일입출력 제어시스템의 감도전달함수의 특이값 선도
Fig. 3.2 Singular values of the sensitivity transfer function of SISO LQG/LTR control system

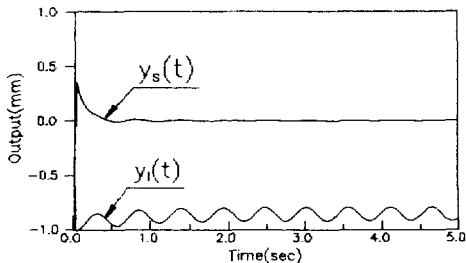


그림3.3 단일입출력 제어시스템의 외란입력에 대한 시간응답
Fig. 3.3 Time responses of the SISO LQG/LTR control system with disturbances $[-1 \ -1]^T$ direction)

단일입출력 LQG/LTR 제어시스템에 대한 주파수역 성능은 그림3.2의 감도전달함수의 특이값이 외란입력이 에너지를 갖는 주파수 $\omega_d=20(\text{rad/s})$ 에서 약 -20db이므로 외란제거 성능을 잘 만족하고 있다. 이와같이 부상방향만 고려된 단일입출력 LQG/LTR 제어시스템의 부상방향의 주파수응답은 만족스럽다. 그리고 시간역 성능을 나타내는 그림3.3의 공진장 $y_s(t)$ 에 대한 시간응답을 보면 실제 외란이 가해졌을 때 주파수역 설계사양과 잘 부합하여 외란제거 성능이 만족스럽다는 것을 알 수 있다. 그러나 그림3.3의 측면변위 $y_l(t)$ 에 대한 시간응답은 외란제거 성능을 전혀 갖지 못하고

오히려 외란입력에 대하여 불안정한 거동을 보여주고 있다. 이는 비감쇠 모드를 갖는 측면방향의 동역학이 선형화 과정에서 부상방향과의 연성항을 어느정도 제거하였다 하더라도 본래적으로 자기변환기가 부상 및 측면모드에서 강한 연성을 갖기 때문에 제어시스템 설계과정에서 피드백되지 못한 측면변위가 외란입력에 대하여 적절히 보상되지 못하기 때문이다.

한편, 그림3.4, 그림3.5 그리고 그림3.6은 각각 다변수 LQG/LTR 제어시스템의 감도 전달함수행렬의 특이값 선도, 출력측으로 반영된 정규화된 외란이 $[-1 \ -1]^T$ 방향으로 주어졌을 때의 시간응답 및 제어입력을 나타내고 있다.

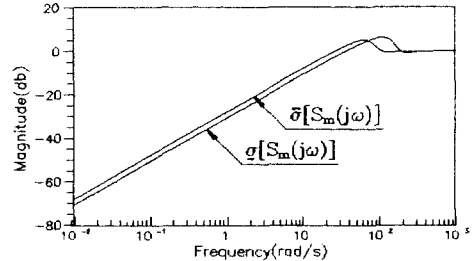


그림3.4 다변수 제어시스템의 감도 TFM의 특이값 선도
Fig. 3.4 Singular values of the sensitivity TFM of MIMO LQG/LTR control system

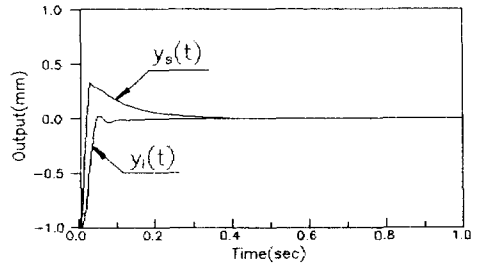


그림3.5 다변수 제어시스템의 외란입력에 대한 시간응답
Fig. 3.5 Time responses of the MIMO LQG/LTR control system with disturbances $[-1 \ -1]^T$ direction)

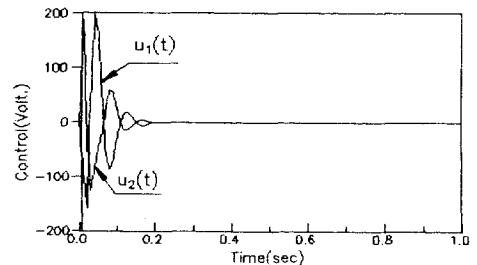


그림3.6 다변수 제어시스템의 제어입력
Fig. 3.6 Control inputs of the MIMO LQG/LTR control system with disturbances $[-1 \ -1]^T$ direction)

다변수 LQG/LTR 제어시스템의 주파수역 성능은 그림3.4의 감도 TFM의 특이값 선도에서 볼 수 있듯이 설계사양에 주어진 외란제거 성능을 잘 만족하고 있음을 알 수 있다. 그리고 시간역 성능은 부상 및 안내방향에서 각각 0.4초, 0.2초의 2% 정착시간을 가지며 부상방향에서 약 50%의 퍼센트 오버슈트가 발생하고 있다. 본 논문에서 이와같은 오버슈트를 줄이기 위하여 부상방향의 불안정한 모드와 측면방향의 비감쇠 모드를 첨가된 새로운 설계 파라미터인 스케일링행렬을 사용하여 적절히 절충함으로써 오버슈트를 어느정

도 삭감할 수 있음이 관찰되었는 바, 과도한 제어입력으로 인한 구동기의 포화를 신중하게 고려하지 않아도 될 경우라면 오버슈트를 대폭 줄일 수 있다. 하지만 구동기의 시간응답이 이론적 수치를 따르기 어렵고 또한 그 하드웨어적인 문제점이 언제나 존재하기 마련이므로 제어시스템 설계시 포화의 가능성을 결코 배제할 수 없다. 특히, 저가제어 LTR을 수행하게되는 LQG/LTR 제어시스템의 구성시에는 과도한 제어입력으로 인한 구동기의 포화가 문제점으로 대두되기 때문에 이의 해결방안이 더욱 요망된다. 따라서 제어입력의 포화를 유발하는 가중행렬의 무리한 조작을 하지않고도 시스템 성능과 제어입력의 적절한 조화를 유지하기 위해서는 무엇보다도 2차 현가장치가 장착되어 시스템 대역폭을 줄여 줌으로써 달성할 수 있을 것이다. 이는 과도한 오버슈트를 감소시키고 제어입력의 포화를 방지해 줄 뿐 아니라 승차감 향상에도 크게 기여할 것으로 예상되므로 자기부상 시스템의 실현에 꼭 필요한 요소로 사료된다.

3.4 자기부상 시스템의 제어기 설계에 대한 고찰

앞에서 단일입출력 및 다변수 LQG/LTR 제어시스템의 성능에 대하여 각각 해석하였다. 부상/안내를 위한 편심배치방식 자기부상 시스템은 무엇보다도 다변수 시스템으로서 단일입출력 제어기 설계로는 결코 바람직한 성능을 얻을 수 없음을 보였다. 이는 자기부상 시스템에 측면 현가장치를 장착하여 측면 방향의 비감쇠 모드를 변경시키든지 혹은 부상과 안내의 독특한 연성효과를 적절히 분리시켜 각각에 분산 제어시스템을 구성할 때에만 단일입출력 제어기 설계가 가능함을 의미한다.

그러나 구동자석의 동적 거동에 영향을 줄 수 있는 측면 현가장치의 구현은 순전히 하드웨어적인 문제로서 안정성을 목적으로 하는 측면 2차 현가장치와는 구별되어야 한다. 또한 부상과 안내의 독특한 연성효과를 분리시키기 위해서는 부상력과 안내력이 각각 공진장과 편심방간의 함수가 되어야하기 때문에 편심배치방식을 지양하고 자석의 배치를 90° 회전시킨 개별배치방식을 채택하여야 한다. 하지만 실제의 시스템에서는 차량을 경량화하고 궤도 구조를 가능한 한 단순하게 하여 유지보수 비용을 줄이고자 하는 추세이기 때문에 이것 역시 한계가 있다.

한편, 편심배치방식 자기부상 시스템의 다변수 LQG/LTR 제어시스템은 부상과 측면 방향에서 좋은 성능을 볼 수 있지만 제어입력이 문제점으로 대두되고 있다. 그러나 제어입력의 포화는 앞에서 언급한 2차 현가장치를 장착하든지 혹은 하드웨어적인 변화를 주지않고 제어기법의 고급화 즉, 제어입력을 고려한 다변수 LQG/LTR 제어방법 등으로 해결할 수 있을 것으로 사료된다. 제어입력을 고려한 다변수 LQG/LTR 제어방법은 기존의 저가제어 LTR을 지양하고 개선된 LTR 방법을 적용함으로써 이루어질 수 있는데 이에 대한 연구는 현재 활발히 진행되고 있다.

4. 결론

21세기의 혁신적 대중 교통수단이 될 흡인방식 자기부상 시스템은 본질적으로 불안정한 시스템으로서 고도의 제어기 설계가 요구

된다. 특히 편심배치 방식에 의한 부상 및 안내를 경험할 때, 자기 변환기(magnetic transducer)의 복잡한 동역학적 특성 때문에 강한 연성(couple) 및 모델링에 대한 불확실성으로 제어측면에서 많은 어려움이 있다. 본 논문에서는 자기부상 시스템이 포함하고 있는 전기, 자기 그리고 기계 시스템을 본드선도 기법을 이용하여 서로의 관계를 명확하게 파악했으며, 그 결과 부상 및 안내 방향의 연성이 포함된 동적방정식을 얻었다. 또한 자기 변환기에 대한 정확한 본드선도 구축으로 필요할 시, 다시 말하면 지속유출량 고려 또는 차량과 트랙의 동역학 등을 언제든지 첨가할 수 있게 되었다. 그리고 제어기 설계 단계에서는 외란제거 성능과 모델링 오차에 대한 안정도-강인성을 설계시 직접 고려할 수 있는 매우 강력하고 조직적인 LQG/LTR 제어방법을 편심배치방식 자기부상 시스템에 적용하여, 단일입출력 및 다변수 제어시스템을 설계하고 그 성능을 서로 비교 분석하였다.

이와 같이 소프트웨어적으로 설계된 제어시스템의 실현을 위하여 하드웨어적 측면에서 연구가 이루어져야할 것이다. 단지 본 논문이 갖는 의미는 제어 측면에서 편심배치방식 자기부상 시스템이 갖고 있는 동역학적 특성 그리고 편심배치방식 자기부상 시스템은 다변수 시스템 설계가 되어야함을 보여주며 또한 모델링 단계에서 공학적 감각을 살린 편리한 본드선도 기법을 편심배치방식 자기부상 시스템과 같은 다 에너지역 시스템에 효과적으로 이용할 수 있음을 제시한 것이다. 앞으로 선형화 과정에서 발생한 비선형문제 및 지속유출량의 효과, 와류전류의 영향 그리고 트랙의 급변변위 등이 함께 고려되어야할 것으로 사료된다.

참고문헌

- [1] Sinha, P. K., "Magnetic Suspension for Low-speed Vehicle", ASME J. Dyn. Sys., Meas. and Control, pp. 333-342, 1978.
- [2] Hebbale, K. V. and Taylor, D. L., "Dynamics of Ferromagnetic Suspension System", ACC, pp. 217-223, 1984.
- [3] Limbert, D. A., Richardson, H. H. and Wormley, D. N., "Controlled Dynamic Characteristics of Ferromagnetic Vehicle Suspension Providing Simultaneous Lift and Guidance", ASME J. Dyn. Sys., Meas. Control, pp. 217-222, 1979.
- [4] Paynter, H. M., Analysis and Design of Engineering Systems, M.I.T. Press., 1961.
- [5] Karnopp, D. and Rosenberg, R. C., System Dynamics : A Unified Approach, J. Wiley & Sons., 1975.
- [6] Rosenberg, R. C., "Multiport Models in Mechanics", ASME J. of Dyn. Sys. Meas. and Control, pp. 206-212, 1972.
- [7] Stein, G. and Athans, M., "The LQG/LTR Procedure for Multi-variable Feedback Control Design", IEEE Trans. on AC., Vol. AC-32, pp. 105-114, 1987.
- [8] 김종식, 선형제어 시스템공학, 청문각, 1988.
- [9] Sinha, P. K., "Electromagnetic Suspension : Dynamics and Control", IEEE Control Engineering Series 30, 1987.
- [10] Brzezina, W. and Langerhole, J., "Lift and Side Forces on Rectangular Pole Pieces in Two Dimensions", J. of Applied Physics, pp. 1869-1872, 1974.
- [11] 강도현, "부상용 전자석의 설계 및 해석", 한국전기연구소, 1991.
- [12] Hedrick, J. K. and Billington, G. F., "Analysis, Design and Optimization of High Speed Vehicle Suspensions Using State Variable Techniques", ASME J. of Dyn. Sys. Meas. and Control, pp. 193-203, 1974.