

2-자유도 중첩 센서의 최적 배치

정도형, 이장규, 박찬국, 박홍원, 정태호.
 서울대학교 공과대학 제어계측공학과 국방과학연구소

Optimal Configurations for Redundant Two-Degree Of Freedom Sensor Systems

Doughyoung Chung, Jang-Gyu Lee, Chan-Gook Park Heung-Won Park, Tae-Ho Chung
 Dept. of Control & Instrumentation Eng. The Agency for Defence Development
 Seoul National University

ABSTRACT

Optimal configurations for redundant TDOF (Two Degree Of Freedom) sensor systems are proposed. The determinant of error covariance matrix is used as the performance index, and optimal configurations for 2 TDOF sensor system and 3 TDOF sensor system are evaluated by minimizing the index.

구하기 위한 오차 모델을 설정하고, 그 오차 정도를 정량적으로 나타낼 수 있는 지표를 정의한다. 3장에서는 주어진 오차 모델을 기초로 하여 TDOF 센서 2개와 3개에 대한 최적 배치를 구한다. 그리고 4장에서 결론을 맺는다.

2. 오차 모델링

TDOF 센서는 2개의 입력축을 지니고 있으므로 N개의 TDOF 센서를 사용할 경우 2N개의 측정값을 얻을 수 있다. 이때의 측정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$m = Hx + \varepsilon \tag{2-1}$$

여기서 $m : n \times 1, H : n \times 3, x : 3 \times 1, \varepsilon : n \times 1, n = 2N$
 m 은 n 차원 벡터로서, N개의 TDOF 센서의 각 입력축에 나타나는 측정값들이다. m 벡터의 각 성분을 $m_1, m_2, m_3, \dots, m_{2N}$ 이라고 할 때, m_1 과 m_2 가 TDOF 센서 측정값이고, m_3 와 m_4 가 또 다른 하나의 TDOF 센서의 측정값이라고 하자. H는 TDOF 센서 입력축들의 방향코사인 행렬로서, H행렬의 각 행은 입력축의 방향코사인 벡터이다. x는 입력 각속도 측 센서에 입력되는 상태 벡터이다. ε 은 측정값에 나타나는 오차로서 정규 분포를 갖는다고 가정한다. ε 의 각 항을 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \dots, \varepsilon_{2N}$ 이라고 하면 ε_1 과 ε_2 는 연관되어 있다고 볼 수 있다. 왜냐하면 ε_1 과 ε_2 는 하나의 TDOF 센서의 측정값에 나타나는 오차이기 때문이다. 마찬가지로 ε_3 와 ε_4 도 연관되어 있다. 그러나 ε_2 와 ε_3 는 서로 다른 센서에서의 측정 오차이므로 무관하다고 가정할 수 있다. 따라서 측정오차 ε 의 평균과 분산을 (2-2)와 (2-3)과 같이 표현할 수 있다.

1. 서론

스트랩다운 관성항법장치(SDINS)는 관성센서(자이로스코프와 가속도계)를 직접 항체에 부착시켜 얻어진 출력을 이용하여 항체의 위치와 자세를 해석적으로 알아내는 장치로서, 관성센서 유니트와 항법 컴퓨터로 구성된다. SDINS를 실제 항체에 사용하기 위해서는 중첩시스템을 구성하여 신뢰도(reliability)를 높여 주어야만 한다. SDINS에서 널리 사용되는 자이로스코프로는 동작 범위가 넓은 DTG(Dynamically Tuned Gyroscope)를 들 수 있는데[1], DTG는 2-자유도(Two Degree Of Freedom - TDOF)를 지니고 있기 때문에 최소한 2개의 DTG로써 IMU(Inertial Measurement Unit)를 구성하게 된다. 2개 이상의 DTG로 구성되는 IMU는 4개 이상의 출력축을 지니고 있기 때문에 최소한 하나의 중첩분을 지니게 되는데, 이 중첩분은 활용하기에 따라서 많은 장점을 지니고 있다.

중첩시스템을 구성할 때 1-자유도(Single Degree Of Freedom - SDOF) 센서의 경우에는 센서의 입력축을 임의의 방향으로 향하게 할 수 있으므로 최적화하고자 하는 대상에 따라 자유롭게 센서를 배치할 수 있으나[2,3], TDOF 센서는 2개의 입력축이 서로 수직을 이루고 있으므로 배치에 제약이 따르게 된다 [4].

본 논문에서는 TDOF 센서를 2개 사용한 경우와 3개 사용한 경우에 대하여 센서 최적 배치를 구함으로써 시스템 성능을 향상시켰다. 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 최적 배치를

$$E[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T \tag{2-2}$$

$$E[\varepsilon\varepsilon^T] = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \delta^2 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \delta^2 & \sigma^2 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 & \delta^2 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \delta^2 & \sigma^2 & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \sigma^2 & \delta^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \delta^2 & \sigma^2 \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

여기에서 분산 σ^2 은 δ^2 보다 훨씬 큰 값을 갖는다고 가정한다.
 측정값들을 이용하여 x 를 추정하는 데에는 보편적으로 최소
 자승법을 사용한다. 이 추정값을 \hat{x} 이라고 하면 다음과 같이 구
 할 수 있다.

$$\hat{x} = (H^T H)^{-1} H^T m \quad (2-4)$$

이 때의 추정 오차 공분산 행렬을 C 라고 하면, C 는 다음과
 같이 나타 낼 수 있다.

$$C = E[(x - \hat{x})(x - \hat{x})^T] = E[(H^T H)^{-1} H^T \varepsilon \varepsilon^T H (H^T H)^{-1}] \\ = (H^T H)^{-1} H^T E[\varepsilon \varepsilon^T] H (H^T H)^{-1} \quad (2-5)$$

오차의 확률 밀도 함수를 구하면 다음과 같다.

$$p(\eta) = (2\pi)^{-n/2} |C|^{-1/2} \exp(-1/2 \eta^T C^{-1} \eta) \quad (2-6)$$

이 때 $\eta^T C^{-1} \eta = k^2$ 라고 하면(단, k 는 임의의 상수), η 는
 3 차원 벡터이므로 이것은 3차원 공간에서 타원체를 구성하며,
 이 타원체의 표면에서 확률밀도함수값은 항상 일정하다. 이
 타원체의 체적은 식(2-7)과 같이 나타난다[5].

$$v = 4/3 k^3 \pi \sqrt{|C|} \quad (2-7)$$

이 체적이 작을수록 시스템의 오차는 작아지고 시스템의 성
 능은 향상된다. 따라서 $|C|$ 즉, $\det C$ 는 중첩 시스템의 성능
 을 측정하는 좋은 지표로 활용될 수 있다[6]. 다음 장에서는
 $\det C$ 를 최소화시키는 센서 배치를 구함으로써 최적 배치를 구
 현하게 될 것이다.

3. 2자유도 센서의 최적 배치

식(2-5)를 이용하여 추정오차 공분산행렬의 행렬식을 구해
 보면 다음과 같다.

$$\det C = \frac{\det(H^T E[\varepsilon\varepsilon^T] H)}{\det^2(H^T H)} \quad (3-1)$$

위 식에서 추정 오차 공분산 행렬식은, $E[\varepsilon\varepsilon^T]$ 가 일정할 때, H
 행렬에 의해 결정되므로 센서의 배치에 따라 추정오차 공분산
 행렬식이 변하는 것이다. 이 장에서는 TDOF 센서를 2개 사용
 할 때와 3개 사용할 때의 최적 배치를 알아보겠다.

3.1 2개의 TDOF 센서의 최적 배치

3.1.1 모델링

TDOF 센서 2개를 사용할 때, 각 TDOF센서의 회전축을 s_1 과
 s_2 라고 하고, s_1 TDOF 센서의 입력축을 a 와 b , 그리고 s_2 TDOF
 센서의 입력축을 c 와 d 라고 가정하자. 두 센서의 원점이 일치
 한다고 가정할 때, 각 TDOF 센서의 입력축에 의해 2개의 평면
 이 구성된다. 즉 a 와 b 가 하나의 평면을 이루고, c 와 d 가 하나
 의 평면을 이루어, 이 두 평면의 만나는 직선이 생성된다. 원
 점으로부터 이 직선을 따라 Y 축을 정의하자. s_1 을 따라 Z 축을
 정의하고 Y 축과 Z 축을 이용하여 X 축을 정의할 수 있는데, X 축
 은 s_1 TDOF센서의 a 와 b 에 의해 이루어진 평면위에 존재한다.
 X 축과 a 가 이루는 각을 ϕ 라고 정의할 때(그림 3-1), a, b 와 s_1
 의 성분을 XYZ좌표계로 나타내면 식(3-2)와 같다.

$$\begin{aligned} a &= \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \end{bmatrix} \\ b &= \begin{bmatrix} -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \\ s_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-2)$$

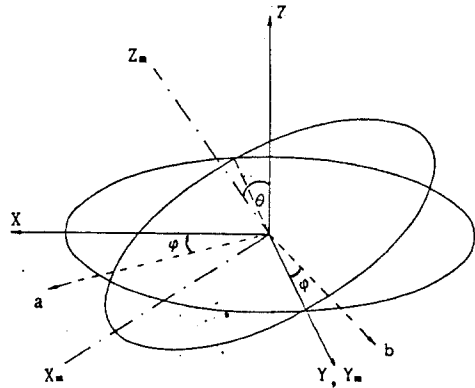


그림 3-1 각 ϕ 와 입력축 a, b
 Fig 3-1 Angle ϕ and input axes a, b

s_2 을 Z_m 축이라고 정의하고, Y 축을 Y_m 이라고 하면 새로운 좌표
 계 $X_m Y_m Z_m$ 이 생성되는데 이 때 X_m 은 c 와 d 가 이루는 평면상에
 존재한다. X_m 과 c 가 이루는 각을 ϕ 라 하고(Z_m 축으로 양의 방
 향으로), Z 와 Z_m 가 이루는 각을 θ 라고 할 때, c, d 와 s_2 의 성분
 을 XYZ좌표계로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} c &= \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\theta & \sin\phi & -\cos\phi\sin\theta \end{bmatrix} \\ d &= \begin{bmatrix} -\sin\phi\cos\theta & \cos\phi & \sin\phi\sin\theta \end{bmatrix} \\ s_2 &= \begin{bmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-3)$$

따라서 이 결과를 이용하여 식(2-1)에서의 H행렬을 구해보면 (3-4)과 같다.

$$H = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ \cos\phi\cos\theta & \sin\phi & -\cos\phi\sin\theta \\ -\sin\phi\cos\theta & \cos\phi & \sin\phi\sin\theta \end{bmatrix} \quad (3-4)$$

그리고 센서의 회전축 성분은 (3-5)와 같다.

$$s_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-5)$$

$$s_2 = \begin{bmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

3.1.2 최적 배치

최적 배치는 측정오차 공분산행렬식이 최소가 되게하는 H행렬을 구하는 것이다. 측정오차 공분산행렬식은 $\det(H^TH)$ 와 $\det(H^TE[\epsilon\epsilon^T]H)$ 으로 이루어져 있는데 여기에서 H^TH 행렬은 다음과 같이 나타낼 수 있다[5].

$$H^TH = NI - H_s^TH_s \quad (3-6)$$

여기서, N : TDOF 센서의 갯수
I : 3 × 3 단위 행렬

$$H_s = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_N \end{bmatrix} : N \times 3 \text{ 행렬}$$

식(3-6)을 이용하여 H^TH 의 행렬식을 구해보면 다음과 같다.

$$\det(H^TH) = 2\sin^2\theta \quad (3-7)$$

$E[\epsilon\epsilon^T]$ 는 Hermite행렬이므로 조단 행렬(Jordan Matrix)로 변환이 가능하며, 이때의 모달 행렬(Modal Matrix) M은 $M^* = M^{-1}$ 의 성질을 만족한다[7]. 그리고 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$E[\epsilon\epsilon^T] = P_4^T Q_4^2 P_4 \quad (3-8)$$

$$Q_4^2 = \begin{bmatrix} \sigma^2 + \delta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 - \delta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 + \delta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^2 - \delta^2 \end{bmatrix}$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

따라서 식(3-8)에 의해 $H^TE[\epsilon\epsilon^T]H$ 는 다음과 같이 표시된다.

$$H^TE[\epsilon\epsilon^T]H = H^T P_4^T Q_4^2 P_4 H = (Q_4 P_4 H)^T (Q_4 P_4 H) \quad (3-9)$$

앞에서의 성질을 이용하여 $\det(H^TE[\epsilon\epsilon^T]H)$ 을 전개하여 보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \det(H^TE[\epsilon\epsilon^T]H) &= \det(H^T P_4^T Q_4^2 P_4 H) \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} p\tilde{a}^T & q\tilde{b}^T & p\tilde{c}^T & q\tilde{d}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p\tilde{a} \\ q\tilde{b} \\ p\tilde{c} \\ q\tilde{d} \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{여기서, } \tilde{H} &= P_4 H = \begin{bmatrix} \tilde{a}^T & \tilde{b}^T & \tilde{c}^T & \tilde{d}^T \end{bmatrix}^T \\ p &= \sqrt{(\sigma^2 + \delta^2)} \\ q &= \sqrt{(\sigma^2 - \delta^2)} \end{aligned}$$

이것을 Binet-Cauchy 정리를 이용하여 전개하면 다음과 같다 [5].

$$\begin{aligned} \det(H^TE[\epsilon\epsilon^T]H) &= \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} p\tilde{a}^T & q\tilde{b}^T & p\tilde{c}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p\tilde{a} \\ q\tilde{b} \\ p\tilde{c} \\ q\tilde{d} \end{bmatrix} \right) + \det \left(\begin{bmatrix} p\tilde{a}^T & q\tilde{b}^T & q\tilde{d}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p\tilde{a} \\ q\tilde{b} \\ q\tilde{d} \end{bmatrix} \right) \\ &+ \det \left(\begin{bmatrix} p\tilde{a}^T & p\tilde{c}^T & q\tilde{d}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p\tilde{a} \\ p\tilde{c} \\ q\tilde{d} \end{bmatrix} \right) + \det \left(\begin{bmatrix} q\tilde{b}^T & p\tilde{c}^T & q\tilde{d}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q\tilde{b} \\ p\tilde{c} \\ q\tilde{d} \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (3-10)$$

4개의 행렬식중 첫째 항을 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \det \left(\begin{bmatrix} p\tilde{a}^T & q\tilde{b}^T & p\tilde{c}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p\tilde{a} \\ q\tilde{b} \\ p\tilde{c} \\ q\tilde{d} \end{bmatrix} \right) &= p^4 q^2 \det \left(\begin{bmatrix} \tilde{a}^T & \tilde{b}^T & \tilde{c}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \\ \tilde{c} \end{bmatrix} \right) \\ &= p^4 q^2 (1 - \tilde{c}\tilde{b}^T\tilde{b}\tilde{c}^T - \tilde{c}\tilde{a}^T\tilde{a}\tilde{c}^T) \\ &= p^4 q^2 \tilde{c} s_1^T s_1 \tilde{c}^T \end{aligned} \quad (3-11)$$

이러한 방법으로 나머지 행렬식을 정리하여 $\det(H^TE[\epsilon\epsilon^T]H)$ 를 구해보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \det(H^TE[\epsilon\epsilon^T]H) &= p^4 q^2 \cos^2(\phi+45^\circ) \sin^2\theta \\ &+ p^2 q^4 \sin^2(\phi+225^\circ) \sin^2\theta + p^4 q^2 \cos^2(\phi+45^\circ) \sin^2\theta \\ &+ p^2 q^4 \sin^2(\phi+225^\circ) \sin^2\theta \end{aligned} \quad (3-12)$$

식(3-7)와 식(3-12)를 이용하여 측정 오차 공분산 행렬식을 구해보겠다.

$$\det C = \det(\tilde{H}^T E [\epsilon \epsilon^T] H) / \det^2(\tilde{H}^T H)$$

$$= \frac{p^2 q^2 [p^2 \cos^2(\phi+45^\circ) + q^2 \sin^2(\phi+225^\circ) + p^2 \cos^2(\phi+45^\circ) + q^2 \sin^2(\phi+225^\circ)]}{4 \sin^2 \theta} \quad (3-13)$$

식(3-13)의 분모와 분자를 보면, 분모에는 θ 를 포함한 항만 있고 분자에는 ϕ , ϕ 를 포함한 항들이 있다. 따라서 값을 최소화 시키기 위해서는 분모를 최대화시키고 분자를 최소화시키면 된다. 분모를 최대화시키기 위해서, θ 는 90° 나 270° 가 되어야 한다. 그리고 분자를 최소가 되는 ϕ 는 45° , 225° 이다. ϕ 를 포함한 식도 ϕ 식과 같은 꼴이므로 ϕ 가 45° , 225° 일 때 최소가 된다. 측정 오차 공분산 행렬식을 최소화하는 ϕ , θ , ϕ 를 구해보면 표 3-1과 같다. 그리고 이때의 측정 오차 공분산 행렬식값은 아래와 같다.

$$\det C = \frac{(\sigma^2 + \delta^2)(\sigma^2 - \delta^2)^2}{2} \quad (3-14)$$

표 3-1. 2개의 TDOF 센서의 최적 배치

| | |
|----------|-----------------------|
| θ | $90^\circ, 270^\circ$ |
| ϕ | $45^\circ, 225^\circ$ |
| ϕ | $45^\circ, 225^\circ$ |

3.2 3개의 TDOF 센서의 최적 배치

3.2.1 모델링

3개의 TDOF 센서 배치를 모델링하기 위해서는 6개의 자이 필 요하게 된다. 그런데 $\det C$ 를 표현한 식이 매우 복잡하기 때문에 어려움이 따른다. 따라서 식을 간략화시키고, 근사시켜서 최적값을 구하는 방법이 요구된다.

$\tilde{H} = P_6 H$ 라고 정의하면 식(2-5)는 다음과 같이 나타낼 수 있다. (여기에서 사용된 P_6 와 Q_6 행렬은 센서를 2개 배치할 때와 같은 형태로서 6×6 행렬들이다.)

$$\det C = \frac{\det(\tilde{H}^T Q_6 \tilde{H})}{\det^2(\tilde{H}^T H)} \quad (3-15)$$

여기에서 \tilde{H} 는 H 를 직각 변환시킨 행렬이므로 H 행렬의 성질이 그대로 보존된다.

식(3-15)의 분모와 분자를 같이 고려하면서 최소화하는 \tilde{H} 를 구하는 것은 복잡한 과정이다. 왜냐하면 TDOF센서의 3개 배치시에는 6개의 변수가 코사인인 사인의 곱으로 나타나기 때문이다. 먼저 $\det(\tilde{H}^T Q_6 \tilde{H})$ 의 한계치들을 구하여 보면 다음과 같다. R^2 과 S^2 을 다음과 같이 정의 하자.

$$R^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta^2 \end{bmatrix}, S^2 = \begin{bmatrix} \delta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

R^2 과 S^2 은 준정칙행렬(positive semidefinite matrix)이므로 다음의 성질이 성립한다[8].

$$\lambda_k(\tilde{H}^T(Q_6^2 - 2S^2)\tilde{H}) \leq \lambda_k(\tilde{H}^T Q_6^2 \tilde{H}) \leq \lambda_k(\tilde{H}^T(Q_6^2 + 2R^2)\tilde{H})$$

여기에서 $\lambda_k(A)$ 는 A 행렬의 k 번째 크기의 고유치이다.

$\tilde{H}^T(Q_6^2 - 2S^2)\tilde{H}$ 는 정칙행렬(positive definite matrix)이므로 고유치값들은 항상 양의 값을 갖는다. 따라서 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$\det(\tilde{H}^T(Q_6^2 - 2S^2)\tilde{H}) \leq \det(\tilde{H}^T Q_6^2 \tilde{H}) \leq \det(\tilde{H}^T(Q_6^2 + 2R^2)\tilde{H})$$

$$(\sigma^2 - \delta^2)^3 \det(\tilde{H}^T \tilde{H}) \leq \det(\tilde{H}^T Q_6^2 \tilde{H}) \leq (\sigma^2 + \delta^2)^2 \det(\tilde{H}^T \tilde{H})$$

$$\frac{(\sigma^2 - \delta^2)^3}{\det(\tilde{H}^T \tilde{H})} \leq \frac{\det(\tilde{H}^T Q_6^2 \tilde{H})}{\det^2(\tilde{H}^T \tilde{H})} \leq \frac{(\sigma^2 + \delta^2)^2}{\det(\tilde{H}^T \tilde{H})}$$

따라서 $\det C$ 의 분모 즉, $\det(\tilde{H}^T \tilde{H})$ 를 먼저 최대로 하고 $\det C$ 의 분자인 $\det(\tilde{H}^T Q_6^2 \tilde{H})$ 를 최소로 하는 H 행렬을 구해보는 방법을 생각하여 보자. $\tilde{H}^T \tilde{H} = NI - H_s^T H_s$ 성질이 있으므로 식(3-15)의 분모는 아래와 같이 표현될 수 있다.

$$\det(\tilde{H}^T \tilde{H}) = \det(NI - H_s^T H_s)$$

$NI - H_s^T H_s$ 를 모달 분해하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$NI - H_s^T H_s = M^{-1} D M, D = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3] \quad (3-16)$$

이것의 trace와 행렬식을 구해보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{tr}[NI - H_s^T H_s] &= 3N - \text{tr}[H_s H_s^T] \\ &= 2N \\ &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{aligned} \quad (3-17)$$

$$\det[NI - H_s^T H_s] = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \quad (3-18)$$

$\tilde{H}^T \tilde{H}$ 에서 \tilde{H} 의 랭크(rank)가 3이면 $NI - H_s^T H_s$ 는 양의 정칙행렬이므로 $NI - H_s^T H_s$ 의 고유치 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 는 항상 영보다 크다. 따라서 다음의 관계가 성립된다.

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{3} \geq \sqrt[3]{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} = \sqrt[3]{\det[NI - H_s^T H_s]}$$

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ 는 그 값이 항상 일정하므로, $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ 는 상한을 갖게 된다. $\det[NI - H_s^T H_s]$ 가 최대가 되기 위해서는 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ 의 성질이 만족되어야 하므로 식(3-17)에 의하여, λ 는 다음과 같이 나타낸다.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{2}{3} N \quad (3-19)$$

이것을 이용하면 $NI - H_s^T H_s$ 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$NI - H_s^T H_s = \frac{2N}{3} I$$

이 식은 다음과 같이 바꾸어 표시할 수 있다.

$$H_s^T H_s = (N/3)I \quad (3-20)$$

따라서 $\det[NI - H_s^T H_s]$ 가 최대값이 되기 위해서는 H_s 가 식 (3-20)의 성질을 만족시켜야 한다.

3.2.2 최적 배치

3개의 TDOF 센서를 배치할 때에는 다음과 같다.

$$H_s^T H_s = I, \quad H_s: 3 \times 3$$

H_s 는 3×3 행렬이므로, 이것을 만족시키려면 H_s 의 각 행은 서로 직교하고, 크기가 1이어야 한다.

다음에는 회전축을 고정시키고 입력축을 변화시키면서, $\det(\hat{H}^T Q_6^2 \hat{H})$ 가 최소가 되는 \hat{H} 을 구해 보자. Z축이 회전축 s_1 , X축이 회전축 s_2 , 그리고 Y축이 회전축 s_3 라고 하면 회전축 s_1, s_2, s_3 는 $\det^2(\hat{H}^T \hat{H})$ 가 최대가 되는 배치이다. 이것은 앞에서 언급한 바와 같이 $\det^2(\hat{H}^T \hat{H})$ 가 센서의 회전축 위치에만 영향을 받기 때문이다. \hat{H} 의 각 행을 $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d}, \tilde{e}, \tilde{f}$ 라고 하자. 그리고 \tilde{a} 와 \tilde{b} 가 s_1 와 직교하고, \tilde{c} 와 \tilde{d} 가 s_2 , \tilde{e} 와 \tilde{f} 가 s_3 와 직교한다고 가정하자.

\tilde{a} 와 \tilde{b} 축은 s_1 과 직교하므로 XY평면에 존재한다. Z축에 양의 방향으로 회전시킨 각을 θ 라고 하면 \tilde{a} 와 \tilde{b} 의 성분은 다음과 같이 나타낼 수 있다(그림 3-2).

$$\tilde{a} = \begin{bmatrix} -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{b} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \end{bmatrix}$$

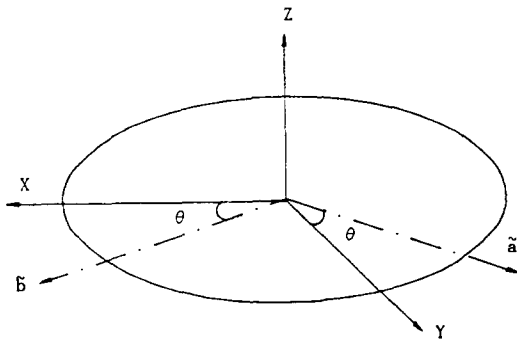


그림 3-2 각 θ 와 입력축 \tilde{a}, \tilde{b}

Fig 3-2 Angle θ and input axes \tilde{a}, \tilde{b}

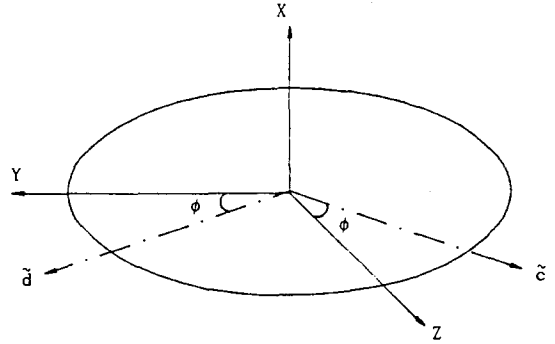


그림 3-3 각 ϕ 와 입력축 \tilde{c}, \tilde{d}

Fig 3-3 Angle ϕ and input axes \tilde{c}, \tilde{d}

같은 방법으로 s_2 축의 양의 방향으로 회전시킨 각을 ϕ 이라고 하여 \tilde{c} 와 \tilde{d} 의 위치벡터를 나타내고(그림 3-3), 또한 s_3 축의 양의 방향으로 회전시킨 각을 ψ 라고 하면 \tilde{e} 와 \tilde{f} 의 위치벡터를 나타낼 수 있다. 이것을 정리하여 \hat{H} 행렬을 구해보면 아래와 같다.

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{bmatrix}$$

위에서 구한 \hat{H} 를 이용하여 $\det(\hat{H}^T Q_6^2 \hat{H})$ 를 최소화시키는 θ, ϕ, ψ 를 구해보면, 표 3-2와 같다. 이때 α, β, γ 는 θ, ϕ, ψ 의 어떠한 조합이여도 된다. 즉, $\alpha=\theta, \beta=\phi, \gamma=\psi$ 이거나, $\alpha=\phi, \beta=\psi, \gamma=\theta$ 이어도 된다. 이때 $\det C$ 값을 구해보면 다음과 같다.

$$\det C = \frac{\det(\hat{H}^T Q_6^2 \hat{H})}{\det^2(\hat{H}^T \hat{H})} = \frac{\sigma^2(\sigma^2 + \delta^2)(\sigma^2 - \delta^2)}{8} \quad (3-21)$$

표3-2에서 구한 각은 \tilde{a}, \tilde{b} 에 대한 각이다. 따라서 실제 입력축 a 와 b 에 대한 각을 구하려면 표 3-2에 나타난 값 보다 45° 더 회전시켜 주어야 한다. 이것은 $\tilde{c}, \tilde{d}, \tilde{e}, \tilde{f}$ 에 대해서도 마찬가지이므로 실제 입력축에 대한 값들은 표3-3 같다.

앞에서 제시한 방법은 분모를 최대화시킨 후에 분자를 최소화하는 방법이어서, 구한 값이 최소임을 보장하지는 못한다. 그러나 최적값을 ξ 라고 하면 ξ 는 다음 범위에 항상 존재한다.

$$\frac{(\sigma^2 - \delta^2)^3}{8} \leq \xi \leq \frac{\sigma^2(\sigma^2 + \delta^2)(\sigma^2 - \delta^2)}{8} \quad (3-22)$$

식(3-22)의 우변은 식(3-21)의 $\det C$ 값과 같으므로, 최소값과 구한값의 차는 $\delta^2(3\sigma^2 - \delta^2)/8$ 이하이다. $\sigma^2 \gg \delta^2$ 의 가정을 생각해보면 이 차는 아주 작은 값이다.

표3-2. $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d}, \tilde{e}, \tilde{f}$ 의 최적 배치

| α | β | γ |
|----------|---------|----------|
| 0° | 90° | x |
| 0° | 270° | x |
| 180° | 90° | x |
| 180° | 270° | x |
| 90° | 0° | x |
| 90° | 180° | x |
| 270° | 0° | x |
| 270° | 180° | x |

x : 임의의 값

표 3-3. 3개의 TDOF센서의 최적 배치

| $\bar{\alpha}$ | $\bar{\beta}$ | $\bar{\gamma}$ |
|----------------|---------------|----------------|
| 45° | 135° | x |
| 45° | 315° | x |
| 225° | 135° | x |
| 225° | 315° | x |
| 135° | 45° | x |
| 135° | 225° | x |
| 315° | 45° | x |
| 315° | 225° | x |

x : 임의의 값

4. 결론

본 연구에서는 TDOF 센서를 2개 사용한 경우와 3개 사용한 경우에 대하여 센서의 최적배치를 구함으로써 시스템의 성능을 향상하였다.

표 3-1에서 볼 수 있듯이 2개의 회전축이 90° 나 270° 를 이루고, 각각의 입력축이 45° 나 225° 비틀려 있는 상태에서 측정 오차 공분산 행렬식이 최소가 됨을 보였다. 즉 뒤집어진 직각 원뿔의 끝을 중심으로 입력축이 원뿔 위에 놓여 있고 회전축은 직각을 이루는 형태이다.

센서를 3개 사용할 때에는 표3-3과 같이 많은 배치가 가능하다. 이 배치들은 분모와 분자식을 나누어 최대와 최소를 각각 구함으로써, 최적의 값은 보장하지 못하지만 최적에 근사한 값임을 알 수 있다. 이 결과는 2개의 센서를 배치하는 경우에서 알 수 있듯이 회전축의 수직성이 최적 배치에 가장 중요한 변수이므로 회전축을 고정시킨 후에, 입력축을 변화시키면서 최적값을 얻은 것이다. 이 배치는 회전축의 수직조건을 이용하여 계산량을 최소화시키면서 얻은 결과로서 센서를 계속적으로 증가시킬 때 유용하게 사용될 수 있을 것이다.

5. 참고 문헌

- [1] 이장규 외, "정밀계측장치 제작에 따른 해석기법 개발(1차년도)," 과학기술처, 1987
- [2] Pejsa, A. J., "Optimum Skewed Redundant Inertial Navigators," *AIAA Journal*, Vol.12, No.7, July 1974, pp899-902
- [3] Gilmore, J.P. and McKern, R.A, "A Redundant Strapdown Inertial Reference Unit (SIRU)," *J.Spacecraft*, Vol.9, No.1, JAN., 1972, pp39-47
- [4] Hung, J.C. and Doran, B.J. "High-Reliability Strapdown Platforms Using Two-Degree-of-Freedom Gyro," *IEEE tran. AES*, Vol. AES-9, Mar 1973, pp253-259.
- [5] 이장규 외, "중첩센서를 이용한 SDINS 성능향상 알고리즘 개발," 국방과학연구소 MSRD-417-91070, 1991.
- [6] Harrison & Gai "Evaluating Sensors for Navigation Performance and Failure Detection," *IEEE tran. AES*, Vol. AES-13, No.6, November 1977.
- [7] Chi-Tsong Chen, *Linear System Theory and Design*, 1984, CBS College Publishing
- [8] Horn and Johnson, *Matrix Analysis*, 1985, Cambridge Univ. Publishing.