

제한된 부채꼴에서의 비선형 개념을 이용한 퍼지 논리제어기의 안정성 해석

김 인 익 박 상 배 이 균 경
경북대학교 공과대학 전자공학과

Stability Analysis of Fuzzy Logic Controller using The Concept of Sector Bound Nonlinearity

In Ig Kim Sang Bae Park Kyun Kyung Lee
Dept. of Electronics Eng.
Kyung Pook National University

ABSTRACT

A stability analysis technique has been proposed for linear SISO system associated with fuzzy logic controller. An analysis technique using the concept of well-known sector bound nonlinearity and its graphical interpretation, i.e., the circle criterion, is presented. Thus the use of classical Nyquist locus and the BODE diagram is brought into the picture. The aim of this present note is to represent a graphical approach based on sector bound nonlinearity and circle criterion for assessing the performance(degree of stability) of the linear SISO system associated with fuzzy logic controller. The degree of stability of the system is defined in terms of its gain and phase margins as defined in Section 3.

1. 서론

인간은 어떠한 사물을 판단할 때, 정확한 계산보다는 현재까지의 경험에 근거한 직관력에 의존하는 경우가 대부분이다. 그러므로 인간은 불확실하고 부정확한 세상에 적응하여 논리적인 판단을 하며 생활할 수 있다. 이러한 관점에서 우리는 일반적인 의미에서의 논리와는 다른 인간의 판단 기준에 맞는 논리를 필요로 하게 되었다.

1965년 L.A. Zadeh[1]에 의하여 퍼지 집합론이 처음 발표된 이후 이 분야는 수학적 이론으로서도 상당히 발전하였으며 공학적인 응용면에서도 많은 분야에 적용이 시도되고 있다. 퍼지 논리는 인간의 근사적이고 정성적인 추리 과정을 모방하려는 것으로 현대의 제어 구조로는 해석하거나 제어하기

가 복잡하고 곤란한 문제들에 접근할 수 있는 방법을 제시한다.

모든 퍼지 논리와 퍼지 제어시스템은 선정한 규칙에 근거한다. 그러므로 규칙의 선정에 따라 퍼지 제어시스템의 성능은 달라지게 된다. 현재 대부분의 퍼지 제어시스템에 관한 연구는 많은 시행착오를 거쳐 규칙을 선정한 뒤 몇가지 상황에 대한 시뮬레이션으로써 그의 타당성을 제시한다. 그러나 다른 상황에서의 성능은 예측할 수 없으며 심지어는 시스템이 불안정할 가능성도 있다. 안정성은 모든 제어시스템이 가져야 할 기본요건이며 이에 대한 체계적인 연구도 필수적이다. 최근 퍼지 제어시스템을 비선형시스템으로 이해하고 그에 대한 제어이론의 연구를 시작하고 있으나 결과는 풍부하지 못하며, 특히 안정성에 대한 연구에서는 Kickert와 Mamdani[2]가 디스크라이빙(describing) 함수를 이용하여 퍼지 제어시스템의 안정성을 평가하였으며, Kiszka, Gupta 그리고 Nikiforuk[3]는 에너지 함수를 이용하여 안정성을 평가하였으나 결과는 초보적인 단계이므로 이의 연구는 중요하다.

퍼지 논리제어기를 입력과 비퍼지화된 출력간의 전달함수로 보면 비선형 제어시스템으로 이해할 수 있다. 그러므로 퍼지 제어시스템의 안정성에 관한 연구는 결국 비선형 제어시스템의 안정성 연구와 밀접한 관계를 가지게 된다. 비선형 제어시스템의 안정성에 관한 연구도 간단한 문제는 아니며 대표적인 방법으로는 Lyapunov 안정성 판별법과 입출력 안정성(circle 판별법, Popov 판별법)이 있다[4]. Ray, Ghosh 그리고 Majumder[5, 6]는 L_2 -안정성과 circle 판별법을 이용하여 안정성과 여유도에 대해 정의하였으나 정의에 따라 여유도를 계산한 결과 여유도가 있는 시스템이라도 불안정한 경우가 존재하여 여유도에 대한 정의가 부적절하였다. 그러므로 여기서

는 퍼지 논리제어기를 비선형 전달 함수로 이해하여 기존의 비선형 제어시스템의 안정성 판별법 중에서 제한된 부채꼴에서의 비선형(sector bound nonlinearity) 개념과 circle 판별법을 이용하여 퍼지 제어시스템의 안정성과 여유도에 대해 논의하며 안정성의 개선책에 대해서도 논의하겠다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2장에서는 퍼지 논리제어기(fuzzy logic controller:FLC)와 제한된 부채꼴에서의 비선형 개념에 대해 논의하며, 3장에서는 퍼지 논리제어기가 연결된 한개의 입력과 한개의 출력을 가지는(single input single output:SISO) 선형시스템의 안정성과 이득 여유, 위상 여유에 대해서 논의하며, 4장에서는 안정성을 개선하는 방법 즉, 이득 여유와 위상 여유를 개선하는 방법에 대하여 논의하며, 5장에서는 앞서 제시한 이론의 결과들을 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 논의한다.

2. 퍼지 논리제어기가 연결된 선형 SISO 시스템과 제한된 부채꼴에서의 비선형 개념

그림 1은 퍼지 논리 제어기가 연결된 선형 SISO 시스템을 나타내고 있다.

퍼지 논리제어기의 입력은 주어진 동작점과 귀환된 출력사이의 오차로서 식 (1)과 같으며 퍼지 추론을 거친 후의 값인 출력은 선형 SISO 시스템의 입력으로 동작한다. 입력변수의 멤버십함수(membership function)는 그림 2와 같다.

$$e(t) = u(t) - y(t) \quad (1)$$

이 시스템을 제어하기 위한 규칙의 예는 식 (2)와 같다.

만약 오차가 음의 크기로 크면 출력 $f = 3e + 0.1$ 이다. (2)

퍼지 추론에는 최대-최소 합성법(max-min composition)을 이용하였으며, 비퍼지화 방법으로는 여러가지 방법 중에서 무게중심법(center of gravity:COG)을 이용하였다.

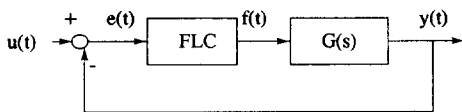


그림 1. 퍼지 논리제어기가 연결된 선형 SISO 시스템
Fig. 1. A linear SISO system associated with fuzzy logic controller

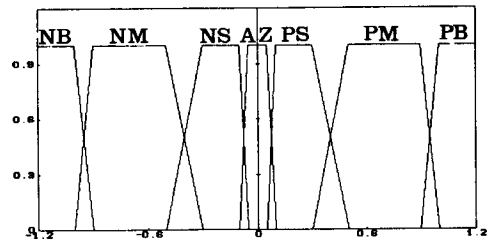


그림 2. 입력변수의 멤버십함수

Fig. 2. Membership function of input variable.

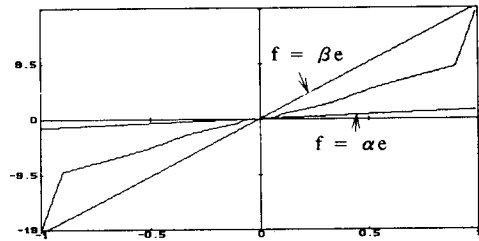


그림 3. 퍼지 논리제어기의 입-출력 특성.

Fig. 3. Input-output characteristic of fuzzy logic controller.

퍼지 추론을 통한 퍼지 논리제어기의 입-출력 특성은 그림 3과 같이 기울기 α 와 β 로 제한된 부채꼴에 포함되는 비선형 함수로 표현되며 식 (3)과 같이 표시할 수 있다.

$$\alpha \leq f/e \leq \beta \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha, \beta \geq 0 \quad (3)$$

3. 퍼지 논리제어기를 연결한 선형 SISO 시스템의 제한된 부채꼴에서의 비선형 개념을 이용한 안정성 해석

본 단원에서는 퍼지 논리제어기의 제한된 부채꼴에서의 비선형 개념을 이용하여 안정성에 대한 정리와 Nyquist 경로와 BODE 선도 상에서의 이득 여유와 위상 여유에 대한 정리를 내리기로 한다.

퍼지 논리 제어기의 입-출력 특성이 식 (3)을 만족할 때, 안정성에 대한 정리는 많이 알려진 대로 정리 1과 같다.

정리 1 : 선형 SISO 시스템의 전달 함수 $G(S)$ 의 Nyquist 경로가 그림 4에 있는 원반($-\alpha^{-1}$, $-\beta^{-1}$)내에 들어가지 않고 반시계 방향으로 원반을 감싸지 않으면 시스템은 전체적으로 점근 안정(globally and asymptotically stable)하다.

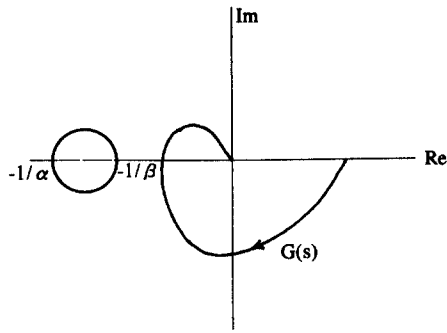


그림 4. 퍼지 논리제어기가 연결된 선형 SISO 시스템의 Nyquist 경로.

Fig. 4. Nyquist plot of the linear SISO system associated with fuzzy logic controller.

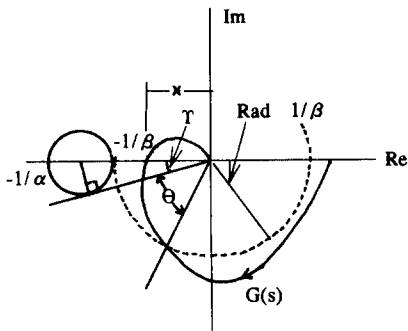


그림 5. 제한된 구간에서 비선형성을 가지는 퍼지 논리제어기의 Nyquist 경로 상에서의 이득 여유와 위상 여유.

Fig. 5. Nyquist plot that indicates the gain and phase margin of the system associated with sector bound fuzzy logic controller.

Nyquist 경로 상에서의 이득 여유와 위상 여유에 대한 정의는 그림 5와 정의 1과 2에 나타나 있다.

정의 1 : 이득 여유는 $20 \log(1/\beta x)$ dB이다.

정의 2 : 위상 여유는 원점에서 원반 $(-\alpha^{-1}, -\beta^{-1})$ 에 제 3사분면으로 그은 접선과 반지름이 $1/\beta$ 인 원과 Nyquist 경로가 만나는 점에 그은 직선사이의 각도 θ 이다.

실제 시스템의 설계에서는 Nyquist 경로를 이용하여 이득 여유와 위상 여유를 구하는 것이 어려우므로 좀 더 쉽게 구하기 위하여 BODE 선도 상에서의 이득 여유와 위상 여유에 대한 정의가 정의 3과 4에 나타나 있다.

정의 3 : 이득 여유는 위상이 $180^\circ + \gamma$ 일 때 이득이 $20 \log(1/\beta)$ dB보다 적은 정도로 정의한다.

정의 4 : 위상 여유는 이득이 $20 \log(1/\beta)$ dB일 때 위상이 $-180^\circ + \gamma$ 보다 적은 정도로 정의한다.

4. 안정성 개선책

앞 단원에서 내린 정의에 따라 시스템의 안정성을 개선하기 위해서는 퍼지 논리제어기의 입·출력 특성에서 부채꼴의 기울기를 본 후 기울기 즉, 규칙을 조정함으로써 안정성을 개선할 수 있다.

그림 6은 입력변수의 멤버십함수가 그림 2와 같고 규칙이 식 (4)와 같을 때의 입·출력 특성이며, 그림 7은 식 (4)의 규칙들을 안정성을 개선하기 위하여 식 (5)와 같이 바꾸었을 때의 입·출력 특성을 나타내고 있다.

그림에서 보는 바와 같이 규칙을 바꾼 후의 부채꼴의 기울기의 최대값 즉, β 가 바뀌기 전의 최대값보다 작으므로 식 (4)의 규칙보다는 식 (5)의 규칙의 위상 여유와 이득 여유가 좋다고 할 수 있다.

- | | |
|---|-----|
| <p>규칙 1 : 만약 오차가 음의 크기로 크면(NB)
 $f = 10.5e - 5$ 이다.</p> <p>규칙 2 : 만약 오차가 음의 크기로 중간 정도면(NM)
 $f = 6.2e - 0.3$ 이다.</p> <p>규칙 3 : 만약 오차가 음의 크기로 적으면(NS)
 $f = 5.3e - 0.6$ 이다.</p> <p>규칙 4 : 만약 오차가 거의 영이면(AZ)
 $f = e$ 이다.</p> <p>규칙 5 : 만약 오차가 양의 크기로 적으면(PS)
 $f = 5.3e + 0.6$ 이다.</p> <p>규칙 6 : 만약 오차가 양의 크기로 중간 정도면(PM)
 $f = 6.2e + 0.3$ 이다.</p> <p>규칙 7 : 만약 오차가 양의 크기로 크면(PB)
 $f = 10.5e + 5$ 이다.</p> | (4) |
|---|-----|

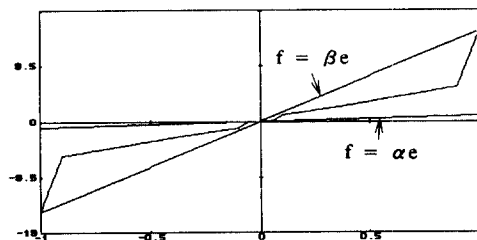


그림 6. 식 (4)의 규칙에 의한 입·출력 특성

Fig. 6. Input-output characteristic of fuzzy logic controller by rule (4)

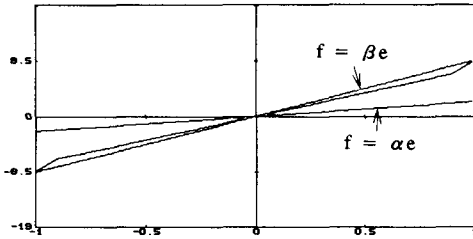


그림 7. 식 (5)의 규칙에 의한 입·출력 특성
 Fig. 7. Input-output characteristic of fuzzy logic controller by rule (5)

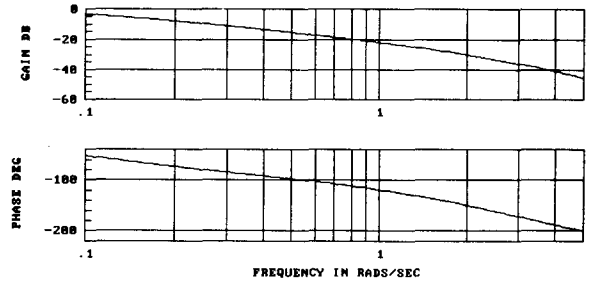


그림 8. 식 (6)에 주어진 시스템의 BODE 선도.
 Fig. 8. BODE diagram of the system given by equation (6)

규칙 1-1 : 만약 오차가 음의 크기로 크면(NB) $f = 9.5e$ 이다.	(5)
규칙 2-1 : 만약 오차가 음의 크기로 중간 정도면(NM) $f = 8e$ 이다.	
규칙 3-1 : 만약 오차가 음의 크기로 적으면(NS) $f = 7.9e$ 이다.	
규칙 4-1 : 만약 오차가 거의 영이면(AZ) $f = 2.5e$ 이다.	
규칙 5-1 : 만약 오차가 양의 크기로 적으면(PS) $f = 7.9e$ 이다.	
규칙 6-1 : 만약 오차가 양의 크기로 중간 정도면(FM) $f = 8e$ 이다.	
규칙 7-1 : 만약 오차가 양의 크기로 크면(PB) $f = 9.5e$ 이다.	

의한 이득 여유와 위상 여유를 구하면 20 dB와 70° 로써 식 (4)의 규칙보다는 식 (5)의 규칙이 여유도가 많음을 알 수 있다.

$G(s)$ 가 식 (6)과 같이 주어졌을 때 그림 9는 퍼지 논리제 어기의 규칙이 식 (4)와 같을 때의 시스템의 단위 계단 입력에 대한 응답 곡선이며, 그림 10은 규칙이 식 (5)로 주어졌을 때의 단위 계단 입력에 대한 응답 곡선으로 거의 같음을 알 수 있다.

그러나 실제 시스템을 설계할 때 선형 시스템에 대한 모델링이 정확한 것이 아니므로 시스템이 변했을 때의 응답도 고려해 보아야 된다. 여기서는 식 (5)의 규칙이 식 (4)보다 여유도가 많으므로 시스템을 어느 정도 변화시켜도 식 (5)의 규칙에 의한 응답이 좀 더 안정하다고 할 수 있을 것이다. 즉, 식 (6)의 $G(s)$ 를 식 (7)과 같이 변화시켰을 때 시스템의 BODE 선도는 그림 11과 같으며 식 (4)의 규칙에 의한 이득 여유와 위상 여유는 각각 -3 dB와 4° 이므로 여유도가 없으

5. 컴퓨터 시뮬레이션

컴퓨터 시뮬레이션에서 적분법에는 많이 사용되는 4th-order Runge-Kutta 방법을 이용하였다.

식 (6)은 선형 SISO 시스템의 전달 함수를 나타낸다.

$$G(s) = \frac{1}{s(s+3)(s+4)} \quad (6)$$

퍼지 논리제어기의 규칙이 식 (4)에 나타나 있으며 이 규칙에 따라 퍼지 논리제어기의 입·출력 특성을 나타내면 그림 6과 같으며 α 와 β 는 각각 1과 15.5이다.

$G(s)$ 의 BODE 선도는 그림 8과 같으며 이득 여유와 위상 여유를 구하면 14 dB와 60° 이다. 식 (4)의 규칙을 식 (5)로 바꾸었을 때 퍼지 논리제어기의 입·출력 특성은 그림 7과 같으며 α 와 β 는 각각 2.5와 9.5이다. 그림 8로부터 식 (5)에

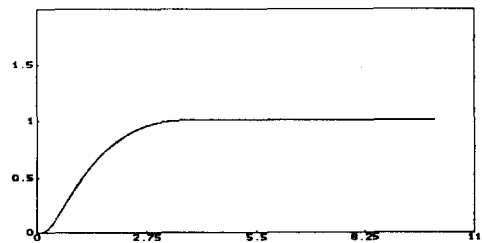


그림 9. 식 (6)에 주어진 시스템의 단위 계단 입력에 대한 응답 곡선.

Fig. 9. Unit step response of the system given by equation (6)

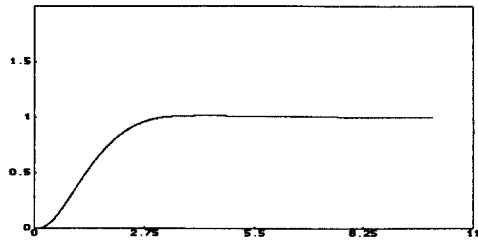


그림 10. 식 (6)에 주어진 시스템의 단위 계단 입력에 대한 응답 곡선.

Fig. 10. Unit step response of the system given by equation (6)

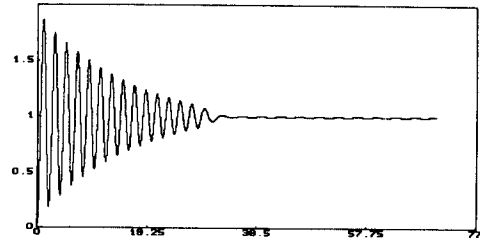


그림 13. 식 (7)에 주어진 시스템의 단위 계단 입력에 대한 응답 곡선.

Fig. 13. Unit step response of the system given by equation (7)

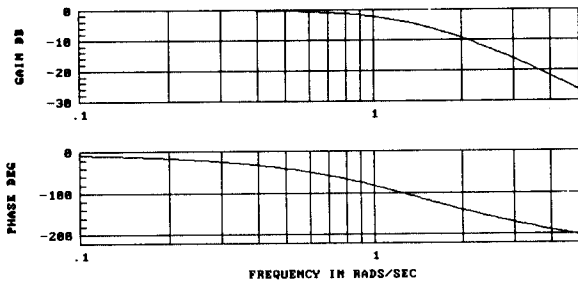


그림 11. 식 (7)에 주어진 시스템의 BODE 선도
Fig. 11. BODE diagram of the system given by equation (7)

나, 식 (5)의 규칙에 의한 이득 여유와 위상 여유는 각각 2 dB와 4°이다.

$$G(s) = \frac{8.5}{s(s+3)(s+4)} \quad (7)$$

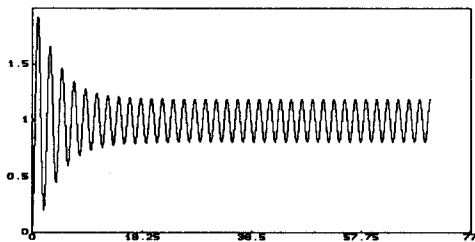


그림 12. 식 (7)에 주어진 시스템의 단위 계단 입력에 대한 응답 곡선.

Fig. 12. Unit step response of the system given by equation (7)

$G(s)$ 가 식 (7)과 같이 주어졌을 때 그림 12는 퍼지 논리 제어기의 규칙이 식 (4)와 같을 때의 시스템의 단위 계단 입력에 대한 응답 곡선이며, 그림 13은 규칙이 식 (5)로 주어졌을 때의 단위 계단 입력에 대한 응답 곡선이다.

그림에서 알 수 있는 바와 같이 여유도가 없는 식 (4)의 규칙에 의한 출력은 진동하는 데 비하여 여유도가 있는 식 (5)의 규칙에 의한 출력은 주어진 동작점을 잘 따라가는 것을 볼 수 있다.

이번에는 선형 SISO 시스템의 전달 함수를 식 (8)과 같이 변화시켰을 때 시스템의 BODE 선도는 그림 14와 같으며 식 (4)에 의한 이득 여유와 위상 여유는 각각 -3 dB와 -12°이므로 여유도가 없으나, 식 (5)에 의한 이득 여유와 위상 여유는 각각 2 dB와 2°이다.

$$G(s) = \frac{1}{s(s+0.75)(s+3.2)} \quad (8)$$

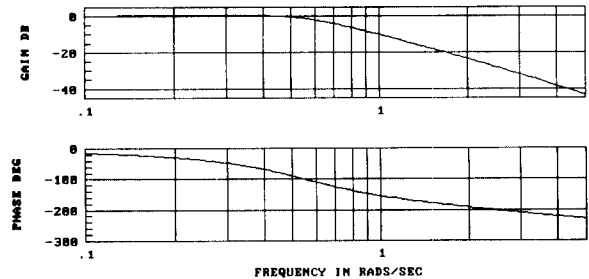


그림 14. 식 (8)에 주어진 시스템의 BODE 선도

Fig. 14. BODE diagram of the system given by equation (8)

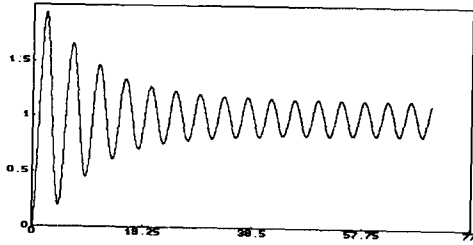


그림 15. 식 (8)에 주어진 시스템의 단위 계단 입력에 대한 응답 곡선

Fig. 15. Unit step response of the system given by equation (8)

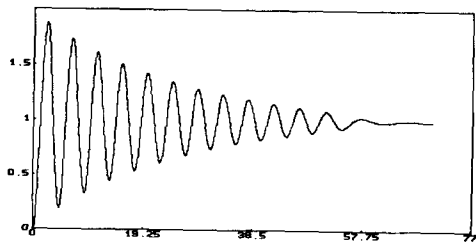


그림 16. 식 (8)에 주어진 시스템의 단위 계단 입력에 대한 응답 곡선

Fig. 16. Unit step response of the system given by equation (8)

$G(s)$ 가 식 (8)과 같이 주어졌을 때 그림 15는 퍼지 논리 제어기의 규칙이 식 (4)와 같을 때의 시스템의 단위 계단 입력에 대한 응답 곡선이며, 그림 16은 규칙이 식 (5)로 주어졌을 때의 단위 계단 입력에 대한 응답 곡선이다.

그림에서 보는 바와 같이 여유도가 있는 식 (5)의 규칙에 의한 출력은 주어진 동작점을 잘 따라가는 데 반하여 여유도가 없는 식 (4)의 규칙에 의한 출력은 진동함을 알 수 있다.

6. 고찰 및 결론

본 논문에서는 퍼지 논리제어기가 연결된 선형 SISO 시스템의 안정성에 대하여 논의하였다. 여기서 제시한 안정성 해석 방법은 시스템이 안정하기 위한 충분 조건으로서 시스템의 Nyquist 경로가 정리 1에 정의된 원반에 들어갈지라도 반드시 그 시스템이 불안정하다고 말할 수는 없는 것이다. 그러나 퍼지 논리제어기가 연결된 선형 SISO 시스템의 여유도를 3장에

서와 같이 정의한 후 4장에서 제시한 방법으로 여유도를 개선함으로써 시뮬레이션에서 처럼 시스템이 정확히 모델링이 되지 않은 상황이나, 시스템이 변하는 상황에 대처할 수 있을 것이다. 즉, 견실성(robustness)을 높일 수 있다.

퍼지 제어시스템은 시스템의 모델링이 어렵거나 고전적인 제어기술(PID)로는 제어가 곤란한 시스템에 적용되는 것이므로 모델링이 잘 되어있는 선형 시스템에 대해서는 비교하기가 곤란하며 또한 대개의 퍼지 제어시스템이 한개의 입력이 아닌 두개 이상의 입력을 가지고 있으므로 비교하기가 곤란하다. 그러므로 본 논문에서는 선형 SISO 시스템에 대해 다루었으나, 선형 MIMO 시스템에 대한 안정성 해석법을 연구함으로써 고전적인 제어기술과의 비교도 가능할 것이다.

참고 문헌

- [1] L.A. Zadeh, "Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision process," *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.*, vol.SMC-3, no.1, pp.28-44, Jan.1973.
- [2] W.J.M. Kickert and E.H. Mamdani, "Analysis of a fuzzy logic controller," *Int. J. Fuzzy Sets and Systems*, vol.1, no.1, pp.29-44, 1978.
- [3] Jerzy B. Kiszka, Madan M. Gupta and Peter N. Niforuk, "Energetic stability of fuzzy dynamic systems," *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.*, vol. SMC-15, no.6, Nov./Dec., 1985.
- [4] G. Zames, "On the Input-Output stability of time varying nonlinear feedback systems, part I and II," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol.AC-11, no.2, pp.228-238, pp.465-477, Apr., 1966.
- [5] Kumar S. Ray and D. Dutta Majumder, "Application of Circle Criteria for Stability analysis of linear SISO and MIMO systems associated with fuzzy logic controller," *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.*, vol.SMC-14, no.2, pp. 345-349, Mar./Apr., 1984.
- [6] Kumar S. Ray, Ananda M. Ghosh and D. Dutta Majumder, "L₂-stability and the related design concept for SISO linear system associated with fuzzy logic controller," *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.*, vol.SMC-14, no.6, pp.932-939, Nov./Dec., 1984.