

백색잡음 미분방정식에 대한 디지털 시뮬레이션

조 항 주

국 방 과 학 연 구 소

Digital Simulation of Differential Equations Driven by White Noise

Hangju Cho

The Agency for Defence Development

Abstract

This paper analyzes two numerical integration methods, both based on the Runge Kutta 4-th order formula for deterministic systems, for digital simulation of a differential equation driven by white noise. It is shown that a "standard" Runge Kutta method for stochasitic systems yields solutions of Stratonovich differential equations, while Riggs and Phillips' method results in solutions of Ito differential equations. Therefore the white noise differential equation must be converted into the equivalent ito equation before the latter method is used. Digital simulation results for a simple differential equation are also presented.

1. 서론

우리는 실제 동적 시스템 (Dynamic System) 을 모델링할 때 통상 백색잡음, 특히 백색 가우시안 잡음 (White Gaussian Noise), ζ_t 를 사용하여

$$\dot{X}_t = f(X_t, t) + g(X_t, t) \zeta_t \quad (1)$$

와 같은 백색잡음 미분방정식을 고려한다. 이 백색잡음 미분방정식은 우리가 ζ_t 를 넓은 대역폭을 갖는 가우시안 프로세스의 편리한 근사적 표현으로 볼 때, 식 (2) 와 같이 수학적으로 잘 정의된 브라운운동 (Brownian Motion Process, 또는 Wiener Process) 을 입력으로 하는 스토캐스틱 미분방정식으로 해석할 수 있음은 잘 알려진 사실이다 ([1]).

$$dX_t = f(X_t, t) dt + g(X_t, t) \circ dW_t \quad (2)$$

식 (2) 의 \circ 는 Stratonovich 적분을 뜻하며, W_t 는 ζ_t 와 같은 분산을 갖는 브라운운동이다. 식 (2) 는 Ito 적분을 사용하면

$$dX_t = f(X_t, t) dt + g(X_t, t) dW_t + \frac{1}{2} \sigma^2 g(X_t, t) g_x(X_t, t) dt \quad (3)$$

과 같다. 여기에서 $g_x = \partial g / \partial x$ 이다.

이와 같이 어떤 물리적인 동적 시스템을 식 (1) 의 백색잡음 미분방정식으로 표현하였을 때 그 수학적인 해석은 식 (2) 또는 (3) 의 스토캐스틱 미분방정식을 통해 수행할 수 있으나, 일반적으로 이들 스토캐스틱 미분방정식의 解는 Closed Form 으로 구해내기 어렵다. 따라서 이들 解의 확률적 특성을 알아보기 위하여는, 선형시스템의 경우를 제외하고는 거의 컴퓨터를 이용한 디지털 시뮬레이션에 의존할 수 밖에 없다. 그러나, 확정시스템의 경우와는 달리, 스토캐스틱 미분방정식의 디지털 시뮬레이션은 그 적분방식에 따라 그 해가 현격히 달라지며 이는 이미 널리 알려진 사실이다. 예를 들면, [2] 에서는 간단한 스토캐스틱 미분방정식에 대한 시뮬레이션을 통하여 여러 수치적분방식과 스토캐스틱 적분형태 사이에 다음과 같은 관계가 있음을 보고하고 있다.

- (i) Euler 방법 } ——— Ito Integral
- Predictor 방법 }
- (ii) Runge Kutta 방법 ——— Stratonovich Integral
- (iii) Predictor-Corrector 방법 — Unidentified Solution

위 결과는 Ito 및 Stratonovich 적분의 정의와 수치적분방식 각각의 구체적 방법들을 살펴보면 쉽게 이해할 수 있다. 그러나 여기서 한 가지 중요한 사실은, 확정시스템에 대한 수치적분방식 중 가장 널리 쓰이고 있는 Runge Kutta 방식을 스토캐스틱 시스템에 구현하는 데에는 적어도 두 가지 이상의 서로 다른 방법들이 쓰이고 있으며, 또한 이들 방법들에 의한 해가 서로 다르다는 것이다. 즉, Runge Kutta 적분방식을 스토캐스틱 시스템에 어떻게 적용하여 사용하느냐에 따라, [2] 에 보고된 바와는 달리, 그 시뮬레이션 결과가 Ito 적분값이 될 수도 있다는 사실이다.

이 논문에서는 스토캐스틱 미분방정식에 대한 "표준적인" Runge Kutta 적분방식(2절)과 그리고 [3] 에서 제시된 Runge

Kutta 적분방식(3절)을 살펴보고, 이 두 적분방식들이 서로 다른 해를 산출해 냄을 보인다. 4절에서는 간단한 스토캐스틱 미분방정식에 대한 시뮬레이션 결과를 보임으로써 이 논문의 해석결과를 입증한다.

2. Runge Kutta 적분방식에 의한 디지털 시뮬레이션

Runge Kutta (RK) 방법은 미분방정식의 수치해석시 가장 널리 쓰이는 방법 중 하나이며, 각 구간 $[t_k, t_{k+1})$ 에서의 피적분함수값을 그 구간 내의 여러 점에서의 피적분함수값들에 대한 Weighted Sum 으로 취하게 되므로, 개념상 Stratonovich 적분에 해당되는 解를 산출하게 되는 것으로 생각할 수 있다. 따라서

$$dX_t = g(X_t, t) \circ dW_t \quad (4)$$

와 같은 스토캐스틱 미분방정식에 대한 RK 공식 (4차의 경우)에 의한 표준적인 시뮬레이션 방법을 살펴보고, 이 방법이 실제로 (4)의 Stratonovich 미분방정식을 시뮬레이션함을 보이고자 한다. 보다 구체적으로 설명하면, 아래에 RK 공식이 산출해내는 프로세스 X_k 의 n 차 모우먼트 (n -th Moment) 들이 수치적분간격 (Integration Step Size) 이 0 으로 감에 따라 식 (4)의 X_t 의 n 차 모우먼트로 수렴함을 보인다. (랜덤변수의 확률분포는, 그 특성함수 (Characteristic Function) 가 원점부근에서 Taylor 급수전개가 가능하면, 그 랜덤변수의 모든 n 차 모우먼트들에 의해 결정될 수 있으므로 ([5]), 이와 같은 해석결과는 RK 공식에 의한 디지털 시뮬레이션이 생산해내는 랜덤변수 X_k 의 확률분포가 수치적분간격이 0 로 감에 따라 식 (4)의 X_{t_k} 의 확률분포로 접근함을 기대케 한다. 그러나, 이 논문에서는 수치적분결과와 X_t 의 확률분포에 대한 엄밀한 분석은 시도하지 않는다. 또한, 우리가 스토캐스틱 시스템에 대한 디지털 시뮬레이션을 할 때 그 결과로서 살펴보는 것은 통상적으로 解의 평균치와 분산이므로, 이를 위하여는 모든 n 차 모우먼트를 살펴보아서 올바른 디지털 시뮬레이션이 수행되는지의 여부를 가리는 것만으로도 족할 것이다.) 여기서, 편의상 (W_t)는 표준브라운운동 (즉, $\sigma=1$)로 간주한다.

식 (4)에 대한 RK 공식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$X_{k+1} - X_k = G_k \quad (5)$$

$$G_k = a_1 K_1 + a_2 K_2 + a_3 K_3 + a_4 K_4 \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= g(X_k, t_k) Z_k \\ K_2 &= g(X_k + b_1 K_1, t_k + c_1 h) Z_k \\ K_3 &= g(X_k + b_2 K_1 + b_3 K_2, t_k + c_2 h) Z_k \\ K_4 &= g(X_k + b_4 K_1 + b_5 K_2 + b_6 K_3, t_k + c_3 h) Z_k \end{aligned} \right\} (7)$$

$$h = t_{k+1} - t_k \quad (8)$$

여기에서 주목할 것은, 식 (4)의 $g(X_t, t)$ 에 대해서만 확정 시스템의 RK 공식과 같이 그 함수값을 4 점에서 취해 그 Weighted Sum 을 사용했으며, dW_t 에 대하여는 하나의 랜덤변수 Z_k 를 취하여 사용했다는 점이다. 따라서 이 적분방식이 Stratonovich 적분의 정의와 매우 흡사함을 알 수 있다. 식 (7)의 Z_k 는 $W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$ 로 볼 수 있으며, 따라서 각각의 Z_k 가 평균치 0, 분산 h 를 갖고, $\{Z_k\}$ 는 서로 독립적인 가우시안 랜덤변수들의 수열 (Sequence) 이 되도록 그 값을 취한다. 상수 a_1, b_1, c_1 는 확정시스템의 경우와 같이 Runge, Kutta, 또는 Gill 등의 값들을 쓸 수 있다. 이들 상수값들은 모든 경우에 있어서 다음 관계식을 만족한다 ([4], p140).

$$\left. \begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= 1 \\ c_1 = b_1, c_2 = b_2 + b_3, c_3 = b_4 + b_5 + b_6 \\ a_2 c_1 + a_3 c_2 + a_4 c_3 &= \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} (9)$$

위 RK 방식에 의한 수치적분결과와 n 차 모우먼트와 식 (4)의 解 X_t 의 n 차 모우먼트를 비교하기 위해, 우선 식 (4)의 X_t 에 대한 n -th moment 를 구해보자. 식 (4)를 Ito 스토캐스틱 미분방정식으로 바꾸어 보면,

$$dX_t = g(X_t, t) dW_t + \frac{1}{2} g(X_t, t) g_x(X_t, t) dt \quad (10)$$

와 같다. X_t^n 에 Ito 공식을 적용하면,

$$\begin{aligned} dX_t^n &= n X_t^{n-1} g dW_t + \frac{1}{2} n X_t^{n-1} g_x dt \\ &\quad + \frac{1}{2} n(n-1) X_t^{n-2} g^2 dt \end{aligned} \quad (11)$$

(표기의 편의상 $g(X_t, t)$ 및 $g_x(X_t, t)$ 의 자변수 (Argument)는 생략함). 따라서 Ito 적분의 성질을 이용하여

$$E(dX_t^n) = \frac{n}{2} E(X_t^{n-1} g_x g + (n-1) X_t^{n-2} g^2) dt, \quad (12)$$

또는, X_t^n 이 mean square differentiable 함을 가정하면,

$$\frac{dE(X_t^n)}{dt} = \frac{n}{2} \{ E(X_t^{n-1} g_x g) + (n-1) E(X_t^{n-2} g^2) \}. \quad (13)$$

이제 식 (5)-(8)에 의해 산출되는 X_k 들의 n 차 모우먼트를 구하기 위하여, 우선 K_1 를 (X_k, t_k) 부근에서 Taylor 급수로 전개하여 1차 항들만 취하면 다음과 같다 (여기서 $g_t = \partial g(X_t, t)/\partial t$ 임).

$$\begin{aligned} K_1 &= g Z_k \\ K_2 &= (g + c_1 h g_t) Z_k + b_1 g g_x Z_k^2 \\ K_3 &= (g + c_2 h g_t) Z_k + \{(b_2 + b_3) g g_x + c_1 b_3 h g_t g_x\} Z_k^2 \\ &\quad + b_1 b_3 g g_x Z_k^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_4 = & (g + c_3 h g_t) Z_k + \{(b_4 + b_5 + b_6) g g_x \\
& + (c_1 b_5 + c_2 b_6) g_t g_x h\} Z_k^2 \\
& + \{(b_1 b_5 + b_2 b_6 + b_3 b_6) g g_x + c_1 b_3 b_6 g_t g_x h\} Z_k^3 \\
& + b_6 b_1 b_3 g g_x Z_k^4
\end{aligned}$$

여기에서 주목할 것은, 랜덤변수 Z_k 는 X_k 와는 서로 독립적 (independent) 이라는 것이다. 이는 X_k 가 Z_0, Z_1, \dots, Z_{k-1} 에 의하여 결정되며 Z_k 는 $(Z_0, Z_1, \dots, Z_{k-1})$ 에 독립적이기 때문이다. 따라서 Z_k 는 X_k 및 t 의 함수인 g, g_t, g_x 들과 서로 독립적이다. 이 사실과 위 Taylor 급수전개식을 이용하여 랜덤변수 $H(X_k)G_k$, $H(\cdot)$ 는 임의의 Borel Measurable 함수, 에 기대값을 취하면, 다음과 같이 됨을 쉽게 보일 수 있다.

$$\begin{aligned}
E(H(X_k)G_k) &= \{a_2 b_1 + a_3(b_2 + b_3) + a_4(b_4 + b_5 + b_6)\} E(H(X_k)g g_x) h \\
&+ o(h) \\
E(H(X_k)G_k^2) &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2 E(H(X_k)g^2) h + o(h) \\
E(H(X_k)G_k^n) &= o(h), \text{ if } n \geq 3
\end{aligned} \tag{14}$$

식 (14) 은 K_i 들을 2차 이상까지 Taylor 급수로 전개하여 계산하여도 같은 결과가 되며, 이는 $E(Z_k^2) = h$ 이므로 Z_k 가 $h^{0.5}$ order 처럼 행동하기 때문이다. 식 (5) 에서

$$\begin{aligned}
X_{k+1}^n - X_k^n &= n X_k^{n-1} G_k + \frac{1}{2} n(n-1) X_k^{n-2} G_k^2 \\
&+ \text{higher order terms of } G_k
\end{aligned} \tag{15}$$

이므로

$$\begin{aligned}
E(X_{k+1}^n - X_k^n) &= [n(a_2 b_1 + a_3(b_2 + b_3) + a_4(b_4 + b_5 + b_6)) \cdot \\
&E(X_k^{n-1} g g_x) + \frac{1}{2} n(n-1)(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \cdot \\
&E(X_k^{n-2} g^2)] h + o(h).
\end{aligned}$$

식 (9) 의 관계를 이용하면 위 식은 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned}
E(X_{k+1}^n) - E(X_k^n) &= \frac{1}{2} n \{ E(X_k^{n-1} g g_x) \\
&+ (n-1) E(X_k^{n-2} g^2) \} h + o(h). \tag{16}
\end{aligned}$$

식 (16) 과 식 (13) 를 비교해보면, 식 (15) 가 h 가 0 로 갈 때 따라 식 (13) 의 확정시스템의 미분방정식의 해를 산출해 낼 수 있음을 알 수 있다. 즉, 모든 n 에 대하여, 식 (5)-(8) 의 적분결과와 n 차 모우먼트가 h 가 0 로 갈 때 따라 식 (4) 의 解 X_t 의 n 차 모우먼트로 수렴한다. 따라서 이 절에서 설명한 RK 공식은 Stratonovich 적분을 시뮬레이션한다.

3. Riggs 적분방식에 의한 디지털 시뮬레이션

Riggs 와 Phillips [3] 는 최근 2절에서 설명한 공식과는 다른 Runge Kutta 적분방식을 식 (1) 의 백색잡음 미분방정식의 시뮬레이션에 사용하는 방법을 제안하고, 선형 백색잡음 미분방정식의 경우만을 고려하여 그 방법이 (1) 을 시뮬레이션함을 보였다. 아래에 Riggs 와 Phillips 의 방법 (이하 Riggs 적분방식이라 칭함) 을 설명한다. 설명의 편의상 식 (1) 에서 백색잡음항만을 고려한 식 (17) 을 사용한다.

$$X_t = g(X_t, t) \zeta(t) \tag{17}$$

서론에서 이미 언급한 바와 같이 식 (17) 은 식 (4) 의 Stratonovich 미분방정식을 의미한다. 이제 식 (17) 을 확정시스템으로 간주하고 Runge Kutta 공식을 적용해 보면, 식 (17) 에 대한 수치적분공식은 식 (5), (6), (8) 과

$$\begin{aligned}
K_1 &= g(X_k, t_k) V_{k1} \\
K_2 &= g(\bar{X}_k + b_1 K_1, t_k + c_1 h) V_{k2} \\
K_3 &= g(\bar{X}_k + b_2 K_1 + b_3 K_2, t_k + c_2 h) V_{k3} \\
K_4 &= g(\bar{X}_k + b_4 K_1 + b_5 K_2 + b_6 K_3, t_k + c_3 h) V_{k4}
\end{aligned} \tag{18}$$

이 된다. 여기에서

$$\begin{aligned}
V_{k1} &= \zeta(t_k) h \\
V_{ki} &= \zeta(t_k + c_i h) h, \quad i=2,3,4.
\end{aligned}$$

그러나 이 경우, V_{ki} 들은 가우시안 랜덤변수이나 그 분산이 무한대이므로 이를 구현할 수는 없다. 따라서 [3] 에서는 $\{V_{ki}\}$ 를 동일한 분산 $0h < \infty$ 를 갖는 서로 독립인 랜덤변수들로 간주하고, 식 (5), (6), (8) 및 (18) 로 식 (17) 을 올바르게 시뮬레이션 할 수 있는 Q 를 구하는 방법을 함수 g 가 constant 인 경우에 대하여 제시하였다. 여기서 V_{ki} 의 분산을 $0h$ 와 같이 0(h) 로 한 것은 $V_{ki} = \zeta(t')h \approx W(t'+h) - W(t')$ (이 경우 $E(V_{ki}^2) = h$) 로도 생각할 수 있음을 고려한다면 이해하기 어렵지 않을 것이다.

위 Riggs 적분방식은, [3] 에 설명된 바와 같이, 선형시스템의 경우에는 올바른 결과를 산출함을 볼 수 있다. 그러나 재미있는 것은, [3] 에서는 검토되지 않았으나, 비선형의 경우에도 Riggs 방식을 사용할 수 있으며, 다만 이 경우에는 Riggs 방법에 의한 시뮬레이션 결과가 Stratonovich 스토크스틱 미분방정식의 해가 되는 것이 아니고 Ito 스토크스틱 미분방정식의 해가 된다는 것이다 (선형시스템의 경우에는 Ito 적분치와 Stratonovich 적분치가 같음을 상기할 필요가 있다). 아래에 이 사실을 앞 절에서와 같은 방법으로 보인다.

먼저 식 (18) 의 K_i 를 (X_k, t_k) 에서 Taylor 급수 1차 항까지 전개하면 (앞 절에서 설명한 바와 같이, $E(V_{ki}^2) = 0h$ 이므로 V_{ki} 는 $0(h^{0.5})$ 로 간주할 수 있으며, 따라서 Taylor 급수의 2차 항 이상은 모두 $o(h)$ 로 볼 수 있다. 그러므로 2

차 항 이상을 사용하여도 이 절의 해석결과는 같다).

$$K_1 = g V_{k1}$$

$$K_2 = (g+c_1hg_t) V_{k2} + b_1gg_x V_{k1}V_{k2}$$

$$K_3 = (g+c_2hg_t) V_{k3} + b_2gg_x V_{k1}V_{k3} + b_3g_x(g+c_1hg_t) \cdot V_{k2}V_{k3} + b_1b_3gg_x^2 V_{k1}V_{k2}V_{k3}$$

$$K_4 = (g+c_3hg_t) V_{k4} + b_4gg_x V_{k1}V_{k4} + b_5g_x(g+c_1hg_t) V_{k2}V_{k4} + b_1b_5gg_x^2 V_{k1}V_{k2}V_{k4} + b_6g_x(g+c_2hg_t) V_{k3}V_{k4} + b_2b_6gg_x^2 V_{k1}V_{k3}V_{k4} + b_3b_6g_x^2(g+c_1hg_t) V_{k2}V_{k3}V_{k4} + b_1b_3b_6gg_x^3 V_{k1}V_{k2}V_{k3}V_{k4}$$

이 된다. V_{ki} 들은 서로 독립적이고, 또한 앞절에서 설명한 바와 같은 논리로 X_k 와 서로 독립적이므로, 임의의 X_k 의 함수 $H(X_k)$ 에 대하여

$$E(H(X_k)G_k) = o(h)$$

$$E(H(X_k)G_k^2) = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) E(H(X_k)g^2) Qh + o(h)$$

$$E(H(X_k)G_k^n) = o(h), \text{ if } n \geq 3$$

따라서 식 (15) 를 이용하여

$$E(X_{k+1}^n) - E(X_k^n) = \frac{1}{2} n(n-1) (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) \cdot E(X_k^{n-2} g^2) Qh + o(h) \quad (19)$$

식 (19) 를 식 (13) 의 $E(X_t^n)$ 에 대한 미분방정식과 비교해 보면, 식 (19) 에는 식 (13) 의 우측 첫번째 항이 없음을 알 수 있다. 따라서, Riggs 방식은 식(4) 의 Stratonovich 미분방정식의 해를 산출해내지 못한다. 그러나, 식 (4) 대신

$$dX_t = g(X_t, t) dW_t \quad (20)$$

의 Ito 미분방정식을 고려해 보면, Ito 공식에 의한 X_t^n 의 스토캐스틱 미분방정식이

$$dX_t^n = n X_t^{n-1} g dW_t + \frac{1}{2} n(n-1) X_t^{n-2} g^2 dt$$

와 같이 되고 따라서,

$$E(dX_t^n) = \frac{1}{2} n(n-1) E(X_t^{n-2} g^2) dt$$

또는

$$\frac{dE(X_t^n)}{dt} = \frac{1}{2} n(n-1) E(X_t^{n-2} g^2) \quad (21)$$

가 된다. 그러므로 식 (19) 는

$$Q = 1/(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) \quad (22)$$

일 때, h 가 0 로 감에 따라 식 (21) 의 해를 산출해 냄을 알

수 있다. 즉, Riggs 방식은 (22) 의 조건하에서 식 (20) 의 Ito 미분방정식의 해를 산출한다. 식 (22) 는 [3] 의 결과와 일치하며, 참고적으로 Runge, Kutta, Gill 상수들에 대하여 Q 의 값은 각각 18/5, 16/5 및 18/7 이 됨을 밝혀둔다.

4. 디지털 시뮬레이션 예

앞 절에서 RK 적분방식과 Riggs 적분방식에 의한 디지털 시뮬레이션에 관하여 설명하였다. 이들 방법들의 차이점에 대하여 아래에 간단히 기술한다.

첫째, Riggs 방식은 Ito 미분방정식의 해를 산출하고 RK 방식은 Stratonovich 미분방정식의 해를 산출한다. 따라서 주어진 백색잡음 미분방정식의 시뮬레이션에 앞서서, 사용하고 자 하는 수치적분방식에 따라 거기에 맞는 스토캐스틱 미분방정식으로 바꾸어 줄 필요가 있다는 점을 유의하여야한다. 둘째, RK 방식은 pathwise solution, 즉 W_t 의 한 sample path 에 대한 해를 제공하여 준다. 그러나 Riggs 방식은 W_t 의 sample path 와는 전혀 무관하게 각 적분구간 $[t_k, t_{k+1})$ 에서 랜덤변수 V_{ki} 들을 생산하여 사용하기 때문에 pathwise solution 과는 무관하다. 따라서 Riggs 방식에 의한 하나의 해에 어떤 물리적인 의미를 부여하기는 곤란하다. 셋째, Riggs 방식에서는 Runge Kutta 공식에 사용하는 상수들을 다르게 사용할 때마다 랜덤변수 V_{ki} 의 분산값을 다르게 해주어야 하나, RK 방식에서는 그럴 필요가 없다.

다음은 이론적인 해 (Analytic Solution) 를 구할 수 있는 간단한 스토캐스틱 미분방정식에 대하여 디지털 시뮬레이션을 수행한 예를 보인다. 고려한 스토캐스틱 미분방정식은

$$dX_t = X_t dW_t, \quad X_0 = 1 \text{ a. s.} \quad (23)$$

이다. 여기서 W_t 는 표준 브라운운동이다. 이 방정식의 해는

$$X_t = \exp(W_t - \frac{1}{2} t) \quad (24)$$

으로 주어지며, 이는 Ito 공식을 사용하여 쉽게 증명해 보일 수 있다. 또한 식 (23) 의 평균치 및 분산을 구해보면, $E(X_t) = 1$, $\text{Var } X_t = e^t - 1$ 와 같다. 식 (23) 은

$$dX_t = X_t \circ dW_t - \frac{1}{2} X_t dt, \quad X_0 = 1 \text{ a. s.} \quad (25)$$

의 Stratonovich 미분방정식과 같으므로, Riggs 방식을 이용한 시뮬레이션에서는 식 (23) 를 사용하여, 그리고 RK 방식에서는 식 (25) 을 사용하여 Runge Kutta 공식을 구현하였다.

두 방식의 해들을 평가해 보기 위하여 각 경우에 500번 씩의 시뮬레이션을 수행하여 이 해들의 평균치 및 분산을 구하여 이를 위 이론적인 해의 평균치 및 분산과 비교해 보았다. 그림 1 과 그림 2 에 그 시뮬레이션 결과와 이론적인 해를 같이 그렸다. 이 그림들을 보면, Riggs 방식에 의한 시뮬

레이션 결과는 이론적인 해와 잘 맞으나, RK 방식의 결과에는 약 1.6 초 이후에 그 분산이 이론적인 해 부근에서 크게 파동치는 모습을 볼 수 있다. Riggs 방식이 보다 안정된 解를 산출해 내는 것은, 한 적분구간 $[t_k, t_{k+1})$ 에서 4개의 독립적인 랜덤변수들을 사용함으로써 이 구간에서의 브라운운동을 더 잘 모사할 수 있기 때문인 것으로 판단된다 (식 (24) 에 표시한 바와 같이 이 시뮬레이션에서 고려한 미분방정식의 해는 브라운운동의 지수함수이므로 브라운운동이 잘 모사될수록 시뮬레이션 결과가 좋다). 따라서 적분구간을 1/4 로 줄여 RK 방식으로 시뮬레이션을 해 보았으며, 그 결과는 그림 3 에서 보는 바와 같이 Riggs 방식의 결과 (그림 2) 와 흡사하다. 그림 4 에는 Riggs 방식에 의한 Runge Kutta 공식을 식 (25) 에 그대로 적용시켜 시뮬레이션한 결과를 보였다. 평균치나 분산 모두 그림 1 (그림 2) 의 이론적인 해와는 크게 차이를 알 수 있으며, 이는 Riggs 방법이 결과적으로

$$dX_t = X_t dW_t - \frac{1}{2} X_t dt, \quad X_0 = 1 \text{ a.s.} \quad (26)$$

의 Ito 미분방정식을 시뮬레이션하였기 때문이다. 참고적으로 식 (26) 의 해 X_t 의 평균치 및 분산은, $E(X_t) = e^{-0.5t}$ 와 $\text{Var } X_t = 1 - e^{-t}$ 이다. 마지막으로 이들 디지털 시뮬레이션에는 [6] 에서 제시된 FUNCTION UNIRAN 과 FUNCTION NXSEED 를 사용하여 Random Number 들을 생산하였음을 밝혀둔다.

5. 결론

이 논문에서는 스토캐스틱 미분방정식에 대한 Runge Kutta 적분방법의 두가지 구현방식에 대하여 분석하였다. RK 방식은 Stratonovich 적분치를 그리고 Riggs 방식은 Ito 적분치를 산출해 내므로, 식 (1) 과 같은 백색잡음 미분방정식을 시뮬레이션할 때에는 주의가 필요하다. 즉, RK 방식을 사용할 때에는 식 (2) 의 Stratonovich 미분방정식을, 그리고 Riggs 방식을 사용할 때에는 식 (3) 의 Ito 미분방정식을 사용하여 Runge Kutta 공식을 구현하여야 한다. 물론, 식 (1) 이 선형인 경우에는 이 두가지 방식이 모두 같은 결과를 내지만, 스토캐스틱 시스템에 대한 디지털 시뮬레이션이 요구되는 때는 비선형의 경우이므로 각 수치적분방식에 따라 어떠한 종류의 解가 계산되는 지에 대한 명확한 이해가 매우 중요하다.

참고문헌

- [1] E.Wong and B.Hajek, Stochastic Processes in Engineering Systems, Springer-Verlag, 1985
- [2] D.J.Wright, "The digital simulation of stochastic differential equations", IEEE Trans. Autom. Control, 1974, pp.75-76
- [3] T.L.Riggs, Jr. and C.L.Phillips, "Modeling continuous noise sources in digital simulations", Simulation, vol.48 no.1, 1987, pp.11-18
- [4] S.Kuo, Computer Applications of Numerical Methods, Addison-Wesley, 1972, pp.139-142
- [5] W.B.Davenport, Jr., Probability and Random Processes, McGraw-Hill, 1970
- [6] K. Marse and S.D. Roberts, "Implementing a portable FORTRAN uniform (0,1) generator", Simulation, 1983 October, pp.135-139

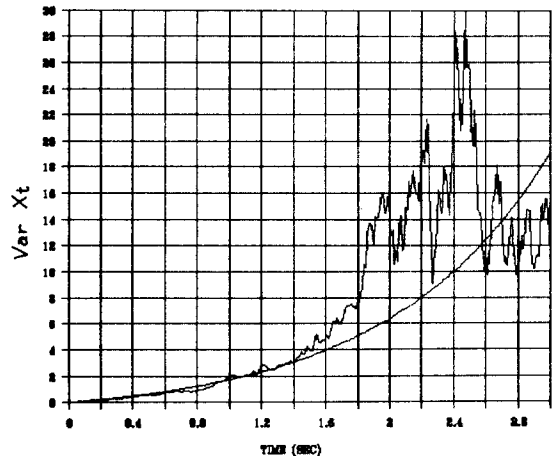
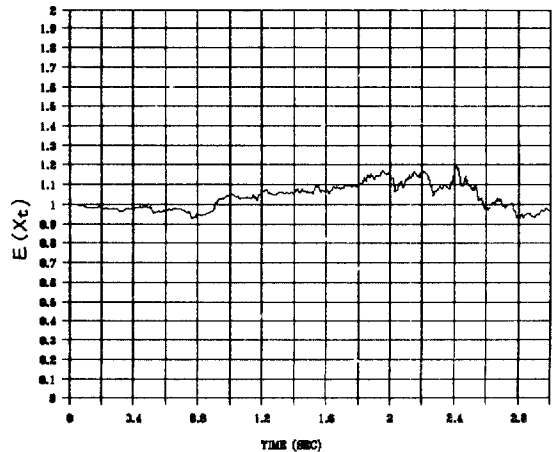


그림 1. RK 방식에 의한 디지털 시뮬레이션 ($h = 0.01$)
Fig.1. Digital simulation using RK method ($h = 0.01$)

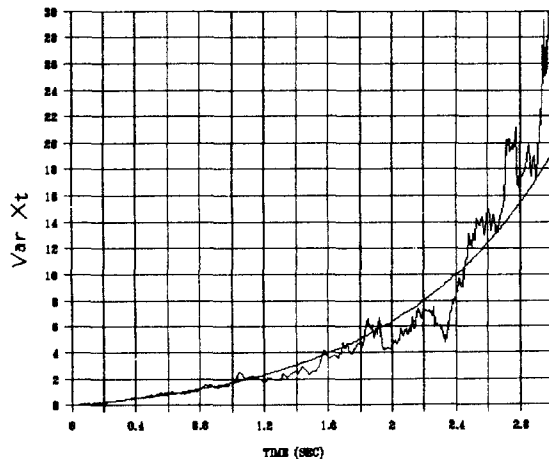
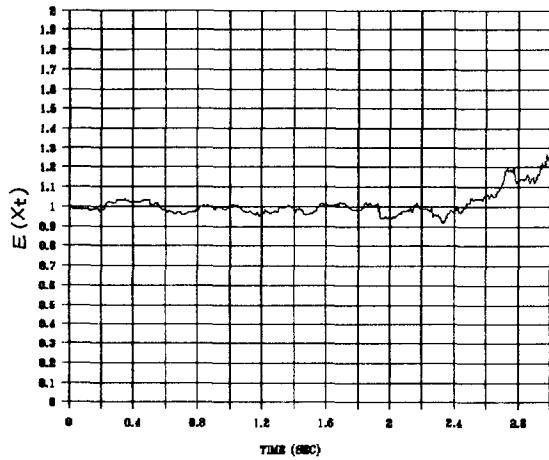


그림 2. Riggs 방식에 의한 디지털 시뮬레이션 ($h = 0.01$)
Fig.2. Digital simulation using Riggs method ($h = 0.01$)

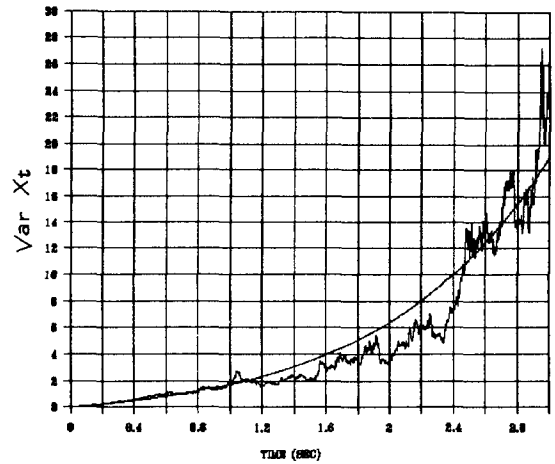
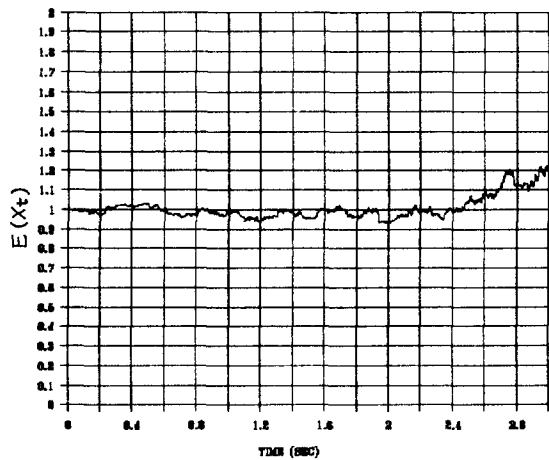


그림 3. RK 방식에 의한 디지털 시뮬레이션 ($h = 0.0025$)
Fig.3. Digital simulation using RK method ($h = 0.0025$)

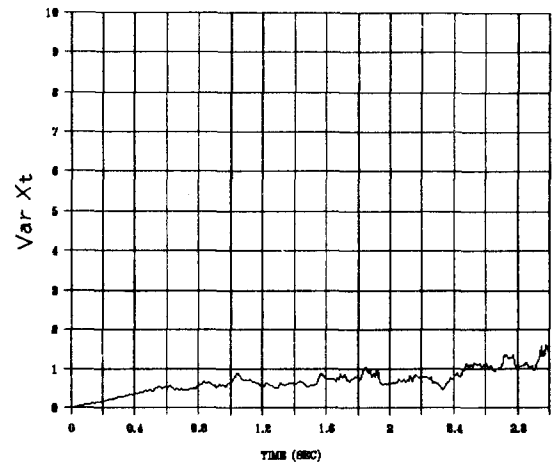
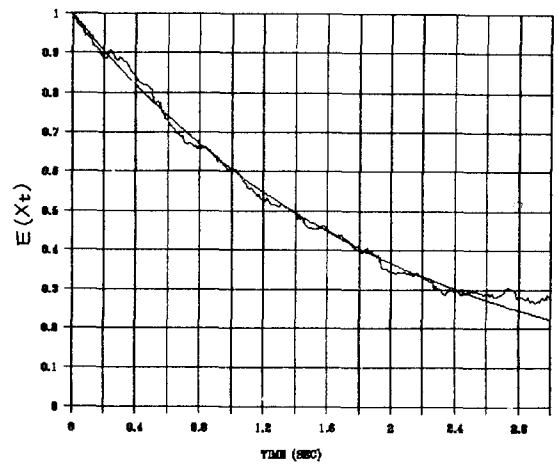


그림 4. Riggs 방식에 의한 디지털 시뮬레이션, 식 (26)
($h = 0.01$) ($h = 0.01$)
Fig.4. Digital simulation using Riggs method, Eqn.(26)