

# 오차공분산을 최소화하는 자이로스코프의 설계

강 태 삼 · 이 장 규  
서울대학교 공과대학 제어계측공학과

## Design of a Gyroscope with Minimal Error Covariance

Taesam Kang · Jang Gyu Lee  
Dept. of Control & Instrumentation Engr.  
Seoul National University

### ABSTRACT

In this paper, a new application method of the Kalman filter to design a gyro is proposed. The role of a gyro is the estimation of an input rate with minimal error covariance. The size of the error covariance depends on gyro's parameters, which makes it possible to use the parameters of gyro to minimize the estimation error covariance. Numerical analysis shows that the error covariance becomes smaller as the spin axis momentum becomes larger and the damping coefficient smaller, but production cost must be considered. Through numerical analysis the parameter set for an acceptable - performance gyro with small cost can be selected.

### 1. 서론

자이로스코프는 주어진 환경에서 입력되는 각속도를 측정하는 일종의 센서이다. 이 자이로스코프는 회전축 관성 운동량, 탄성계수, 부하계수, 출력축 관성 등의 설계인자들을 갖고 있는데 이들은 자이로가 이용되는 환경에 따라 정하여지며, 이에 따라 자이로의 안정성전인도와 성능이 결정된다.

자이로의 설계인자 설정에 따른 안정성 문제는 Thomson[1]에 의하여 원궤도상을 움직이는 자이로의 안정성이 깨질 수 있음이 처음으로 제시되면서부터 구체적으로 연구되기 시작하였고, 그후 Kane과 Wang[2] 그리고 Shing[3-5] 등에 의하여 발전되었다. 설계인자에 따른 자이로의 성능에 대하여는 Shing[6]이 설계인자의 변화에 따라 자이로의 통과대역, 상승시간, 최대오버슈트 등이 변화하는 것을 발표하였다. 최근에는 자이로의 재평형루프를 효과적으로 설계함으로써 자이로의 성능을 향상시키는 방법이 발표되었다[7,8].

본 논문에서는 칼만필터(Kalman filter)[9]를 이용하여 입력각속도를 추정할때에 정상상태에서의 오차공분산의 크기가 최소화되도록 하는 자이로의 설계에 대하여 논한다. 즉 보통의 칼만필터는 고정된 선형 시스템에 대하여 추정오차의 공분산을 최소화하는 최적 필터이며, 그 추정오차의 정상상태 공분산의 크기는 주어진 시스템에 대하여 고유하게 결정된다. 그런데 자이로의 설계는 시스템의 인자들을 바꾸는 것이므로 이 시스템의 변화에 의하여 그 추정오차의 공분산의 크기가 바뀌게 된다. 따라서 자이로의 설계인자를 조정함으로써 추정오차의 공분산을 최소화 할 수 있다.

### 2. 자이로스코프의 모델

1 자유도 자이로스코프의 간단한 구조 및 운동 방정식 유도에 쓰이는 좌표계(i, o, s좌표계)는 그림 2.1과 같다. 이 자이로스코프의 운동방정식은 뉴턴의 제2법칙을 적용하여 구할 수 있으며 식(2.1)로 주어진다[10].

$$\begin{aligned}
I_o \ddot{\theta} + c \dot{\theta} + k \theta &= -H \omega_1 && \text{(이상적 자이로스코프 모델)} \\
&+ (I_s - I_1) \omega_1 \omega_s && \text{(anisoinertia 토크)} \\
&+ \theta (I_s - I_1) (\omega_1^2 - \omega_s^2) && \text{(anisoinertia 커플링)} \\
&- \theta H \omega_s && \text{(cross-coupling 토크)} \\
&- I_o \dot{\omega}_o && \text{(출력축 각가속도)} \\
&+ M_d && \text{(기타 교란 토크)}
\end{aligned}
\tag{2.1}$$

여기서,

- $I_i, I_o, I_s$  : 회전자의 주축 관성 모멘트
- $H$  : 회전자의 스핀축 각운동량
- $\omega_i, \omega_o, \omega_s$  : 케이스로 입력되는 각속도
- $\dot{\omega}_o$  :  $\omega_o$ 의 시간에 대한 미분
- $c$  : 댐핑계수
- $k$  : 탄성계수
- $\theta$  : 플로우트가 케이스에 대하여 기울어진 각도
- $\dot{\theta}$  :  $\theta$ 의 시간에 대한 1차 미분
- $\ddot{\theta}$  :  $\theta$ 의 시간에 대한 2차 미분

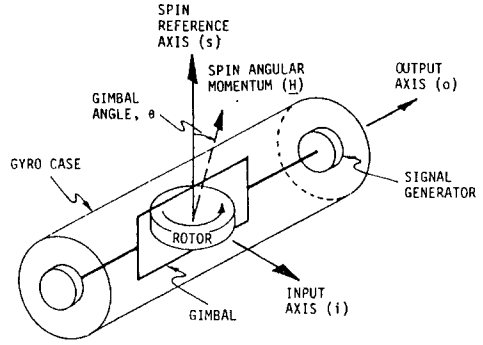


그림2.1 1자유도 자이로스코프의 구성도  
Fig. 2.1 Schematic of a single-axis rate gyro.

자이로스코프의 운동 방정식은 식(2.1)에서 알 수 있듯이 여러가지 오차항을 포함하고 있다. 이 오차항들은 항법시에는 반드시 보상하여주어야 한다. 본 논문에서는 이러한 오차항들이 보상되었다고 가정한다. 그런데 완전한 보상은 이루어지지 않으므로 보상오차가 평균이 영이고 분산이  $\sigma_c^2$ 인 백색 정규 분포를 가진다고 가정한다. 이때 자이로의 모델은 다음과 같이 주어진다.

$$\dot{\theta} + c/I_o \dot{\theta} + k/I_o \theta = H/I_o \omega_i + W_c, \quad W_c \sim N(0, \sigma_c^2) \quad (2.2)$$

그리고 입력  $\omega_i$ 는 다음과 같은 1차 마코프 프로세스(1st order Markov process)로[9] 가정한다.

$$\dot{\omega}_i = -1/T \omega_i + W_i, \quad W_i \sim N(0, \sigma_i^2) \quad (2.3)$$

이때  $\omega_i$ 의 공분산  $q_i^2$ 은 다음과 같이 주어진다.

$$q_i^2 = \sigma_i^2 T/2 \quad (2.4)$$

이제 식(2.2), (2.3)에서  $\omega_i, \theta, \dot{\theta}$ 를 각각 상태변수  $x_1, x_2, x_3$ 로 두고 상태방정식을 세우면 다음과 같다.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1/T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ H/I_o & -k/I_o & -c/I_o \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} w, \quad w \sim N(0, Q) \quad (2.5)$$

$$Q = \begin{bmatrix} \sigma_i^2 & 0 \\ 0 & \sigma_c^2 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & p_k & 0 \end{bmatrix} x + v, \quad v \sim N(0, R) \quad (2.7)$$

### 3. 오차 공분산을 최소화하는 자이로의 설계

식(2.5)-(2.7)로 주어지는 시스템에서 상태를 추정하기 위하여 칼만필터를 사용할 때 그 상태의 추정 오차 공분산 행렬 P는 다음과 같은 대수리카티방정식 (algebraic riccati equation)을 만족한다.

$$A P + P A^T + G Q G^T - P C^T R^{-1} C P = 0 \quad (3.1)$$

만약 식(2.5)-(2.7)로 주어진 시스템이 검출가능(detectable)하고 안정화가능(stabilizable)하면 식(3.1)은 고유한 양의 정칙행렬 (positive definite matrix) P를 해로 갖는다[17]. 그리고 이 오차 공분산 행렬 P의 크기는 바로 추정치의 오차의 크기를 나타낸다. 따라서 P의 크기가 작을 수록 자이로의 성능이 뛰어나다고 할 수 있다. 따라서 식(3.1)에서 시스템 행렬 A의 변화에 따른 P의 상한치를 알면 그 자이로가 설계되었을 때의 성능을 예측할 수 있다. 대수리카티방정식에서 P의 크기에 대하여는 많은 연구가 진행되어 왔다[11-16]. 그러나 P의 상한치에 대한 연구에서 모든 사람들이 식(3.1)에서  $C^T R^{-1} C$ 항이 양의 정칙행렬일 것을 요구하고 있다. 그런데 이 자이로시스템을 포함한 대부분의 상태추정시스템에서 이 조건이 만족되지 않아서 직접 응용할 수가 없다. 본 논문에서는 A의 맨 밑 줄로 표시되는 자이로의 설계인자들을 변화시키면서 수치적으로 P의 크기가 어떻게 변화하는가 살펴 보았다. P의 크기를 나타내는 척도(norm)는 Frobenius 척도를 사용하였는데 이는 행렬의 각 원소들의 절댓치를 합한것과 같다[18]. 여기서 자이로 설계인자의 기준값들로는 참고문헌[10]의 자료를 이용하였는데 표3.1과 같다.

수치분석은 자이로의 회전축 각운동량 H와 탄성계수 k 그리고 부하계수 c를 기준값에서 0.01배로부터 100배까지 20단계의 로그눈금(log scale) 간격으로 변화시키면서 P의 크기 변화를 관찰하였다. 이때 자이로에서 H/k는 환산계수와 관계가 있으므로 기준값으로 항상 일정하게 놓았다. 즉,

표3.1 자이로 설계인자들의 기준값

인자	값	인자	값
H	151000 gm-cm <sup>2</sup> /s	k	3100000000 gm-cm <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>
I <sub>o</sub>	226 gm-cm <sup>2</sup> /s	c	7000000 dyn-cm/rad/sec
σ <sub>i</sub>	0.4472 deg/sec	σ <sub>c</sub>	0.00001 deg/hr
R	0.0001 deg/hr	p <sub>g</sub>	30.0 mv/mrad
T	10.0 sec		

$$\begin{aligned}
 c' &= s_1 \times c, \quad (s_1 = 10^{-(2 + (n_1 - 1) \times 4/19)}, \quad n_1 = 1, 2, \dots, 20) \\
 H' &= s_2 \times H \\
 k' &= s_2 \times k, \quad (s_2 = 10^{-(2 + (n_2 - 1) \times 4/19)}, \quad n_2 = 1, 2, \dots, 20)
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

그림3.1은 n<sub>1</sub>, n<sub>2</sub>의 변화에 따른 오차공분산 P의 크기 변화를 나타낸다. 그리고 그림3.2는 n<sub>1</sub>을 x축, n<sub>2</sub>를 y축, 그리고 P의 크기를 z축으로 했을 때 P의 3차원 그래프이다. 그림에서 보면 n<sub>1</sub> 축 부하계수는 작을수록, n<sub>2</sub> 축 회전자의 각운동량과 스프링 상수는 클수록 P의 크기가 작아져서 자이로의 성능이 좋아지는 것을 알 수 있다. 그리고 부하가 증가하고 각운동량과 스프링 상수가 감소할수록 추정오차의 크기는 점점 커지며 어느 정도 지나면 급격히 증가함을 알 수 있다. 그리고 그 반대의 경우는 추정오차의 크기가 점점 감소하지만 어느정도 지나면 거의 일정함을 알 수 있다.

일반적으로 각운동량은 회전자의 관성의 크기와 회전수의 곱이고 부하는 역체를 사용해서 실현하는데 각운동량을 늘이는 것과 부하계수를 줄이는 것은 한계가 있고, 그 이상 높이고자 할 때는 매우 큰 생산비용을 요구하게 된다. 따라서 최소한의 비용으로 원하는 성능의 자이로를 만들려면 그림에서 오차공분산의 크기가 급격히 증가하기 시작하는 점(그림3.2에서 빗금친

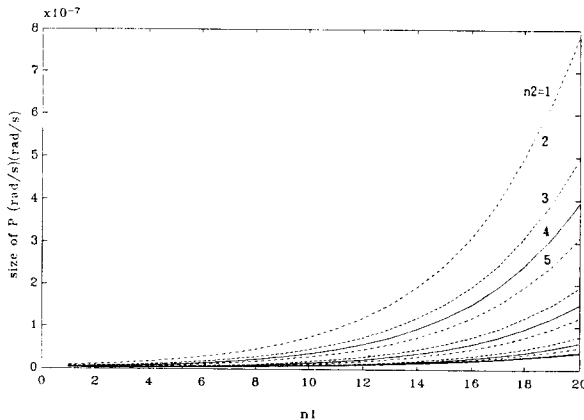


그림3.1 자이로 설계인자들의 변화에 따른 P의 크기 변화  
Fig 3.1 Variation of P with variation of gyro parameters

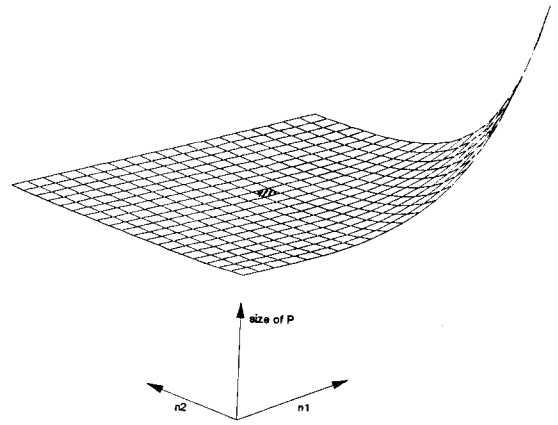


그림3.2 그림3.1의 3차원 그래프  
Fig 3.2 3-dimensional graph of fig 3.1

부분) 부근에서 자이로의 설계인자를 설정하면 된다.

#### 4. 결론

본 논문에서 칼만 필터의 정상상태 오차공분산의 크기를 최소화하는 방법이 제시되었다. 부하계수가 작을수록, 회전자의 각운동량이 클수록 전체시스템의 오차공분산의 크기는 작아진다. 회전자의 각운동량이 작아지거나 부하계수가 커질 경우 어느 일정 점을 지나면 오차공분산의 크기가 급격히 증가하므로 자이로의 설계시 이 점보다 각운동량과 스프링상수는 크게, 부하계수는 작게 설계하여야 한다.

#### 참고문헌

- [1] Thomson, W.T., "Stability of single axis gyros in a circular orbit," *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 1, July 1963, pp 1556-1559.
- [2] Kane, T.R., and Wang, C.F., "Stability of gyroscopes orbiting in a gravitational field," *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 3, July 1965, pp 1290-1293.
- [3] Singh, S.N., Bhattacharya, K.C., and Rao, C.S., "Angular velocity measurement using rate gyros in a spinning vehicle," *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, AES-11, Sept. 1975, pp 905-907.
- [4] Singh, S.N., "Stability of Gyro in a Vehicle Spinning with Uncertain Angular Velocity," *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, AES-17, No.3, March 1981, pp 208-212.

- [5] Singh, S.N., "Stability of Gyro with Harmonic Nonlinearity in Spinning Vehicle," *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, AES-19, No.2, March 1983, pp 182-189.
- [6] Singh, S.N., "Transient Performance of Gyro in Spinning Spacecraft," *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, AES-23, No.5, March 1987, pp 620-624.
- [7] 강태삼, 이장규, "입력보상기를 이용한 1자유도 자이로스 코프의 성능개선," 한국항공우주학회논문지, 1990, 12, pp87-93.
- [8] Taesam Kang, Jang Gyu Lee and Chan Gook Park, "Performance Improvement of a DTG Using an Input Compensator," to be appeared in the *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, November/December 1991.
- [9] Maybeck, P.S., *Stochastic Models, Estimation, and Control*, Vol. 1, Academic Press, New York, 1979.
- [10] R.J. Nurse, et al., "A new baseline for the inertial navigation strapdown simulator program", Vol.1-4, R-1136, The Charles Stark Draper Lab. Inc., July 1978.
- [11] W.H. Kwon and A.E. Pearson "A note on the algebraic Riccati equation," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-22, February 1977, pp143-144.
- [12] V.R. Karanam, "Lower bounds on the solution of Lyapunov matrix and algebraic Riccati equations," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-26, No. 6, December 1981, pp 1288-1290.
- [13] V.R. Karanam, "A note on eigenvalue bounds in algebraic Riccati equations," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-28, No. 1, January 1983, pp 109-111.
- [14] T. Mori and I.A. Derese, "A brief summary of the bounds on the solution of algebraic matrix equations," *International Journal of Control*, Vol. 39, No. 2, 1984, pp 247-256.
- [15] B.H. Kwon, M.J. Youn and Z. Bien "On bounds of the Riccati and Lyapunov matrix equations," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-30, No. 11, November 1981, pp 1134-1135.
- [16] S.D. Wang, T.S. Kuo, and C.F. Hsu, "Trace bounds on the Riccati and Lyapunov equation," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-31, No. 7, July 1986, pp 654-656.
- [17] H. Kwakernaak and R. Sivan, *Linear Optimal Control Systems*, Wiley-Interscience, 1972, p367.
- [18] R.A. Horn and C.R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1985, p291.