

# 유도탄 제어기의 이득-스케줄링에 관한 연구

송 찬 호 김 윤 식

국 방 과 학 연 구 소

## A study on the gain-scheduling of missile autopilot

Chanho Song Yoon Sik Kim

Agency for Defense Development

### ABSTRACT

A method of autopilot gain-scheduling is presented for missiles which have heavy aerodynamic coupling between pitch and yaw channels due to high maneuverability. Pitch and yaw autopilot are cross-coupled, and their feedback gains are scheduled by total acceleration and bank angle for given Mach number and height. Bank angle information is obtained by using a simple estimator.

By computer simulation, it is shown that the proposed method is superior to other existing methods.

### 1. 서 론

이득-스케줄링(Gain Scheduling)은 공학의 여러분야에서 성공적인 설계방법으로 사용되어 왔다.[1] 특히 유도탄을 포함한 비행체 제어기 설계의 경우 가장 널리 사용되어 온 방법중의 하나이다. 한편 SIT (Skid-To-Turn) 방식을 택하는 유도탄의 조종장치를 설계할때 일반적으로 Pitch, Yaw, Roll 경로의 상호 결합(Cross-coupling)을 무시하고 각 경로에 대한 Autopilot을 독립적으로 설계한다. 특히 대칭형 유도탄의 경우 Yaw Autopilot은 Pitch Autopilot과 동일한 구조를 갖는다. 이러한 설계 개념은 세 경로 사이의 상호 작용이 거의 없다는 가정을 기본으로 하고 있다. 이러한 가정은 유도탄의 공격각이 작거나 공격각이 큰 경우에는 Bank 각(또는 공력학적 Roll각 이라고 함)이 거의 변하지 않아야 성립한다. 그러나 유도탄 기동성을 증가시키기 위해서는 큰

공격각이 필요하며 이 경우 각 경로간의 공력학적 상호 결합은 무시할 수 없게 된다.[2] 따라서 각 경로가 서로 독립적이라는 가정은 더 이상 유용하지 않다. 또한 큰 공격각에서는 Bank 에 따른 공력 변화가 매우 크게 나타나게 된다.

유도탄 제어 이득의 스케줄링은 일반적으로 Mach 수, 고도, 하중배수 (Load Factor) 에 의해 이루어진다. 그러나 Bank 각에 따라 공력 특성이 크게 변할수 있으므로 Bank 각에 따른 적절한 이득 스케줄링이 가능하다면 유도탄의 성능은 더욱 개선 될것이다. 일반적으로 뱅크각은 직접 측정할 수 있는 값이 아니므로 예측기 설계가 필요하다.

본 논문에서는 뱅크각에 의해 공력 특성이 크게 변할수 있는 SIT 유도탄을 대상으로 공력학적 결합이 고려된 Pitch/Yaw Autopilot 설계 결과를 보인다. 고정된 마하수와 고도에서 제어 이득들을 하중 배수와 뱅크각의 함수로 스케줄하고 Bank각 정보는 Bank각 예측기로 부터 얻는다. 이러한 형태의 Autopilot 설계 결과를 Pitch, Yaw 각 경로에 대하여 독립적으로 설계한 결과와 비교해 보고 그 성능을 6-DOF Simulation 에 의해 확인해 본다.

2장에서는 대칭 형태의 유도탄에 대한 Pitch, Yaw 운동의 수학적 모델과 선형방정식 그리고 무차원 미계수를 구하는 방법을 설명하고, 3장에서는 가속도 제어기 Autopilot 설계를 위한 플랜트 모델을 설명한다. 4장과 5장에서는 Autopilot 설계 방법 및 결과에 대하여 설명한다. 마지막으로 결론에서는 문제점 및 앞으로의 연구방향에 대해 언급한다.

## 2. 유도탄 운동의 수학적 모델

이 절에서는 대칭 형태의 유도탄에 대한 Pitch/Yaw 운동의 수학적 모델을 기술한다. 공간상에서의 유도탄의 운동은 6개의 자유도를 갖는 방정식(6 DOF 방정식)과 Euler각에 대한 방정식에 의해 묘사될 수 있다. 8개의 상태변수  $p, q, r$  (Body 좌표계에서의 roll, pitch, yaw rate),  $\alpha, \beta$  (공격각, sideslip 각),  $\dot{\alpha}, \theta, \phi$  (Body 좌표계에서의 Euler 각)에 의해 표현되는 이러한 방정식은 심한 비선형 방정식이므로 적절한 가정[2]을 이용하여 표준화된 과정에 의해 간단화 시킨다.

결과는 다음과 같다.

$$\dot{\alpha} = Z_0(\alpha_T, \phi_a) + q + Z_1(\alpha_T, \phi_a, \delta_p) \quad (1)$$

$$\dot{\beta} = Y_0(\alpha_T, \phi_a) - r + Y_1(\alpha_T, \phi_a, \delta_y) \quad (2)$$

$$\dot{q} = M_0(\alpha_T, \phi_a) + M_q q + M_1(\alpha_T, \phi_a, \delta_p) \quad (3)$$

$$\dot{r} = N_0(\alpha_T, \phi_a) + N_r r + N_1(\alpha_T, \phi_a, \delta_y) \quad (4)$$

식 (1)-(4)에서  $\delta_p, \delta_y$  는 각각 pitch, Yaw 제어 날개의 변위각을,  $\alpha_T, \phi_a$  는 각각 총 받음각, Bank각을 의미한다.  $Z_0, Y_0, M_0, N_0$  는  $\delta_p = 0, \delta_y = 0$  일때의 공력학적 힘과 모멘트이고,  $Z_1, Y_1, M_1, N_1$  은  $\delta_p, \delta_y$  에 의한 힘과 모멘트이다. 이 값들은  $\alpha_T, \phi_a, \delta_p, \delta_y$  의 비선형 함수로 주어진다.  $Z_0, Z_1, Y_0, Y_1, M_0, M_1, N_0, N_1$  은 무차원한 공력 계수  $C_{z0}, \Delta C_z, C_{y0}, \Delta C_y, C_{m0}, \Delta C_m, C_{n0}, \Delta C_n$  로부터 구해진다.

예로,

$$\begin{aligned} Z_0(\alpha_T, \phi_a) &= C_{z0}(\alpha_T, \phi_a) QS/m \\ M_0(\alpha_T, \phi_a) &= C_{m0}(\alpha_T, \phi_a) QSD/I_y \\ Y_1(\alpha_T, \phi_a) &= \Delta C_y(\alpha_T, \phi_a, \delta_y) QS/m \\ N_1(\alpha_T, \phi_a) &= \Delta C_n(\alpha_T, \phi_a, \delta_y) QSD/I_z \end{aligned} \quad (5)$$

한편, 무차원 계수  $C_{z0}, C_{y0}, C_{m0}, C_{n0}$  는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} C_{m0} &= C_m' \cos\phi_a + C_n' \sin\phi_a \\ C_{n0} &= -C_n' \cos\phi_a + C_m' \sin\phi_a \\ C_{y0} &= C_y' \cos\phi_a + C_z' \sin\phi_a \\ C_{z0} &= -C_z' \cos\phi_a + C_y' \sin\phi_a \end{aligned} \quad (6)$$

여기서  $C_m', C_n', C_z', C_y'$  는 바람 좌표계에서 본 Pitch, Yaw, 평면의 공력학적 모멘트와 힘을 나타낸다. (그림 1 참조)

그림 2 는  $\alpha_T$  와  $\phi_a$  의 변화에 따른  $C_m'$  값의 변화를 보여주는 한 예이다. 그림 1 에서  $C_n', C_y'$  는 바람 방향이 이루는 평면상의 Maneuver 와 관계없는 공력학적 모멘트와 힘으로써 바람 방향에 대해 공기의 흐름이 비대칭을 이룰때 발생하며 각각 Induced Moment, Induced Force 라고 한다. 이 값은 일반적으로  $f(\alpha_T) * \sin 4\phi_a$  의 형태로 표시되며 그림 3 은  $C_n'$  에 대한  $f(\alpha_T)$  의 한 예이다.

식 (1) - (4) 를 주어진 Trim 상태 ( $\alpha_T, \phi_a$ ) 에서 선형화 하면 다음 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= Z_a \alpha + Z_b \beta + q + Z_d \delta_p \\ \dot{\beta} &= Y_a \alpha + Y_b \beta - r + Y_d \delta_y \\ \dot{q} &= M_a \alpha + M_b \beta + M_q q + M_d \delta_p \\ \dot{r} &= N_a \alpha + N_b \beta + N_r r + N_d \delta_y \end{aligned} \quad (7)$$

식 (7)의 차원 미계수  $Z_a, Z_b, Z_d, Y_a, Y_b, Y_d, M_a, M_b, M_q, M_d, N_a, N_b, N_r, N_d$  들은 무차원 미계수  $C_{za}, C_{zb}, C_{zd}, C_{ya}, C_{yb}, C_{yd}, C_{ma}, C_{mb}, C_{mq}, C_{md}, C_{na}, C_{nb}, C_{nr}, C_{nd}$  들로부터 표준화된 방법에 의해 계산 된다.

이제 무차원 미계수들이 무차원 공력 계수로부터 유도되는 과정을 살펴 본다.  $C_{mq}$  는  $\alpha_T$  와  $\phi_a$  의 변화에 무관한 상수로 가정하고,  $C_{md}$  는

$$C_{md} = \frac{\partial \Delta C_m}{\partial \delta_p}$$

에 의해 구한다.  $C_{ma}$  는  $C_m$  ( $C_m = C_{m0} + \Delta C_m$ ) 을 다음과 같이  $\alpha$  에 의해 편미분한 식으로 주어진다.

$$\begin{aligned} C_{ma} &= \frac{\partial C_m}{\partial \alpha} = \frac{\partial C_m'}{\partial \alpha_T} \frac{\partial \alpha_T}{\partial \alpha} \cos\phi_a + \frac{\partial C_n'}{\partial \alpha_T} \frac{\partial \alpha_T}{\partial \alpha} \sin\phi_a \\ &+ \frac{\partial C_m'}{\partial \phi_a} \frac{\partial \phi_a}{\partial \alpha} \cos\phi_a + \frac{\partial C_n'}{\partial \phi_a} \frac{\partial \phi_a}{\partial \alpha} \sin\phi_a \\ &+ (-C_m' \sin\phi_a + C_n' \cos\phi_a) \frac{\partial \phi_a}{\partial \alpha} \\ &+ \frac{\partial \Delta C_m}{\partial \alpha_T} \frac{\partial \alpha_T}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Delta C_m}{\partial \phi_a} \frac{\partial \phi_a}{\partial \alpha} \end{aligned} \quad (8)$$

다른 무차원 계수들도 마찬가지로 방법으로 유도 된다.

### 3. Autopilot 설계를 위한 Plant Model

가속도 제어를 설계하기 위해서는 식(7)로 주어진 공력학 모델의 상태변수 가운데  $a, \beta$  를 측정가능한 Pitch, Yaw 가속도  $Az$  와  $Ay$  로 대체하는 것이 바람직하다. [3] 한편 제어 fin 구동장치의 수학적 모델은 다음과 같이 간단히 1차로 가정한다.

$$\frac{\delta_p}{\delta_{pc}} = \frac{\delta_y}{\delta_{yc}} = G_a(s) ; \quad G_a(s) = \frac{\omega_n}{s + \omega_n} \quad (9)$$

문제를 간단히 하기 위하여 가속도계는 c.g 에 위치해 있다고 가정하자. 그러면 Pitch, Yaw 가속도(단위 g)값은 다음식으로 주어진다.

$$Az = \frac{U}{9.8} ( Za a + Zb \beta + Zd \delta_p ) \quad (10)$$

$$Ay = \frac{U}{9.8} ( Ya a + Yb \beta + Yd \delta_y )$$

상태변수  $x$ 와 제어입력  $u$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$x' = [Az \ Ay \ q \ r \ \delta_p \ \delta_y]$$

$$u = [\delta_{pc} \ \delta_{yc}]'$$

위식에서 " ' "는 전치 행렬을 의미하는 연산자이다.

식(10)에서,

$$\begin{bmatrix} a \\ \beta \end{bmatrix} = T x \quad (11)$$

$$\text{단, } T = H \begin{bmatrix} 9.8/U & 0 & 0 & 0 & -Zd & 0 \\ 0 & 9.8/U & 0 & 0 & 0 & -Yd \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} Za & Zb \\ Ya & Yb \end{bmatrix}$$

(10)식을 미분하여 (11)식을 대입하면,

$$\begin{bmatrix} \dot{Az} \\ \dot{Ay} \end{bmatrix} = A_1 x + B_1 u \quad (12)$$

단,

$$A_1 = \frac{U}{9.8} \left\{ H^2 T + T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & Zd & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & Yd \end{bmatrix} \right\}$$

$$B_1 = \frac{U}{9.8} \omega_n \begin{bmatrix} Zd & 0 \\ 0 & Yd \end{bmatrix}$$

같은 방법으로

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = A_2 x \quad (13)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} Ma & Mb \\ Na & Nb \end{bmatrix} T + \begin{bmatrix} 0 & 0 & Mq & 0 & Md & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Nr & 0 & Nd \end{bmatrix}$$

얻는다. 한편 식(9)로부터

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta}_p \\ \dot{\delta}_y \end{bmatrix} = A_3 x + B_3 u \quad (14)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_n \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} \omega_n & 0 \\ 0 & \omega_n \end{bmatrix}$$

위의 결과를 종합하면 다음과 같은 상태방정식이 얻어진다

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (15)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}$$

이제 위와 같이 구한 상태 방정식을 이산화 한후 가속도 명령  $Azc, Ayc$  가 계단함수 일때 가속도 오차가 0이 되도록 내부 모델원리를 이용하여 다음과 같은 상태변수  $Z_1(k), Z_2(k)$ 를 도입하고 이산화된 상태 방정식을 확장 시킨다.

$$Z_1(k+1) = Z_1(k) + Azc(k) - Az(k)$$

$$Z_2(k+1) = Z_2(k) + Ayc(k) - Ay(k)$$

확장된 플랜트 모델은 다음과 같다.

$$x(k+1) = Fx(k) + Gu(k) + Mr(k)$$

$$y(k) = Hx(k) \quad (16)$$

여기서,

$$x' = [ Z_1 \ Z_2 \ Az \ Ay \ q \ r \ \delta_{pc} \ \delta_{yc} ]$$

$$F = \begin{bmatrix} I & -C \\ -O_{6 \times 2} & \Phi \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} O_{2 \times 2} \\ \Gamma \end{bmatrix}, \quad H = [ O_{2 \times 2} \ C ]$$

단,  $\Phi, \Gamma$  는 A, B 로 부터 이산화된 시스템 및 입력 행렬이다.

#### 4. Autopilot 설계

앞서 유도한 설계 플랜트 모델을 이용하여 Kleinman 방법[4]에 의해 Autopilot 을 설계한다.

{F(k), G(k)} 에 의해 다음과 같은 상태방정식을 표현하자.

$$x(k+1) = F(k)x(k) + G(k)u(k)$$

{F(k), G(k)} 가 N step 에서 uniformly reachable 할때, Kleinman 방법에 의한 제어법칙은

$$u(k) = -L(k) x(k)$$

로 주어진다. 여기서,

$$L(k) = G'(k)\Phi'(k+N+1, k+1)Y_{N+1}^{-1}(k)\Phi(k+N+1, k+1)F(k)$$

$$\Phi(k, i) = F(k-1)F(k-2), \dots, F(i) \text{ for } k > i ; \Phi(i, i) = I$$

$$Y_N(k) = \sum_{i=k}^{k+N-1} \Phi'(k+N, i+1)G'(i)\Phi'(k+N, i+1)$$

주어진 Mach 수, 고도 에서  $\alpha_T$ ,  $\phi_a$  trim 값을 변화시켜가며 설계를 반복한후 설계가 끝나면 가속도  $A_t (A_t = \sqrt{A_z^2 + A_y^2})$  와  $\phi_a$  로 스케들하고  $\phi_a$  는 추정하여 사용한다. 총 받음각  $\alpha_T$  대신 가속도  $A_t$  로 스케들하는 이유는 첫째로  $\alpha_T$  는 측정하기 어렵고, 둘째로  $A_t \approx \sqrt{Z_0^2 + Y_0^2} (U/9.8)$  가 성립하므로  $\phi_a$  가 주어지면  $A_t$  와  $\alpha_T$  의 관계가 일의적으로 주어지기 때문이다.

$\phi_a$  추정은 다음과 같은 간단한 추정치를 사용하기로 한다.

$$\phi_a = \tan^{-1}(A_y/A_z) \quad (17)$$

#### 5. Autopilot 설계결과 및 6-DOF Simulation

이 절에서는 4절에서 설명된 설계방법에 따라 Autopilot 을 설계하고 6-DOF Simulation을 통하여 설계된 Autopilot 의 성능을 확인한다. 먼저 Pitch, Yaw 채널간 공력학적인 상호결합을 무시하고 설계된 Autopilot과 4절에 기술된 모델을 이용하여 설계된 결과를 비교한다. 설계는 유도탄의 추진체가 연소된후, Mach 수 1.8, 총 가속도  $A_t$  가 0g, 20g,  $\phi_a$  가 0, 22.5, 45, 67.5, 90 도 되는 비행 조건을 택하여 수행하였다. 시간응답 관점에서 볼때 설계 결과가 모두 만족할만한 응답특성(90 % rising time이 0.2 초 이내)을 나타내었으나, 공력학적으로 불안정한 영역이 존재하는 Bank 0°,  $A_t$  20g 의 Yaw 경로에서는 큰 Overshoot 가 발생하였다.

주파수 특성도 대체로 만족할만하여 GM 9 dB, PM 45° 이상을 확보할수 있었다. 또한 이득 교차 주파수(Gain Cross-over Frequency)도 비교적 작은 값이되도록 설계가 가능하였다.

설계결과 조종날개 변위의 궤환투우프 이득을 구동장치에 포함시킬 경우, 구동장치의 주파수 대역폭(BW: Band Width)이  $\omega_n$  보다 다소 늘어 났으나 구동장치 BW에 대한 Hardware상의 제한치를  $\omega_n$ 으로 가정하여 구동장치 궤환을 사용하지 않는 것으로 하였다.

그림 4, 그림 5 는 Pitch, Yaw 경로가 결합된 선형모델에 대한 설계 결과와 각 경로간의 상호 결함을 무시한 선형모델에 대한 설계 결과를 보여준다. 그림 4 는 Bank 22.5도,  $A_t$  20g 일때의, 그림 5 는 Bank 45도,  $A_t$  20g 일때의 두 경우에 대한 step 응답이다. 결합된 경우와 비결합된 경우 모두 비교적 만족할만한 응답특성을 나타내었다.

이제 주어진 Mach 수와 Height 에서 6-DOF Simulation 에 의해 설계된 결과를 비교한다. 먼저 기존 설계 방법으로서 고정된 마하수에서 Bank각과 하중배수에 관계없이 Pitch, Yaw 경로를 각각 모두 안정하게 설계하여 Control Gain 을 동압에 의하여 스케들한 결과(CASE 1)와 공력학적 결함을 고려하여 설계한 결과를 마하수, 하중배수, Bank각에 의해 스케들한 한후 앞서 기술된 Bank 각 예측기를 사용한 결과(CASE 2)를 비교한다. 또 공력학적 상호결합을 무시하고 설계한 결과(CASE 3)와도 비교한다. 이때에도 Bank각은 앞절에서 기술된 Bank 예측기에 의해서 예측된 값을 사용하였다. 세 경우 모두 Roll 쪽의 운동은 없는 것으로 가정하였다. 그림 6, 그림 7 은 Bank 22.5도,  $A_t$  20g, Bank 22.5도,  $A_t$  20g 인 경우이다. Bank 각을 가능한한 주어진 값으로 유지시키기 위해서 Pitch, Yaw 가속도 명령  $A_zc, A_y$  를 다음과 같이 가하였다.  $\Gamma_0$  는 원하는 Bank 각 이다.

$$A_zc = A_t \cos \Gamma_0$$

$$A_y = A_t \cos \Gamma_0$$

비교결과 CASE 2 의 경우가 다른 두 경우보다 좀더 우수한 성능을 보임을 알 수 있다.

6. 결론 및 앞으로의 연구방향

공력학적으로 결합된 Pitch/Yaw Loop 의 설계 결과를 pitch, yaw 각 경로에 대하여 독립적으로 설계된 결과와 비교하였다. 또한 간단한 벡크각 예측기를 사용하여 벡크각을 예측함으로써 벡크에 따라 공력학적 변화가 심한 비행체를 적절히 제어 할수 있음을 보였다.

앞으로의 연구방향으로는 벡크각 예측오차가 전체 시스템의 안정도에 미치는 영향에 대한 검토가 이루어져야 할 것이며 roll 경로가 pitch/yaw 경로에 결합되었을때 그 결과가 전체 시스템의 안정도에 미치는 영향도 좀 더 연구되어야 할 과제이다.

참고 문헌

1. Jeff S. Shamma and Michael Athans, "Guaranteed Properties of Gain Scheduled Control for parameter-varying plants," Automatica, Vol.27, No.3, 1991, pp.559 - 564
2. M. Guelman, "Absolute stability of symmetric highly maneuverable missile," AIAA J. Guidance, Vol 8, No.5, 1985, pp.660-662
3. Christopher L. Shepherd and Lena Valavani, "Autopilot design for Bank-To-Turn missile using LQG/LTR methodology," American Control Conference, 1988
4. J.B.Moore and B.D.O.Anderson, "Coping with singular transition matrices in estimation and control stability theory," Int. J of Contr., vol.31, pp571-586, 1980
5. 송 찬 호, "시변 특성을 고려한 적응 오토파일럿 설계," 국방과학연구소 1990년 소내 학술 대회
6. 송 찬 호, "Autopilot 설계," 유도 항법 제어 심포지움, 유성, 1991.2
7. Minjea Tahk and Michael Briggs, "An autopilot design technique based on feedback linearization and wind angle estimation for Bank-To-Turn missile systems," AIAA, Missile Science Conference, 1989
8. M. Tahk, M.M. Briggs, and P.K.A.Menon, "Applications of plant inversion via state feedback to missile autopilot design," CDC, 1988.12

9. A.Arrow and D.J. Yost, "Large angle-of-attack missile control concepts for aerodynamically controlled missile," J.Spacecraft, Vol.14, No.10, 1977, pp606-613
10. D. L. Kleinman, "An easy way to stabilize a linear constant system," IEEE Tran. Automat. Contr. vol. AC-15, pp. 692, Dec. 1970

Rear View,  $\delta_p = 0, \delta_y = 0$

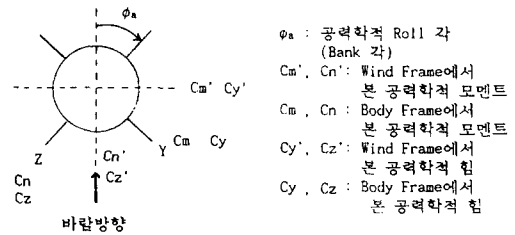


그림 1. 유도탄 뒤에서 본 공력학적 힘과 모멘트의 방향

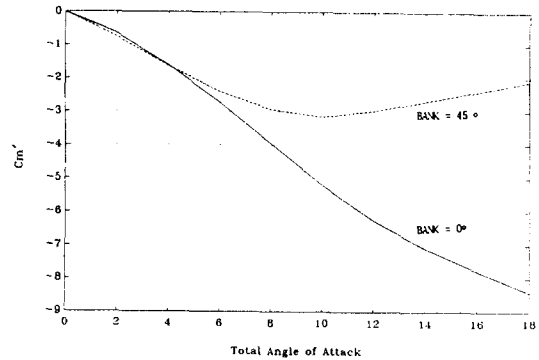


그림 2. Cm'의 예

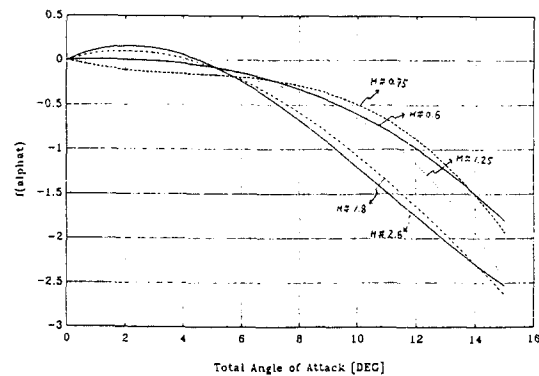


그림 3. Induced Yaw Moment Cn'의 f( $\alpha_T$ )에 대한 예

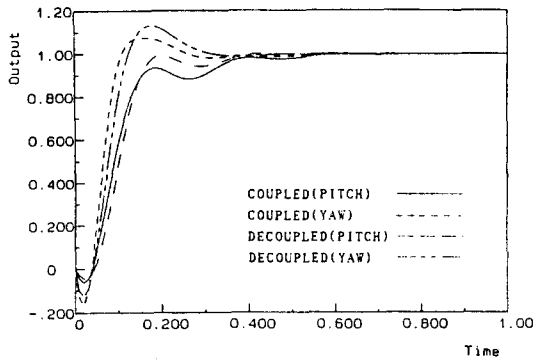


그림 4. BANK=22.5도,  $A_t=20g$  에서의 선형모델 step 응답

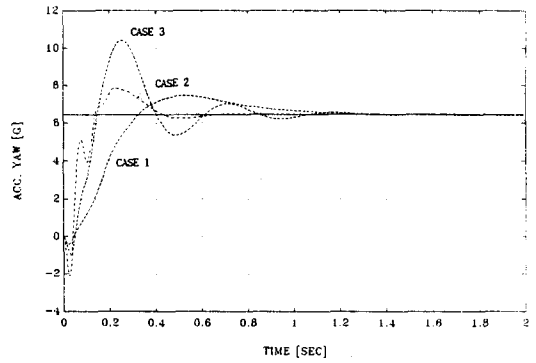


그림 6.b BANK=22.5도,  $A_t=20g$  에서의 6-DOF Simulation 결과 (Yaw)

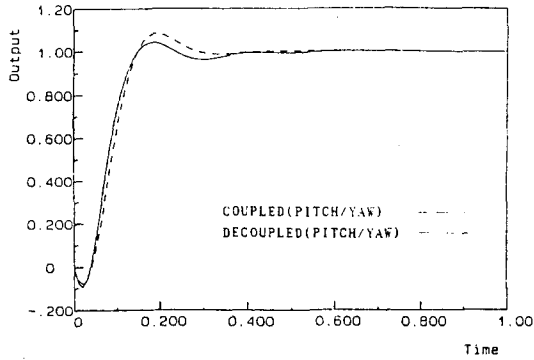


그림 5. BANK=45도,  $A_t=20g$  에서의 선형모델 step 응답

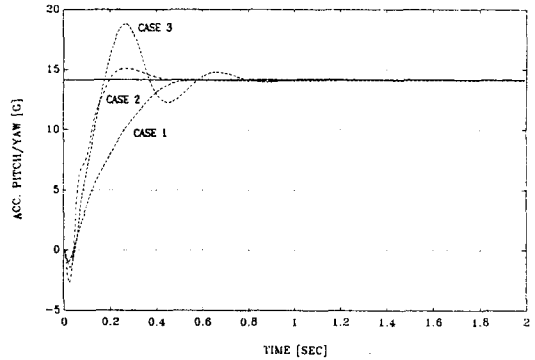


그림 7. BANK=45,  $A_t=20g$  에서의 6-DOF Simulation 결과 (Pitch/Yaw)

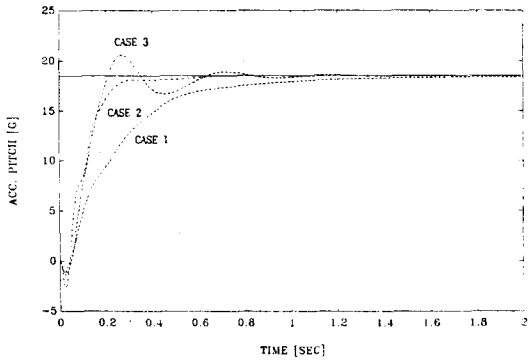


그림 6.a BANK=22.5도,  $A_t=20g$  에서의 6-DOF Simulation 결과 (Pitch)