'91 韓國自動制御學術會議論文集 1991. 10.22~24

多重시리얼 샘플링 系의 制御를 위한 관측기의 개발

(Observer for Multiple Serial Sampling Systems)

崔 然 旭
釜山工業大學 制御計測學工學科

Yeon-Wook Choe
(Pusan National Instiutute of Technolge,
Dept of Control and Instrumentation)

Abstract

In industrial multivariable plants, it is often the case that the plant outputs are detected in a similar components not simultaneously but serially. In this paper, the problem of estimating the state vector of the plant based on the data obtained from such a detecting scheme is considered, and a special type of observer (referred to as a "multiple serial-sampling" type observer) which renews its internal states whenever a new group of data is obtained is proposed. It is proved that such an observer can be constructed for almost every sampling period if the plant is observable as a continuous-time multivariable system, and that the poles of the closed-loop system using the serial-sampling type observer consist of the poles of the observer and those of the state feedback system. The behaviors of the observer and the closed-loop system are studied by simulation. The results of simulation indicate that a multiple serial-sampling type observer can estimate the state of the plant more accurately than the ordinary type observers and improve the closed-loop performance, especially, in the existence of dectecting noise.

I. 序論

多數의 出力변수를 가지고 있는 實시스템에서, 出力변수의 測定値가 同時에 全部 檢出되어지지 않고 測定方式이나 成分이 類似한 것끼리 몇개씩, 조금씩 틀린 時刻에 檢出되어 차례로 디지틀 計算器(즉, 制御器)에 入力되어지는 경우가 있다. 例를 들면, 化學 플랜트등에서 제품이나 中間 生成物의 成分을 측정하는 경우 그 測定値(成分)의 분석에는 상당한 時間이 所要되고 또한 그 分析裝置도 高價이다. 이와 같은 경우에는 한組의 분석장치를 利用하여 數個所의 성분을 측정하는 方式을 채용함으로써 서로 틀린 時刻, 틀린 位置에 있어서의 成分의 측정치가 成分別로 順次的으로 얻어지게 된다. 當論文에서 말하는 多重시리얼 샘플링(Multiple Serial Sampling)이라고 하는 것은 이와 같은 데이터의 取得方式, 즉 P個의 檢出量이 조금씩 틀린 時刻 $kT_o+t_1, kT_o+t_2, \cdots, kT_o+t_r (0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_r < T_o)$ 에 각각 P_1, $P_2, \cdots, P_r$個 $(P=P_1+P_2+\cdots+P_r)$씩 測定되어 얻어지는 方式을 意味하고 있다.

Luenberg의 理論에 기초를 두는 從來의 觀測器 理論에서는 P個의 檢出量을 가진 制御對象의 狀態推定에는 P個의 데이터를 同時에 必要로하고있다. 따라서 從來의 觀測器 理論을 그대로 上記와 같은 플랜트에 適用하게되면, P個의 測定値가 全部 얻어지는 시간 T_o마다 推定値를 更新하는 觀測器가 얻어진다.

따라서, 從來의 觀測器理論을 상기와 같은 多重시리얼 샘플링 制御系에 그대로 適用한다면, 한組의 出力變數가 檢出되더라도 그 情報를 직접 利用하지못하고 나머지의 出力변수가 전부 檢出될 때 까지 기다리지 않으면 안되게 되므로, 주어진 하드웨어의 機能을 最大限 利用하지 못하고 있는 것이 아닌가 생각된다. 따라서, 한번의 測定이 行하여져서 즉시 그값에 따르는 制御를 수행할 수 있다면 制御系 전체의 性能 向上을 기대할 수 있을 것이다. 특히, 雜音등의 混入에 依해 豫測式이 正確하게 成立하지않을 경우에, 豫測시간을 T_o에서 t_i로 줄임으로써 극력 雜音의 影響을 減少시킬 수 있는 하나의 方法이 될 것이다.

當論文에서는 한組의 檢出量이 얻어질 때 마다 觀測器의 內部狀態를 更新해서 새로운 狀態推定値를 얻을 수 있는 "多重시리얼 샘플링型 觀測器"를 제안하고 그의 有效性을 시뮬레이션을 통하여 確認한다. 以下에서는 먼저, 多重시리얼 샘플링型 觀測器가, 만약 주어진 制御對象이 連續系로서 觀測可能하다면 거의 대부분의 샘플링 周期에 대해서도 構成可能함을 보이고, 이러한 觀測器를 使用하여 制御系를 構成하였을 경우, 制御系 전체의 安定性에 關한 問題를 檢討한다. 또한 觀測器의 最初 周期(즉, 全出力 變數가 1回씩 測定되어질 때 까지)에서, 推定値의 決定方法에 對한 하나의 指針을 提案한다. 表現上의 簡略化를 위하여 當論文에서는 出力변수의 그룹별 測定間隔이 一定하다고 假定한다. 즉, $t_2-t_1=t_4-t_3=\cdots$ 이다.

II. 制御對象과 用語의 기술

다음과 같은 連續시간의 制御對象을 생각한다.

$$\frac{dx_c(t)}{dt}=A_c x_c(t)+B_c u_c(t) \tag{1}$$

$$y_c(t)=C_c x_c(t) \tag{2}$$

단, $x_c(t), u_c(t), y_c(t)$ 는 각각 n次元의 狀態벡터, m次元의 操作벡터, P次元의 檢出벡터를 意味하며, (A_c, B_c, C_c)는 적당한 크기의 定數行列이며, 可制御 可觀測하다고 가정한다. 上記와 같은 制御對象에서 P個의 檢出量은 서로 다른 時刻에 각각 $P_1, P_2, \cdots, P_r (P=P_1+P_2+\cdots+P_r, r \le P)$個씩 얻어지는 것으로 가정한다(단, P_i가 전부 1인 特別한 경우에 대해서는 文獻 (9)를 參照). 즉, 檢出벡터 $y_c(t)$의 제 P_i+1번째 成分에서 제 P_{i+1}번째 成分까지를 포함하는 檢出量 $y_{ci}(t)$가 時刻

$$t=kT_o+\tau+(i-1)T, \quad k=0,1,2,\cdots;\ i=1,2,\cdots,r \tag{3}$$

에서 測定되어지는 것으로하고, $(P_i \times 1)$크기인 測定値 벡터를

$$y(k,i)=y_{ci}[kT_o+\tau+(i-1)T] \tag{4}$$

로 둔다. 以下에서는 上記의 測定値를 使用해서 時刻

$$t=kT_o+iT \quad k=0,1,2,\cdots;\ i=1,2,\cdots,r \tag{5}$$

에서 制御對象의 狀態를 推定하는 觀測器를 생각한다. 단, 操作量 $u_c(t)$는 (5)의 時刻에서 스텝狀으로 변환되어지는 것으로 가정한다. 즉,

$$u_c(t)=u(k,i) \quad kT_o+iT \le t < kT_o+(i+1)T \quad k=0,1,2,\cdots;\ i=0,1,2,\cdots,r \tag{6}$$

이다. 操作量에 關한 上記와 같은 가정은 본질적인 것이 아니고, 보다 일반적인 操作條件 아래에서도 본론과 동일한 결과가 유도될 수 있다[9].

먼저, 필요한 用語와 記號를 導入한다. 檢出量의 測定時刻 (3)및 狀態를 推定해야할 時刻 (5)의 관계를 圖示하면 그림 1과 같이 된다. τ는 操作量의 入力으로부터 다음의 檢出量을 읽어들일 때까지의 시간이며, 대략 (測定時間-演算時間)으로 생각할 수 있다. 그림 1에서, 時刻 kT_o에서 $(k+1)T_o$ 까지의 時間區間을 당논문에서는 (k번째의)프레임(Frame)이라하며, T_o를 프레임周期라고 부르기로 한다. 또한, 檢出量을 測定하는 주기 T를 샘플링周期라 하며 T_o와 T사이에는

$$T_o=rT \quad (r<P) \tag{7}$$

의 관계가 있는 것으로 가정한다. 이와같이 시스템이 2종류의 周期를 가지고 있는 것에 對應해서, 時刻 kT_o+iT에 있어서 制御對象의 狀態를 2가지의 因數를 가지는 記號

$$x(k,i)=x_c(kT_o+iT) \quad k=0,1,2,\cdots;i=0,1,2,\cdots,r \tag{8}$$

로서 나타낸다. 단, 이 定義에 있어서 $i=r$과 다음 프레임에서의 $i=0$는 同一한 狀態를 意味하고있다. 즉,

$$x(k+1,0)=x(k,r),\ u(k,r)=u(k+1,0) \tag{9}$$

인 것에 注意를 필요로 한다.

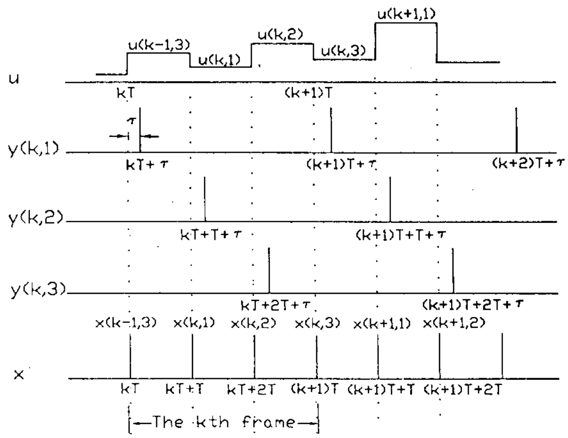

그림 1 出力의 測定과 狀態推定의 時刻

다음에 (4)와 (8)로 표현되는 狀態 $x(k,i)$ 및 出力 $y(k,i)$에 대한 狀態方程式을 誘導하면 아래와 같다. 즉, (1)을 샘플링주기 T로 離散化하면 $x(k,i)$에 관한 遷移方程式

$$x(k,i+1)=Ax(k,i)+Bu(k,i) \quad k=0,1,2,\cdots;i=0,1,2,\cdots,r \tag{10}$$

가 얻어진다. 단,

$$A=\exp(A_cT),\quad B=\int_0^T\exp(A_c\tau)B_cd\tau \tag{11}$$

이며, 제 k번째 프레임에서 제 k+1번째 프레임으로의 접속은 (9)로 주어진다. 더우기, (1),(2)에 의해 測定値벡터 $y(k,i)$는

$$y(k,i+1)=c_{i+1}x(k,i)+d_{i+1}u(k,i) \quad k=0,1,2,\cdots;i=0,1,2,\cdots,r \tag{12}$$

으로 되는 것을 간단히 確認할 수 있다. 여기서, c_{i+1}및 d_{i+1}는 각각 다음과 같이 정의되는 $(P_{i+1}\times n)$,$(P_{i+1}\times m)$크기의 行列이다.

$$c_{i+1}=c_{c_{\sigma_i+1,\sigma_{i+1}}}\exp(A_c\tau) \tag{13}$$

$$d_{i+1}=c_{c_{\sigma_i+1,\sigma_{i+1}}}\int\exp[A_c(\tau-\sigma)]B_cd\sigma \tag{14}$$

$$\sigma_k=\sum_{j=0}^{k}P_j \quad k=0,1,2,\cdots,r \tag{15}$$

단, $P_0=0$이며 $c_{c_{\sigma_i+1,\sigma_{i+1}}}$는 出力行列 C_c의 σ_i+1번째行에서 σ_{i+1}번째行까지를 포함하는 $(P_{i+1}\times n)$크기의 行列을 意味한다.

以上의 (10)및 (12)는, 制御對象을 出力의 샘플링周期 T로 離散化했을 경우의 狀態方程式이다. 檢出이 多重시리얼 샘플링型인 것에 對應해서 時間에 관한 變數가 2種類 (k및 i)로 되어있는 점이 通常의 離散型 상태방정식과 틀린 점이다.

다음 章에서는 上記의 式들을 이용해서, 操作量이 변화하는 時刻에서의 制御對象의 狀態를 推定하는 觀測器를 유도한다.

Ⅲ. 多重시리얼샘플링型 觀測器와誤差方程式

여기서는 (8)로 주어진 制御對象의 狀態 $x(k,i)$를 推定하는 多重시리얼 샘플링型 觀測器에 대한 基本構造를 설명하고 觀測器에 依한 推定値의 眞値에대한 誤差의 遷移를 나타내는 方程式을 유도한다.

狀態방정식 (10),(12)에 相應해서, 다음식과 같은 動的시스템을 생각한다.

$$z(k,i+1)=Az(k,i)+Bu(k,i)+h_{i+1}[c_{i+1}z(k,i)+d_{i+1}u(k,i)-y(k,i+1)] \quad k=0,1,2,\cdots;i=0,1,2,\cdots,r-1 \tag{16}$$

위式에서, $h_1,h_2,\cdots,h_r$은 觀測器 設計者에 의하여 決定되어야 할 $(n\times P_{i+1})$크기의 定數行列이다. 上記의 動的시스템에서, (k+1)번째 프레임에서 觀測器의 初期條件은, (9)에 對應해서 다음 式에 의하여 결정된다.

$$z(k+1,0)=z(k,r) \quad k=0,1,2,\cdots \tag{17}$$

다음章에서 證明하는 것처럼, h_i를 적당히 선택하면 上記 動的시스템의 狀態 $z(k,i)$가

$$k\Rightarrow\infty \text{ 일때 } z(k,i)\Rightarrow x(k,i) \quad i=0,1,2,\cdots,r-1 \tag{18}$$

를 滿足시키도록 하는것이 可能하다. (16), (17)의 動的시스템이 (18)을 滿足할 경우 이式을 多重시리얼 샘플링型 觀測器로 부른다. 또한, (18)의 成立與否에 관계없이 定數행렬 $h_1,h_2,\cdots,h_r$을 觀測器 利得이라한다. (16)의 形態로부터 알 수 있는 바와 같이 多重시리얼 샘플링型 觀測器는, 直前의 測定値벡터 $y(k,i)$와 操作벡터 $u(k,i)$를 이용해서 時刻 $kT_o+(i+1)T$에서의 觀測器 內部狀態를 更新해가는 全次元型 觀測器이다.

다음章의 준비로서, 觀測器의 推定誤差

$$\varepsilon(k,i)=z(k,i)-x(k,i),\ i=0,1,2,\cdots,r \tag{19}$$

에 관한 基礎방정식을 유도하고 그의 기본적인 性質을 살펴본다. (12)를 (16)에 代入하면

$$z(k,i+1)=(A+h_{i+1}c_{i+1})z(k,i)+Bu(k,i)-h_{i+1}c_{i+1}x(k,i) \tag{20}$$

이 얻어진다. 또, (10)에서 (20)를 빼면 다음式이 얻어진다.

$$\varepsilon(k,i+1)=(A+h_{i+1}c_{i+1})\varepsilon(k,i) \tag{21}$$

또한, (9)와 (17)로부터

$$\varepsilon(k+1,0)=\varepsilon(k,r) \tag{22}$$

가 됨을 알 수가 있다. 위의 두式을 사용해서 時刻 $[kT_o+iT]$에서 時刻 $[(k+1)T_o+iT]$까지의 誤差의 遷移를 計算해보면

$$\varepsilon(k+1,i)=\Phi_i\varepsilon(k,i) \quad i=0,1,2,\cdots,r \tag{23}$$

로 된다. 여기서

$$\Phi_i=(A+h_ic_i)\cdots(A+h_1c_1)(A+h_rc_r)(A+h_{r-1}c_{r-1})\cdots(A+h_{i+1}c_{i+1}) \quad h_0=h_r,\quad c_0=c_r \tag{24}$$

이다. (24)의 係數行列은 프레임周期 T_o에 대한 觀測器 推定誤差의 遷移를 의미하고 있다. 만약, 遷移行列 $\Phi_0,\Phi_1,\cdots,\Phi_{r-1}$가 전부 安定하도록 h_i를 決定할 수가 있다면 (다시 말하면, $\Phi_0,\Phi_1,\cdots,\Phi_{r-1}$의 모든 固有値가 複素平面上에서 單位圓內에 存在한다면), 收斂條件 (18)은 명백하게 만족하게된다. 그런데, (24)를 보면 알 수 있는 바와 같이, $\Phi_0,\Phi_1,\cdots,\Phi_{r-1}$은 同一한 正方行列을 순서만 하나씩 차례로 바꾸어서 곱한 것이다. 이事實로 부터, 遷移行列 Φ_i中의 어느 하나에 대해서만 그의 安定性 문제를 證明함으로써 모든 $\Phi_0,\Phi_1,\cdots,\Phi_{r-1}$에 대해서도 安定性을 確信할 수 있게된다[1]. 따라서, 어느 하나의 Φ_i를 安定化시킬 수 있는 觀測器 利得行列 $h_1,h_2,\cdots,h_r$의 存在를 證明함으로써 多重시리얼 샘플링型 觀測器의 構成可能性을 結論지을 수 있다. 다음章에서는 遷移行列 Φ_0에 注目하여 이 事實을 證明한다. (24)에서 $i=0$로 두고 右邊을 展開하면

$$\Phi_0=(A+h_rc_r)(A+h_{r-1}c_{r-1})\cdots(A+h_1c_1)=A^r+KG \tag{25}$$

단,

$$K=[(A+h_rc_r)\cdots(A+h_2c_2)h_1,(A+h_rc_r)\cdots(A+h_3c_3)h_2,\cdots,$$

$$(A+h_rC_r)h_{r-1},h_r]\tag{26}$$

$$G=[c_1^T,(c_2A)^T,\cdots,(c_{r-1}A^{r-2})^T,(c_rA^{r-1})^T]^T\tag{27}$$

이다. 以上이 多重시리얼 샘플링型 觀測器의 推定誤差에 대한 기본적인 性質이다.

Ⅳ. 多重시리얼 샘플링型 觀測器의 構成可能性의 證明

먼저, (1),(2)의 制御對象에 대하여 (25)로 주어지는 (A^r,G)가 可觀測함을 證明한다. 이를 위하여 다음의 補題가 必要하다.

<補題 1>: (A_c,C_c)를 可觀測한 쌍으로 가정하고, $(n_1,n_2,\cdots,n_p)$을 그의 可觀測性指數벡터(Controllability Index Vector)라 한다. 또한, $\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{in_i}(i=1,\cdots,P)$를 任意의 實數로 假定했을 경우 다음식으로 정의되는 正方行列 M은 거의 대부분의 定數 T에 대하여 正則이다.

$$M=[M_{11}^T,\cdots,M_{1n_1},M_{21}^T,\cdots,M_{2n_2}^T,\cdots,M_{p1}^T,\cdots,M_{pn_p}^T]^T\tag{28}$$

$$M_{ij}=c_{ci}\exp(A_c\alpha_{ij}T)\quad i=1,2,\cdots,P;j=1,\cdots,n_i\tag{29}$$

단, (A_c,C_c)의 可觀測性指數벡터는 $n_1+n_2+\cdots+n_p=n$을 만족하는 整數벡터로서 다음행렬

$$[c_{c1}^T,\cdots,(c_{c1}A_c^{n1-1})^T,c_{c2},\cdots,(c_{c2}A_c^{n2-1})^T,\cdots,c_{cp}^T,\cdots,(c_{cp}A_c^{np-1})^T]^T$$

가 正則이 되도록 定義된다. 여기서 c_{cj} $(j=1,\cdots,P)$는 C_c의 j번째行을 나타낸다.

上記의 補題는 실질적으로 參考文獻 (2)와 같은 내용이지만 當論文의 目的에 맞추기 위하여 그의 표현을 약간 변경하여 표시하였다. 이 補題로 부터 다음의 定理가 얻어진다.

<<定理 1>> (A^r,G)는 거의 대부분의 샘플링周期 T에 대하여 可觀測하다.

(證明) $(n_{11},n_{12},\cdots,n_{1p1},n_{21},\cdots,n_{2p2},\cdots,n_{rpr})$를 (A_c,C_c)의 可觀測性指數벡터로 한다. 단,

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{p_i}n_{ij}=n\tag{30}$$

이다. (A^r,G)의 可觀測性行列로부터 다음의 과정을 통하여 서로 독립한 n個의 行을 선택한다. 즉, G의 제 1行으로 만들어지는 行(다시말하면 c_{c1}을 포함하는 行)을 위에서 부터 n_{11}個, G의 제 2行으로 만들어지는 行(다시말하면 c_{c2}를 포함하는 行)을 위에서 부터 n_{12}個, $\cdots$, G의 제 P_1行으로 만들어지는 行(다시말하면 c_{cp1}를 포함하는 行)위에서부터 n_{1p1}個를 각각 取한다. 이와 같은 과정을 可觀測性指數벡터의 나머지 요소 $n_{21},\cdots,n_{rpr}$에 대해서도 반복하면 전부 n개의 行이 얻어진다. 이들의 各行은, (11), (13),(27)로 부터 알 수 있는 바와 같이

$$c_{ci}\exp(A_c\tau)\exp\{A_c(j-1)T\}\exp\{A_cr(k-1)T\}\tag{31a}$$

$$i=1,\cdots,P\ ;k=1,\cdots,n_{jl}\ ;j=1,\cdots,r;l=1,\cdots,P_j\tag{31b}$$

의 形態로 주어지는데, 이들을 출력행렬 C_c의 行의 順序로 나열하면 (28)과 같은 形態의 n次의 正方行列이 얻어진다. 여기서 補題 1의 (28),(29)에서

$$\alpha_{ij}=i-1+r(j-1)+(\tau/T)\tag{32}$$

로 두면, (28)의 各行은, (31a)의 i,j,k,l을 (31b)의 範圍내에서 적당히 變化시킨 것과 일치하게된다. 따라서, (28)의 正方行列과 (31)로 만들어진 正方行列은 (32)의 條件下에서 서로 同一하게됨을 알 수가 있다. 그러므로, 補題 1의 結果로 부터 (31)의 行으로 이루어지는 正方行列은 거의 대부분의 샘플링周期에 대하여 正則이된다. 다시 말하면, (A^r,G)의 可觀測性行列은 거의 대부분의 샘플링周期에 대해 풀랭크(full rank)를 가진다. [證明끝]

위 定理의 結果로부터, 絶對値가 1보다 작은 n개의 複素數 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$이 指定되었을 때, 적당한 크기의 行列

$$K^*=[k_1^*,k_2^*,\cdots,k_r^*]\tag{33}$$

을 선택함으로써 行列

$$\Phi_0^*=A^r+K^*G\tag{34}$$

의 固有値가 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$로 되도록 할 수가 있음을 알 수가 있다. 여기서, 만약

$$(A+h_rC_r)\cdots(A+h_3C_3)(A+h_2C_2)h_1=k^*_1\tag{35.1}$$

$$(A+h_rC_r)\cdots(A+h_3C_3)h_2=k_2^*\tag{35.2}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$(A+h_rC_r)\cdots(A+h_{i+1}C_{i+1})h_i=k_i^*\tag{35.i}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$(A+h_rC_r)h_{r-1}=k_{r-1}^*\tag{35.r-1}$$

$$h_r=k_r^*\tag{35.r}$$

가 成立하면, (25)의 遷移行列 Φ_0는 上記의 Φ_0^*와 같아지게된다. 따라서, 絶對値가 1보다 작은 적당한 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$에 대해서 식 (35)를 만족하는 크기 nxP_i인 利得行列 h_i가 存在하는 것을 보이면 多重시리얼 샘플링型 觀測器의 構成可能性이 證明된 것으로 된다. 以下, 이와 같은 方針에 따라서 多重시리얼 샘플링型 觀測器의 構成可能性을 證明한다.

<<定理 2>>(多重시리얼 샘플링型 觀測器의 構成可能性): (A_c,C_c)가 可觀測하다면, 거의 대부분의 샘플링周期 T에 대하여 多重시리얼 샘플링型 觀測器가 항상 構成可能하다(즉, 動的시스템 (16)이 조건 (18)을 만족하도록하는 定數行列 $h_1,h_2,\cdots,h_r$이 항상 存在한다).

(證明) R을 nxn인 正則行列로 가정하고 다음과 같이 狀態變數를 等價變換한다.

$$x_c=Rx_c\tag{36}$$

이 變換式에 의하여 行列 A^r와 G는 다음과 같이 된다.

$$A^r=RA^rR^{-1}\tag{37}$$

$$G=GR^{-1}\tag{38}$$

定理 1의 結果에 의하여, 거의 대부분의 샘플링周期 T에 대하여 (A^r,G)는 可觀測함이 保證됨을 알았다. 따라서, 任意의 샘플링周期 T에 있어서 (A^r,G)는 可觀測하다고 가정할 수가 있다. 이 가정과 (37),(38)의 等價變換에 의하여, (A^r,G)가 다음과 같은 可觀測標準形을 가지도록 正則行列 R을 선택할 수가 있다[3].

$$A^r=\begin{bmatrix}\hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} & \cdots & \hat{A}_{1q}\\ 0 & \hat{A}_{22} & \cdots & \hat{A}_{2q}\\ & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{A}_{qq}\end{bmatrix}\qquad G=\begin{bmatrix}\hat{e}_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \hat{e}_2 & \cdots & 0\\ & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{e}_q\\ G_1 & G_2 & \cdots & G_q\end{bmatrix}\tag{39}$$

여기서 A^r의 對角線上의 블록行列 $\hat{A}_{ii}$는 다음과 같은 스칼라可觀測標準形을 가진다.

$$\hat{A}_{ii}=\begin{bmatrix}0, & \cdots & ,0,-a_{i1}\\ 1, & & ,0,-a_{i2}\\ & & \\ 0, & & ,1,-a_{il_i}\end{bmatrix}\ (l_ixl_i)\tag{40}$$

또, A^r의 對角線 오른쪽위의 블록行列은

$$\hat{A}_{ij}=\begin{bmatrix} & a_{ij,1}\\ 0 & a_{ij,2}\\ & \\ & a_{ij,li}\end{bmatrix}\ (l_ixl_i)\tag{41}$$

의 形態를 가진다. 또한, G의 對角線上의 블록행렬은

$$\hat{e}_i=[0\ \cdots\ 0\ 1]\tag{42}$$

인 l_i次의 橫벡터의 形態를 하고 있으며, 블록행렬 G_i는 크기가 $(P-q)xl_i$인 任意의 行列이다. 以下에서는, (A^r,G)가 처음부터 (39)와 같은 可觀測標準形으로 주어졌다는 가정하에서, 多重시리얼 샘플링型 觀測器의 構成可能性을 證明한다. 만약, 그렇치 못한 경우에는 (36)에 의한 等價變換을 遂行함으로써 上記의 標準形을 얻을 수 있다. 즉, 等價變換된 시스템에 대해서 多重시리얼 샘플링型 觀測器를 構成한 다음, 다시 逆變換을 取함으로써 원래의 시스템에 대한 觀測器를

얻을 수 있다.

l_i개의 $\lambda_{i1},\cdots,\lambda_{il_i}$을, 絶對値가 1 보다 작으며 同時에 0이 아닌 複素數로 둔다. 上記의 標準形으로부터 알 수 있는 바와 같이 $(\hat{A}_{ii},\hat{e}_i)$는 可觀測한 쌍이므로, 적당한 l_i次 벡터 k_i를 이용해서 행렬 $\hat{A}_{ii}+k_i\hat{e}_i$의 固有値가 $(\lambda_{i1},\cdots,\lambda_{il_i})$가 되도록 만들 수가 있다. 이와 같은 k_i를 사용해서 n次元의 벡터를 다음과 같이 定義한다.

$$k_i^*=[0^T,\cdots,(k_i)^T,\cdots,0^T]^T \quad i=1,\cdots,q \tag{43a}$$
$$k_i^*=0 \quad i=q+1,\cdots,P \tag{43b}$$

이 값에의해, Φ_0^*는 (33)과 (34)로부터

$$\Phi_0^*=\begin{bmatrix} \hat{A}_{11}+k_1\hat{e}_1, & \hat{A}_{12}, & \cdots, & \hat{A}_{1q} \\ 0 & ,\hat{A}_{22}+k_2\hat{e}_2, & \cdots, & \hat{A}_{2q} \\ \\ 0 & , \cdots & ,0 & ,\hat{A}_{qq}+k_q\hat{e}_q \end{bmatrix} \tag{44}$$

와 같이되므로, 그의 固有値는 $\lambda_{11},\cdots,\lambda_{1l_1},\lambda_{21},\cdots,\lambda_{ql_q}$ 로 됨을 알 수가 있다. 이는 遷移行列 Φ_0^*가 安定함을 意味하고 있다. 따라서, n次 벡터인 (43)의 $k_i^*(i=1,\cdots,P)$로 (33)의 行列 K^*를 구성한 뒤, 이를 다시 크기 $(n\times P_j)$인 行列 k_j^* $(j=1,\cdots,r)$로 각각 나누고, 이에 대해 聯立方程式 (35)가 解를 가지는 것을 나타내면 證明은 完了하게 된다.

먼저, (11)에 의해 A는 正則이므로 A^r및 $\hat{A}_{ii}$도 正則임을 알 수가 있다. 또, 가정에의해 λ_{ij}로서는 0이 아닌 것을 선택하였으므로, $\hat{A}_{ii}+k_i\hat{e}_i(i=1,\cdots,q)$도 전부 正則으로 된다. 여기서 연립방정식 (35)를 아래로부터(즉,(35.r)로부터) 풀어가기로 한다. $i=q+1,\cdots,P$ 에 대해서는, $k_i^*=0$ 이므로

$$\sum_{j=1}^{S} P_j = q \tag{45}$$

를 만족하는 $s(s\le r)$에 대해서

$$h_i=0, \quad j=s+1,\cdots,r \tag{46}$$

로 두면된다. 이때 (35)의 s번째 식은

$$A^{r-s}h_s=k_s^* \tag{47}$$

로된다. A가 正則이기때문에 (47)은 唯一解

$$h_s=A^{-(r-s)}k_s^* \tag{48}$$

를 가진다. 여기서 만약, (45)를 만족하는 s가 存在하지않을 경우는, ΣP_j가 q보다 커지는 첫번째의 P_j의 값을 (45)가 만족되도록 조정하고, P_j에 對應하는 $(n\times P_j)$의 크기인 利得行列 h_j에서 P_j個의 列벡터中에서, 조정된 量만큼의 列벡터가 0벡터로 바꾸면된다. 따라서 h_s를 (48)과 같이 선택한다면, 그 다음 방정식 (35.s-1)은 다음과 같이된다.

$$A^{r-s}(A+h_sc_s)h_{s-1}=k_{s-1}^* \tag{49}$$

여기서, 행렬 $A+h_sc_s$가 正則이 됨을 보이기 위하여, K_s^*를

$$K_s^*=[0,\cdots,0,k_s^*,0,\cdots,0] \tag{50a}$$
$$k_s^*=[k_{s1},k_{s2},\cdots,k_{sp_s}] \tag{50b}$$
$$k_{si}(i=1,\cdots,P_s) : \text{n次의 벡터} \tag{50c}$$

와 같이 두고 행렬 $(A^r+K_s^*G)$를 생각한다. (A^r,G)가 처음부터 (39)와 같은 可觀測標準型의 形態를 하고 있다는 假定과 觀測器가 原點에 固有値를 가지지 않는다는 주어진 前提下에서 다음식을 얻을 수가 있다.

$$\det[A^r+K_s^*G]=\det\hat{A}_{11}\cdots\det\hat{A} \quad \cdot$$
$$\det(\hat{A} \qquad +k_{s1}^*\hat{e}_{q-ps+1,q-ps+1})\cdots\det(\hat{A}_{q,q}+k_{sps}^*\hat{e}_{qq})\ne 0 \tag{51}$$

그러므로, $(A^r+K_s^*G)$는 正則임을 알 수가 있다. 또 (47),(27)등을 $(A^r+K_s^*G)$에 직접 代入하여 계산해보면,

$$\begin{aligned} A^r+K_s^*G &= A^r+A^{r-s}h_sc_sA^{s-1} \\ &= A^{r-s}(A+h_sc_s)A^{s-1} \end{aligned} \tag{52}$$

을 얻을 수 있다. 따라서, $(A+h_sc_s)$의 正則性은 $(A^r+K_s^*G)$의 正則性에 달려있으므로, 方程式 (49)은 唯一解

$$h_{s-1}=(A+h_sc_s)^{-1}A^{-(r-s)}k_{s-1}^* \tag{53}$$

를 가진다. 上記와 같은 方法을 되풀이하면 연립방정식 (35.s-1),···,(35.2),(35.1)은 각각 $h_{s-2},\cdots,h_2,h_1$에 대하여 唯一解를 가진다는 것을 證明할 수가 있다. 이 과정에서, 방정식 (35.i)의 係數行列의 正則性을 보이기위해서는

$$K_i^*=[0,\cdots,0,k_i^*,k_{i+1}^*,\cdots,k_{s-1}^*,k_s^*,0,\cdots,0] \tag{54}$$

로 두고(여기서, k_i^*는 $(n\times P_i)$행렬이다), 또한 $(A^r+K_i^*G)$가 正則임을 고려에 두고 계산해보면 간단히 알 수가 있다. 聯立方程式 (35.1),···,(35.r)가 解를 가진다는 사실로부터, 連續系로서 觀測可能한 制御對象에 대한 多重시리얼 샘플링型 觀測器의 構成可能性이 證明되었다. [證明끝]

上記의 定理 2의 證明은 構成的方法(즉, 觀測器의 固有値를 먼저 指定하고, 그것에 대한 觀測器의 利得行列 h_i를 실제로 求하는 方法)을 사용했다. 그러나, 이 방법은 실제로 多重시리얼 샘플링型 觀測器를 設計한다는 觀点에서 보면 致命的인 弱點을 內包하고 있다(定理 2의 證明으로서는 充分하다). 즉, 證明에서는 먼저 시스템을 Wonham의 可觀測標準形으로 變形해서 證明을 遂行하고있기 때문에, 多重시리얼 샘플링型 觀測器의 構成에는 단지 q개의 출력변수만을 사용하게 된다. 여기서 q는 標準形으로 變形했을 때의 블록행렬의 갯수이다. Wonham의 標準形에서, 一般的으로 q는 서로 獨立한 출력변수의 수 P보다 적은 경우가 많다. 극단적인 例로서, 만약 (A_c,c_{c1})이 可觀測한 쌍이라면 q는 거의 대부분의 샘플링 周期에 관해서 1로 된다.따라서, 上記의 方法에 의하여 觀測器를 設計하면 檢出量의 극히 一部分만을 이용하게되어 "多重시리얼 샘플링"型 觀測器의 主된 目的에서 벗어나게 된다. 그러므로, 실제로 觀測器를 設計하기위해서는 다른 方法을 필요하게된다. 제 7節의 例題에서는 다음의 課程에 의해 觀測器를 設計하였다.

먼저 Kimura-Hikita[4],[5]方法을 사용하여 目的에 맞는 귀환利得 K^*를 계산한다음 (35)의 연립방정식을 풀으므로써, 利得行列 h_i를 얻고있다. 現時點에서, 임의의 K^*에 대하여 방정식 (35)가 반드시 解를 가진다는 것에 대해 理論적인 證明은 아직 얻어지지 않았지만, 現在까지 (35)가 解를 가지지 않는 例를 發見하지 못했다. 따라서, 0이 아닌 極을 지정하는 거의 대부분의 K^*에 대하여 연립방정식 (35)가 解를 가진다고 推測할 수가 있다.

V. 多重시리얼 샘플링型 觀測器를 가진 制御系

이 章에서는 多重시리얼 샘플링型 觀測器의 出力으로 狀態귀환을 遂行하는 閉루프系의 特性을 조사한다. 일반적으로, 귀환제어계의 구성에 있어서 관측기는 상태귀환

$$u=-Fx \tag{55}$$

를 출력귀환으로 실현하기위하여 사용된다. 즉, (55)의 狀態 x를 觀測器에 의한 推定値 z로 代置한

$$u=-Fz \tag{56}$$

를 制御入力으로 이용한다. 여기서는 出力변수의 檢出이 (5)의 形態로 이루어진다는 假定下에서, (16),(17)式으로 주어지는 多重시리얼 샘플링型 觀測器를 設計하여 (56)에 代入했을 경우 전체 시스템의 움직임을 살펴본다. 먼저 (56)는, (6) 과 (8)의 표현식을 이용하면

$$u(k,i)=-Fz(k,i) \quad k=1,2,\cdots;i=0,1,2,\cdots,r-1 \tag{57}$$

과 같이 나타낼 수가 있다. 上記式에서 F는 狀態歸還則 (55)가 전체 閉루프系를 安定化시킬 수 있도록 선택되어진다. 그러한 行列 F는 極配置方法이나 離散形 LQG方法에 의하여 求해질 수 있다.

閉루프系의 움직임을 해석하기 위하여 (57)를 (10)과 (16)에 代入하면 다음의 式을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} x(k,i+1) \\ z(k,i+1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & , & -BF \\ h_{i+1}c_{i+1}, & & A+h_{i+1}c_{i+1}-BF \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(k,i) \\ z(k,i) \end{bmatrix} \tag{58}$$

(58)을 다음 관계

$$\begin{bmatrix} x(k,i) \\ \varepsilon(k,i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k,i) \\ z(k,i) \end{bmatrix} \tag{59}$$

을 이용하여 等價變換하면

$$\begin{bmatrix} x(k,i+1) \\ \varepsilon(k,i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-BF & , -BF \\ 0 & , A+h_{i+1}c_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k,i) \\ \varepsilon(k,i) \end{bmatrix} \tag{60}$$

이 얻어진다. (60)를 r번 전개하면 프레임周期 T_o에 관한 閉루프계의 狀態遷移方程式

$$\begin{bmatrix} x(k+1,i) \\ \varepsilon(k+1,i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A-BF)^r, & \Lambda_i \\ 0 & , \Phi_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k,i) \\ \varepsilon(k,i) \end{bmatrix} \tag{61}$$

이 얻어진다. 단,

$$\Phi_i=(A+h_ic_i)\cdots(A+h_1c_1)(A+h_rc_r)\cdots(A+h_{i+1}c_{i+1}) \tag{62a}$$
$$\Lambda_i=(A-BF)^{r-1}BF+(A-BF)^{r-2}BF\Psi_{r-1}+\cdots+(A-BF)BF\Psi_2+BF\Psi_1 \tag{62b}$$
$$\Psi_i=(A+h_rc_r)\cdots(A+h_{i+1}c_{i+1}) \tag{62c}$$

이다. (61)로부터, 閉루프系의 固有値(즉,프레임周期 T_o에 대한 狀態의 遷移)의 集合은, 狀態歸還 레귤레이터의 固有値의 집합과 多重시리얼 샘플링型 觀測器의 固有値의 集合으로 構成되어있음을 알 수가 있다. 이는 全體 閉루프系가 安定함을 意味하고있다.

Ⅵ. 例題

[例題 1] 多重시리얼 샘플링型 觀測器를 實시스템의 制御에 적용하였을 때 전체시스템의 움직임을, 다음과 같은 結合倒立振子의 安定化 制御問題[8]에 대하여 살펴본다.

$$\frac{dx_c(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & I_4 \\ A_1 & A_2 \end{bmatrix} x_c(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} u_c(t) \tag{63}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 9.94 & -9.94 & 3.23 & -4.79 \\ -9.94 & 9.94 & -4.79 & 3.23 \\ -585.9 & 585.9 & -244.8 & 282.4 \\ 585.9 & -585.9 & 282.4 & -244.8 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -13.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -13.8 & 0 & 0 \\ 45.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 45.8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_2^T = \begin{bmatrix} 3.64 & 0 \\ 0 & 3.64 \\ -12.1 & 0 \\ 0 & -12.1 \end{bmatrix}$$

여기서 (73)의 8個의 狀態變數는, 2개의 대차(cart)의 位置를 나타내는 x_1, x_2와 두개의 振子의 垂直軸에 대한 기울기를 표시하는 φ_1, φ_2 및 그들의 微分값에 의해

$$x_c=[x_1, x_2, \varphi_1, \varphi_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2]^T \tag{64}$$

와 같이 定義된다. 또한 시스템의 출력으로서는, 대차의 位置 x_1, x_2와 振子의 각도 φ_1, φ_2가 각각 同時에 觀測되는 것(즉, $r=2$, $P_1=2$, $P_2=2$ 이다)으로 하여

$$y_c = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \left[\begin{matrix} 4.61 & & & \\ & 4.61 & & \\ & & 2.76 & \\ & & & 2.76 \end{matrix} \;\middle|\; 0 \right] x_c \tag{65}$$

와 같이 표시한다. 上記시스템에 대하여 $T=0.01, \tau=0.005$로 두고, $0.1 \pm j0.1, 0.2 \pm j0.2, 0.05 \pm j0.05, \pm 0.1$에 固有値를 가지는 多重시리얼 샘플링型 觀測器를 설계한 뒤, 다음식과 같은 連續時間系로 주어지는 評價函數값을 最小化하는 歸還利得을 計算하여 閉루프계를 구성한다.

$$J=\int_0^{\infty}[x_c^T(t)Q_cx_c^T(t)+u_c^T(t)R_cu_c(t)]dt \tag{66}$$

단, $Q_c=\mathrm{diag}[500, 500, 1000, 1000, 2, 2, 0.15, 0.15]$, $R_c=\mathrm{diag}[0.1, \ 0.1]$ 이다. 制御對象의 初期條件을

$$x_c^T(0)=[0.1, -0.1, -3, 2, 0, 0, 0, 0] \tag{67}$$

두고 시뮬레이션을 遂行한 結果는 그림 2와 같다. 여기서는 紙面上의 이유로 2個의 出力 y_1, y_3만을 나타내지만, 나머지도 그림2와 거의 같은 정도로 수렴한다. 上記의 觀測器와 같은 位置에 極을 가지는 從來의 觀測器를 사용했을 경우의 시스템의 應答을 비교를 위하여 같이 표시했다. 豫想했던 바와 마찬가지로 多重시리얼 샘플링型의 觀測器를 사용한 경우가 從來의 觀測器의 경우보다 더 좋은 遷移應答特性을 나타내고 있음을 알 수 있다.

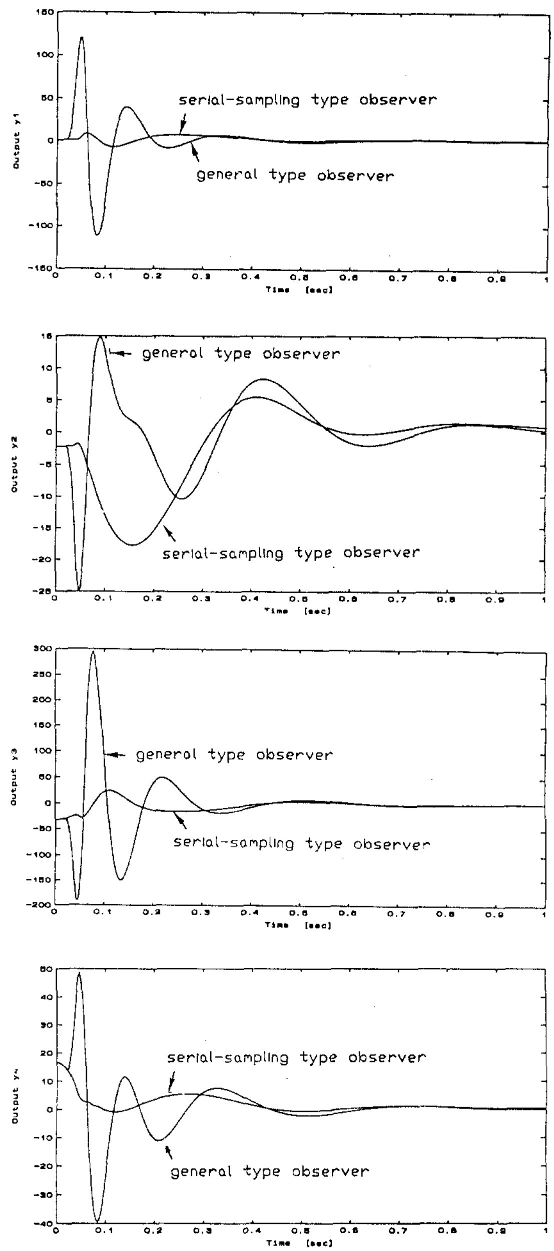

그림 2 例題 1의 結果

VII. 結論

當論文에서는, 출력변수의 檢出이 同時에 이루어지지않고 類似한 成分끼리 그룹별로 順次的으로 行하여지는 시스템(즉, 多重시리얼 샘플링 시스템)을 對象으로하여, 한組의 出力情報가 얻어질 때마다 그의 內部狀態를 更新하는 새로운 形態의 觀測器를 提案하고, 주어진 制御對象이 連續時間系로서 可觀測하다면 거의 대부분의 샘플링 주기에 대하여 그러한 觀測器가 構成可能함을 證明하였다. 또한, 여기서 제안된 관측기를 이용하여 閉루프系를 構成하였을 경우 전체 시스템이 安定하게 될 수 있음을 보였다. 시뮬레이션에의하여 當論文에서 提案된 觀測器가 從來의 觀測器에 比하여 眞値에 더욱 가까운 推定値를 얻을 수 있다는 것을 確認하였다.

當論文에서 提案된 觀測器의 사용시의 計算時間에 대해 약간의 설명이 필요하다. 多重시리얼 샘플링型 觀測器를 실제로 사용할 경우 觀測器의 內部狀態의 更新을 위한 計算時間이 필요하게된다. 序論에서 밝힌 바와같이 多重시리얼 샘플링 시스템의 代表的인 例로서 化學플랜트를 들었다. 이와같은 시스템에서는, 마이크로프로세서의 計算速度가 플랜트의 時定數보다 훨씬 빠르기 때문에 計算時間은 問題가 되지않는다. 그러나, 上記의 多重시리얼 샘플링型 觀測器를 서보시스템에 적용할 경우 다음과 같은 점에 留意해야한다. 즉 3章에서 提案된 觀測器는 각 段階에 있어서 P_i個의 檢出量만을 필요로하지만, 狀態遷移의 계산은 각 段階마다 필요하다. 따라서, 計算에 必要한 곱셈의 횟수는 종래의 觀測器의 그것에 비교해서 조금밖에 줄지않는다. 그러므로, 샘플링 주기가 制御法則에 포함된 計算量에 따라서 決定되는 狀況下에서는, 多重시리얼 샘플링型의 觀測器의 프레임 주기 T_o가 從來의 觀測器의 샘플링 周期보다 더 길게 선택되어질수도 있다. 이와같은 경우에는 多重시리얼 샘플링型 觀測器가 從來의 觀測器보다 항상 利點을 가지고 있다고는 할 수가 없다. 그렇지만, 샘플링 주기가 어떠한 要因에 의해 미리 정해져있고, 또한 그 주기내에 多重시리얼 샘플링型 觀測器의 계산이 可能한 狀況下에서는 從來의 觀測器보다 더 나은 結果를 얻을 수 있을 것이다.

VIII. 參考文獻

1. F.R.Gantmacher,The Theory of Matrices, Chelsea, 1959.
2. T.Hagiwara and M.Araki,"Controllability indices of sampled -data systems," Int.J. Sys. Science, vol.19-12, pp. 2449 -2457, 1988.
3. W.M.Wonham,"On pole assignment in multi-input controllable linear systems," IEEE Trans.Automat. Conr.,vol.AC-12, no.6,pp.660-665,1967.
4. H.Kimura,"Pole assignment by gain output feedback,"IEEE Trans. Automat. Contr.,vol.AC-20, no.4,pp.509-516, 1975
5. H.Hikita, S.Koyama, and R.Miura,"The redundancy of feedback gain matrix and the derivation of low feedback gain matrix in pole assignment," Trans. SICE,vol.11,no.5,pp. 556-560, 1975.
6. H.Kwakernaak and R.Sivan, Linear Optimal Control, Wiliey, 1972
7. S.Kodama and N.Suda,Matrix Theory for System Control, SICE,1981
8. A.Sugie, Y.Inoue and H.Kimura,"Stabilizing Control of the Coupled Inverted Pendulums", Trans. SICE, vol.14, No.5, pp.591-597,1978
9. Y.W.Choe, and M.Araki,"Serial-Sampling Type Observer" Trans.SICE,vol.25, No.10 ,pp.1076-1082,1989