

## 연속 가변 구조 제어를 이용한 직류 전동기의 추적 제어

이 정훈, 고 종선, 김 종준, 이 주장, 윤 명중

한국과학기술원 전기 및 전자공학과

### A Tracking Control of DC Servomotors Using a Continuous VSS Control

Jung-Hoon Lee, Jong-Son Ko, Jong-Jun Kim, Ju-Jang Lee and Myung-Joong Youn

Department of Electrical Engineering  
Korea Advanced Institute of Science and Technology

#### Abstract

A continuous variable structure system control as a DC servomotor tracking controller is proposed for the improvement of the chattering problems. The stability property of the proposed algorithms is analyzed. The prescribed tracking error is guaranteed in the existence of load variations based on the stability analysis.

#### 1. 서 론

직류 전동기는 교류 전동기에 비해 제어가 용이하다는 장점으로 인하여 산업계의 다양한 서보 시스템, 로봇트나 안테나 등에 가장 많이 사용되고 있다. 이와같은 서보 시스템은 주로 추적 제어 방식으로 구동이 행해지고 있는데 정밀한 서보 시스템이 되기 위해서는 추적 성능이 우수해야한다. 여기서 추적 성능은 과도 상태에서 빠른 응답과 정상 상태에서 최소 추적 오차를 의미한다. 실제 시스템에서는 불확실한 항, 매개변수의 변화, 부하의 변동과 외란 등으로 인하여 원하는 추적 성능을 얻기가 어렵다. 최근에 직접구동(direct drive) 방식을 취할 경우 부하의 변동은 전동기에 직접 영향을 주게 되어 심각한 성능 저해 요인으로 작용한다. 따라서 직류 전동기의 추적 제어로 강한 제어가 요구되고 있어서 슬라이딩 모드 상태에서 강한 특성(robustness)을 갖는 가변구조 제어가 추적

제어로 응용, 기본적인 형태에서 개선된 추적 성능을 위해 비선형 슬라이딩 모드가 제안되었다[2,4]. 이 제어기는 불연속 제어 입력에 의하여 슬라이딩 모드를 발생하여 부하의 변동이나 매개변수의 변화에 강한 제어를 하여 추적 성능을 얻었다. 하지만 불연속 제어 입력에 의하여 채터링(chattering) 현상이 존재하므로 고주파수 성분의 제어 입력에 의하여 서보 시스템의 모델링 시에 무시된 고주파수 동특성에 영향을 줄 수 있으므로[7] 직접구동 방식에서 더욱 개선의 필요성이 존재한다.

본 논문에서는 직접구동 직류 전동기의 추적제어에서 부하의 변동이 존재하는 상태에서 추적 성능을 보장받을 수 있고 채터링 문제가 없는 연속 가변구조에 대하여 연구하였다.

#### 2. 직접구동 직류전동기의 모델

부하가 직접 연결된 영구자석 직류전동기의 동특성은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} K_i \cdot i_a(t) &= J \cdot \dot{\omega}(t) + B \cdot \omega(t) - V \\ V_a(t) &= L \cdot \dot{i}_a(t) + R \cdot i_a(t) + e(t) \\ e(t) &= K_e \cdot \omega(t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $V_a(t)$ 는 입력 전압,  $\omega(t)$ 는 전동기의 속도,  $i_a(t)$ 는 전동기의 입력 전류,  $J$ 는 전동기 축의 총 관성,  $V$ 는 전동기의 연속적인 부하이며  $K_e, K_i, R, L$ 들은 전동기의

전기적 매개변수이다. 전동기를 전류 제어기로 구동할 경우 기계적 동특성에 비해 빠른 전기적인 동특성을 무시할 수 있으므로 추적 제어를 위한 전동기 동특성을 다음같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -a \cdot \omega + b \cdot i_a - d \cdot V \end{aligned} \quad (2)$$

여기서  $a=B/J$ ,  $b=K_i/J$ ,  $d=1/J$  이다. 가변구조 제어를 위하여 상태 변수를 전동기의 위치,  $\theta$ 에 대한 위치 명령,  $\theta_i$ 를 오차(error)와 그의 미분을 아래와 같이 정의하면

$$\begin{aligned} e_1 &= \theta_i - \theta \\ e_2 &= \dot{\theta}_i - \omega \end{aligned} \quad (3)$$

이오 상태방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= -a \cdot e_2 - b \cdot i_a + d \cdot V + w, \quad w = \ddot{\theta}_i - a \cdot \dot{\theta} \end{aligned} \quad (4)$$

이 오차 방정식에 대한 연속 가변구조 제어를 다음 절에서 설계하고자 한다.

### 3. 연속 가변구조 위치 제어기

가변구조 제어기의 설계는 두 단계로 나누어 진다. 먼저 원하는 과도상태 동특성을 갖는 슬라이딩 면을 설계하고 이에 대해 슬라이딩 모드 존재조건을 만족하는 제어 입력을 구성하는 것이다. 본 논문에서는 오차의 적분이 첨가된 다음과 같은 슬라이딩 면을 사용한다.

$$s(t) = c_0 \cdot e_0 + c_1 \cdot e_1 + e_2, \quad (5)$$

$$e_0 = \int_0^t e_1 dt, \quad e_0(0) = 0.$$

슬라이딩 모드 상태에서는 과도상태 동특성을 이상적인 이차 시스템을 선택한 의미이며 다음과같이 행렬 수식으로 표시할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_0 \\ \dot{e}_1 \end{bmatrix} = \Lambda \cdot \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} s(t), \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_0 & -c_1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

안정된 슬라이딩 면이 되기 위해서는  $\Lambda$ 가 Hurwitz 행렬이 되게[5,6]  $c_0, c_1$ 를 선정해야하며 Hurwitz인 경우 아래의 식이 성립하는  $K$ 와  $\kappa$ 가 존재한다.

$$\| \| e^{\Lambda t} \| \| < K e^{-\kappa t} \quad (7)$$

$\| \cdot \|$ 는 Induced 유클리디안 놈(norm)이다.

제어 입력에 의한 슬라이딩 면의 크기와 오차의

크기와와의 관계를 다음 Lemma에 정리하였다.

Lemma : 식 (6)에 정의된 슬라이딩 면,  $s(t)$ 가  $t > 0$ 에 대해  $\gamma$ 로 유계(bounded)되고 초기 상태에  $|e_1| < \gamma/K$  을 만족하면 다음 식이 성립한다.

$$|e_1| < \epsilon_1 \quad \text{and} \quad |e_2| < \epsilon_2 \quad (8)$$

여기서  $\epsilon_1 = \gamma \cdot K/\kappa$ ,  $\epsilon_2 = \gamma \cdot (1 + Z \cdot K/\kappa)$ ,  $Z = \| \| [c_0 \ c_1] \| \|$  이다.

증명 : 식 (6)에서 슬라이딩 면을 유계 외란으로 고려할 수 있으며 식 (6)의 해 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \end{bmatrix} = e^{\Lambda t} \begin{bmatrix} e_0(0) \\ e_1(0) \end{bmatrix} + \int_0^t (e^{\Lambda(t-u)} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} s(u)) du \quad (9)$$

식 (7)에 의해 식 (9)는 다음과같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \| \| \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \end{bmatrix} \| \| &< \gamma \cdot \frac{K}{\kappa} + (|e_1(0)| - \frac{\gamma}{\kappa}) \cdot K e^{-\kappa t} \\ &< \gamma \cdot \frac{K}{\kappa} \end{aligned} \quad (10)$$

$$|e_1(t)| < \gamma \cdot \frac{K}{\kappa} \quad (11)$$

$e_2(t)$ 에 대해서는 슬라이딩 면, 식 (5)에서

$$e_2(t) = s(t) - [c_0 \ c_1] \cdot \begin{bmatrix} e_0(t) \\ e_1(t) \end{bmatrix} \quad (12)$$

이므로 양변에 절댓값을 취하면

$$|e_2(t)| < \gamma \cdot (1 + Z \frac{K}{\kappa}) \quad (13)$$

이 되므로 Lemma에 대한 증명은 이루어졌다.

Lemma는 슬라이딩 면과 추적 오차와의 관계를 나타내므로 Lemma에 의하여 다음 연속 제어 입력에 의하여 슬라이딩 면을 레귤레이션시켜 원하는 추적오차를 얻을 수 있다.

시스템 (4)에 대해 슬라이딩 면, (5)에 대한 등가 제어입력(equivalent control)을 구하면

$$i_{eq} = \frac{1}{b} \cdot (c_0 \cdot e_1 + (c_1 - a) \cdot e_2 + d \cdot V + w) \quad (14)$$

이다. 위의 제어 입력을 구하는 것이 최상의 제어 입력이나 부하의 변동 항이 존재하므로 직접 구하기는 어렵다. 따라서 기존에는 부하 변동량의 최대값으로 채터링시킨 것에

반하여 본 연구에서는 연속 제어 입력이 되기 위해 등가 제어입력 중 구할 수 있는 것은 그대로 사용하고 직접 구할 수 없는 부하의 변동을 가속도 정보를 이용한 효과적인 관측기 이용하여 관측 보상하는 제어입력을 구성하고 슬라이딩 면을 재환하여 관측기의 오차를 보정하는 다음과같은 연속 제어 입력을 사용하여 추적 제어를 행한다.

$$i_a = i_{eqm} + i_c + i_s \quad (15)$$

여기서

$$i_{eqm} = \frac{1}{b} \cdot (c_0 \cdot e_1 + (c_1 - a) \cdot e_2 + w) \quad (16)$$

$$i_c = \frac{1}{b} \cdot (b \cdot i_a(t-h) - \dot{\omega} - a \cdot \omega) \quad (17)$$

$$= d \cdot V - \Delta\dot{\omega} + b \cdot \Delta i_a$$

$$\Delta\dot{\omega} = \dot{\omega} - \dot{\omega} \quad \Delta i_a = i_a(t) - i_a(t-h)$$

$$i_s = \frac{1}{b} \cdot (k_{x1} \cdot s(t) + k_{x2} \cdot \sigma(t)), \quad \sigma(t) = \frac{s(t)}{|s(t)| + \delta} \quad (18)$$

$i_{eqm}$ 는 등가 제어 입력 중 구할 수 있는 항이며  $i_c$ 는 관측기를 이용한 부하의 변동을 보상시키는 항이며  $i_s$ 는 슬라이딩 면 값을 재환하여 관측기의 보상 오차를 보정하며  $h$ 는 표본 주기이다. 그림 1은 제안된 알고리즘을 블록 다이어그램으로 나타낸 것이다. 이와같은 연속 제어 입력에 의한 슬라이딩 면의 동특성을 알기 위해  $\dot{s}(t)$ 를 구하여 보면

$$\dot{s}(t) = n(t) - k_{x1} \cdot s(t) - k_{x2} \frac{s(t)}{|s(t)| + \delta} \quad (19)$$

$$n(t) = \Delta\dot{\omega} - b \cdot \Delta i_a$$

이다. 결과식에서 보상기의 영향으로 최종 존재하는 외란은  $\Delta i_a$ 와  $\Delta\dot{\omega}$ 뿐이다. 가속도 정보는 오일러(Euler)의 방법에 의하여 충분히 적은 표본 주기에 대해서는 정확히 알 수 있으며 또한 연속 제어 입력으로 표본 주기 사이의 제어 입력 변화는 적으므로 다음과같은 정의를 만들 수 있다.

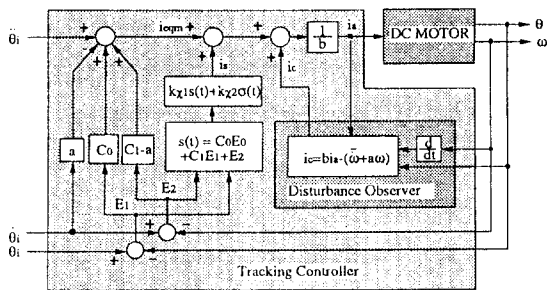


그림 1 제안된 알고리즘의 블록 다이어그램

$$N \equiv \max\{|n(\Delta\dot{\omega}, \Delta i_a)|; \theta(t) \quad B(\epsilon_1; \theta_i(t) \text{ and}$$

$$\dot{\theta}(t) \quad B(\epsilon_2; \dot{\theta}_i(t))\} \quad (20)$$

추적 제어 전체 시스템의 안정성은 다음 정리로 요약이 된다.

정리 : 위치 명령에 대해서 직류 전동기 식 (2)는 초기상태에  $|s(t)| < \gamma$  와  $|e_1| < \gamma/K$ 를 만족할때 다음 조건을 만족하는

$$k_{x2} > N - k_{x1} \cdot \delta \quad (21)$$

제어 입력 (15)-(18)에 의하여 Uniform Bounded 를 만족한다. 즉 식 (4)의 해인 추적 오차가 상태 공간의 원점에서 Uniform Bounded된다.

증명 : Lyapunov 후보함수,  $v(t)$ 를

$$v(t) = \frac{1}{2} s^2(t) \quad (22)$$

로 선정하고 그의 미분은 다음과 같다.

$$\frac{dv(t)}{dt} = s(t) \cdot n(t) - s(t) \cdot (k_{x1} \cdot s(t) + k_{x2} \frac{s(t)}{|s(t)| + \delta})$$

절대값을 취하면

$$\frac{dv(t)}{dt} < |s(t)| \cdot |n(t)| - k_{x1} \cdot |s(t)|^2 - k_{x2} \frac{|s(t)|^2}{|s(t)| + \delta}$$

$N$ 의 정의에 의해서  $|n(t)| < N$ 을 만족하므로

$$\frac{dv(t)}{dt} < |s(t)| \cdot (N - k_{x1} \cdot |s(t)|) - k_{x2} \frac{|s(t)|^2}{|s(t)| + \delta}$$

이되고 정리하면

$$\frac{dv(t)}{dt} < -\frac{|s(t)| \cdot k_{x1}}{|s(t)| + \delta} (|s(t)|^2 + 2 \cdot \alpha \cdot |s(t)| - \beta)$$

$$\alpha = \frac{k_{x2} - N}{2}, \quad \beta = \frac{\delta \cdot N}{k_{x1}} \quad (23)$$

이된다. 따라서  $|s(t)| > \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha$  영역에서

$$\frac{dv(t)}{dt} < 0$$

이므로 Uniform Bounded를 만족한다.

#### 4. 시뮬레이션

추적 제어 시뮬레이션을 다음 최종 직류 전동기에 대하여 수행하였다.

$$\dot{\theta} = \omega$$

$$\dot{\omega} = -.33\omega + 20.0 \cdot i_a - d \cdot V \quad (24)$$

여기서  $d \cdot V = 100 \cdot \sin(\theta)$  연속 부하 변동이다. 현재 위치에서 최종 위치 명령  $\theta_f = 90^\circ$ 에 대한 시간별 위치 명령을 다음과같은 다항식으로 주어진다.

$$\theta_i = \frac{\theta_f}{2} - t - \frac{\theta_f \cdot \sin(\pi t)}{\pi t} \quad [rad] \quad (25)$$

표본주기를 1 [msec]로 선정하였다. 식 (5)의 슬라이딩 면의 계수,  $c_0$ 와  $c_1$ 를 100과 20로 선정하여  $\Lambda$ 의 고유치를 -10에 이중 극(pole)을 배치하였으며 식 (7)의  $K$ 와  $\kappa$ 는 10과 6.5로 결정된다. 따라서

$$\begin{aligned} |e_1| &< 1.54 \cdot \gamma \\ |e_2| &< 158 \cdot \gamma \end{aligned} \quad (26)$$

최대 추적 오차  $0.1^\circ$ 을 위해  $\gamma$ 를 0.065로 선정한다. 슬라이딩 면을 0.065로 유계 시키기 위해 식 (20)의  $N=2$ 에 대해 식 (18)의 이득,  $k_{x1}$ 와  $k_{x2}$ 를 20과 20으로 선정하고  $\delta$ 를 0.05 정하였다.

기존의 가변구조 제어에서 슬라이딩면의 계수를  $c_0=0$ ,  $c_1=10$ 으로 선정 -10에 단일 극을 두었다. 제어입력은 다음과같다.

$$i_a = g_1 \cdot \text{sgn}(e_1 \cdot s) + g_2 \cdot \text{sgn}(e_2 \cdot s) + g_3 \cdot \text{sgn}(s) + w \quad (27)$$

여기서 이득은  $g_1=5$ ,  $g_2=5$ ,  $g_3=8$ 로 선정 시뮬레이션하였다. 그림 2는 시간에 따른 원하는 위치  $\theta_i$ , 속도,  $\dot{\theta}_i$ 와 가속도,  $\ddot{\theta}_i$ 이다. 그림 3은 기존의 가변구조 제어의 결과이고 그림 4는 제안된 연속 가변구조 제어의 결과이다. 기존의 제어 입력은 가변 부하의 영향을 제거하기 위해 부하의 최대치에 대하여 최악의 경우(worst case)로

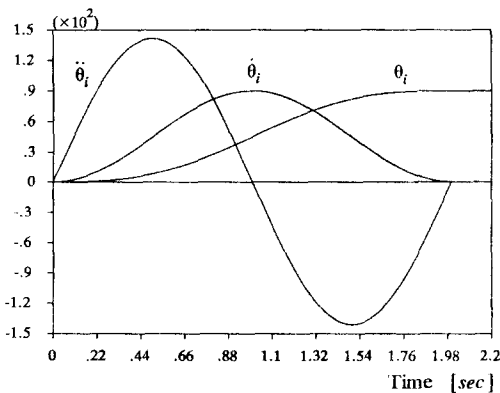


그림 2 원하는 위치명령,  $\theta_i$  속도,  $\dot{\theta}_i$ 와 가속도,  $\ddot{\theta}_i$

채터링하고 있다. 제안된 방식에서는 제어 입력에 채터링이 존재하지 않는다. 또한 추적 오차는  $0.1^\circ$  이내로 제한이 되었다. 따라서 기존의 결과와 제안된 방법의 결과를 비교해 보면 기존의 결과에서는 추적 오차에 대한 정보를 얻을 수 없으며 채터링 문제가 존재하는데 반해 제안된 결과에서는 부하변동이 존재함에도 불구하고 추적 오차를 보장할 수 있으며 채터링 문제 또한 개선이 되었다.

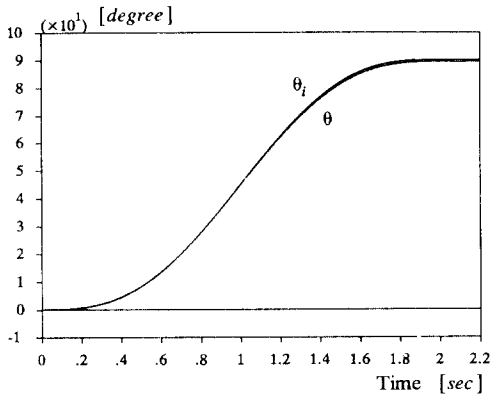
## 5. 결 론

직류 전동기 강인한 추적 제어에 채터링 문제가 없는 연속 가변구조 제어에 대하여 연구하였다. 제안된 알고리즘에 대한 안정성을 해석하였으며 이 해석을 바탕으로 부하 변동이 존재하는 경우에 대하여도 추적성능을 보장 받을 수 있었다. 기존의 가변구조 제어와 비교 시뮬레이션을 통하여 개선된 성능을 보였다.

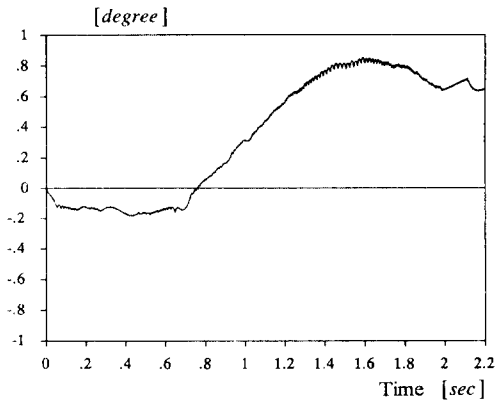
## 참 고 문 헌

- [1] 이 정훈, 김 종준, 이 대식, 이주장, 윤 명중, "새로운 가변 구조 제어기의 설계에 관한 연구," 90 한국자동제어학술회의 논문집, vol.1, pp.550-555, 1990
- [2] Shin-Ching Lin and Song-Jau Tsai, "A Microprocessor-Based Incremental Servo System with Variable Structure," IEEE Trans. on Industrial Electronics, vol. IE-31, No.4, November, 1984.
- [3] H. Hashimoto, et.al., "A Microprocessor-Based Robot Manipulator Control With Sliding Mode," IEEE Trans. Industrial Electronics, vol.34, no.1, pp.11-18, 1987.
- [4] Dae-Sik Lee, Marn-Go Kim and Myung-Joong Youn, "Adaptive Tracking Control of DC Servomotors Using Sliding Surface," Proc. of 1990 Inter. Power Electronics Conference, Tokyo, Japan, pp.272-277, 1990.
- [5] U. Itkis, *Control Systems of Variable Structure*. New York: Wiley, 1976.
- [6] V. I. Utkin, "Variable Structure Systems with Sliding Modes," IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-22, no.2, pp.212-222, 1977.

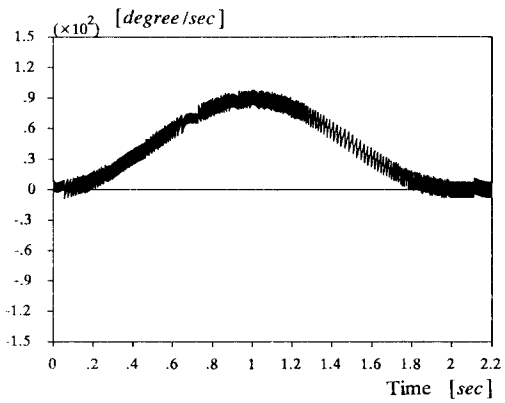
[7] R. A. Decarlo et. al., "Variable Structure Control of Nonlinear Multivariable Systems: A Tutorial," *Proc. of IEEE*, vol.76 no.3, 212-232, 1988.



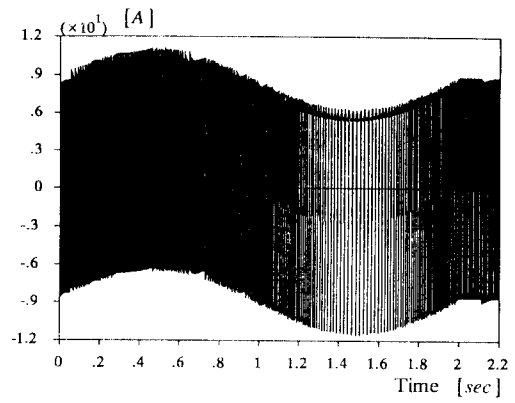
(a) Motor Position,  $\theta$



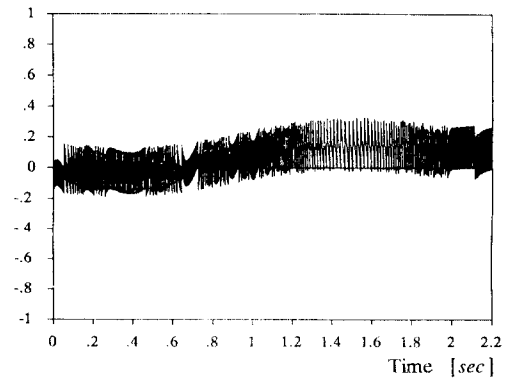
(b) Tracking Error,  $e_1$



(c) Motor Speed,  $\omega$

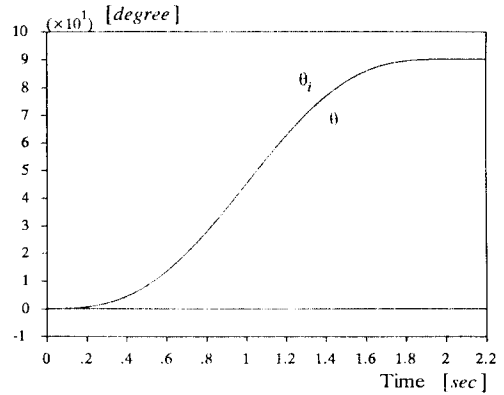


(d) Control Input,  $i_a$

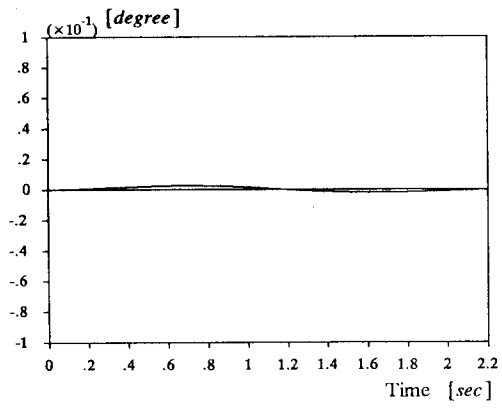


(e) Sliding Surface

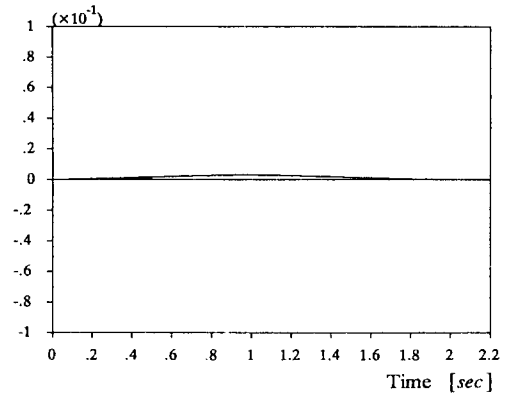
그림 3 기존의 가변구조 제어의 결과



(a) Motor Position,  $\theta$

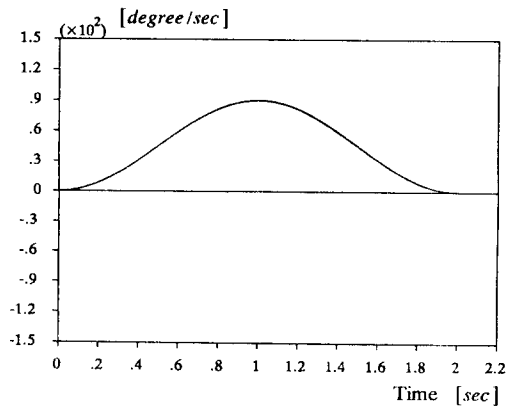


(b) Tracking Error,  $e_1$



(c) Sliding Surface

그림 4 제안된 연속 가변구조 제어의 결과



(c) Motor Speed,  $\omega$

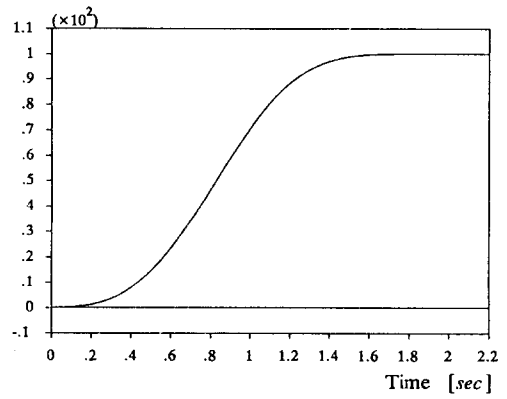
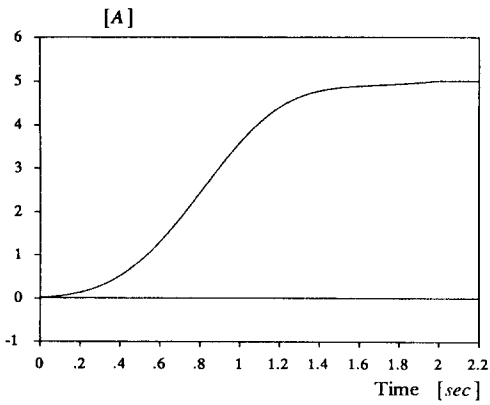


그림 5 인가된 부하 변동  $d \cdot V = 100 \cdot \sin(0)$



(d) Control Input,  $i_a$