

영점구조를 이용한 비 최소위상 플랜트의 새로운 LQG/LTR 방법연구

서 병 설 강 진 식

한양대학교 전자통신공학과

A Study on a New Method of LQG/LTR for Nonminimum Phase Plant by Using Zero Structure

Byung Sul Suh

* Jin Shig Kang

Dept. of Electronic Communication Eng.

Hanyang Univ.

Abstract

LQG/LTR method cannot applied to nonminimum phase plant. In this paper, we present a new approximation method which guarantee the approximation error equal to zero and exact loop transfer recovery. Zero structure of plant and approximated plant are considered in approximation procedure. It is shown that the properties of plant and approximated plant at pole and zero frequency response are exactly same. It is shown by example that the suggested method can avoid the NMP plant constraint arised in designing LQG/LTR.

1. 서론

LQG-LTR (Linear Quadratic Gaussian Control with Loop Transfer Recovery) 방법은 1981년에 Doyle 과 Stein^[5]이 제시한 선형 다변수 제어시스템의 보상기 설계방법으로 LQG가 성능-강인성과 안정도-강인성 문제에 관한 사양들을 설계시에 직접 고려할 수 없다는 문제점을 해결하기 위해서 Kwakernaak (1972)의 기법^[6]을 이용하여 발전시킨 제어기 설계 방법이다. 이 방법은 LQG 의 가격함수에 포함되어 있는 설계 파라미터들을 루우프 형성 (loop-shaping) 기법을 사용하여 선정하는 융통성을 갖고 있다. 그러나 플랜트에 비최소위상 영점이 존재하는 경우에는 루우프 전달회복이 이루어질 수 없어 완전한 루우프전달회복이 이루어지지 않는다.^[9]

본 연구에서는 LQG-LTR 방법의 비최소위상 문제점을 해결하기 위하여 플랜트의 영점구조를 이용하는 새로운 근사 방법을 제시하고 근사화된 플랜트에 대하여 LQG/LTR을 적용할 경우 완전한 루우프 전달회복이 일어남을 시뮬레이션 예제를 통하여 보인다.

2. 본론

2.1 LQG/LTR의 비 최소위상 특성

제어시스템이 안정하고 식(9)가 만족될 때 모델기준 보상기(MBC)의 전달함수 행렬, K(S)의 극한거동은^[5,9]

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} K(S) \rightarrow [C(SI-A)^{-1}B]^{-1} C(SI-A)^{-1}H \rightarrow G^{-1}(S)G_f(S) \quad (1)$$

로 주파수 S에 대해 불연속적 (point wise)으로 수렴하며 ρ 가 0으로 접근할 때 플랜트 전달함수 행렬, G(S)의 역수와 목표필터 루우프전달함수 G_f(S)로 루우프전달회복이 이루어진다. 즉, MBC 보상기의 극점들이 플랜트 다이내믹스 G(S) = CΦ(S)B의 영점들을 삭제시켜야 하며 플랜트 전달함수 G(S)의 영점이 S-좌표의 오른쪽 평면에 존재하는 비최소위상일 경우 MBC 보상기의 극점은 S-좌표의 오른쪽 평면에 있어야 하는 문제점을 포함한다.

2.2 근사화

2.1절에서 우평면 영점을 갖는 플랜트에 대한 LQG/LTR설계의 제약을 서술하였다. 이 절에서는 플랜트가 우평면 영점을 갖는 경우 우평면 영점의 위치와 방향을 분석하고 오차함수의 특이치를 최소화하는 근사화 방법에 대하여 서술한다.

플랜트가 우평면에 m개의 서로 다른 영점을 갖는다고 가정하면 i번째의 우평면 영점에 대하여 다음식이 성립한다.^[10,11]

$$\begin{bmatrix} z_i I - A & -B \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ W_i \end{bmatrix} = 0 \quad (2)$$

X_i : 상태영점방향, W_i : 입력영점방향

식 (2)는 다음과 같은 행렬식으로 표현되며

$$[z_i I - A] X_i = B W_i \quad (3.a)$$

$$C X_i = 0 \quad (3.b)$$

영점방향은 행렬 A의 고유치(eigenvalue)와 고유벡터(eigenvector)와의 관계식^[7,8]

$$A = U \Lambda V^H \quad (4)$$

을 이용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} X_i &= [z_i I - A]^{-1} B W_i \\ &= U [z_i I - \Lambda]^{-1} V^H B W_i \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{U_j V_j^H B_j W_i}{z_i - \lambda_j} \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$ 이며, 식 (5)는 상태 영점 방향 X_i 가 그림 1과 같이 $[z_i I - A]^{-1} B W_i$ 의 확장공간에 있어야 함을 나타낸다. [7.8]

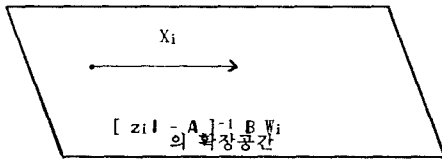


그림 1. 상태영점방향 및 입력영점방향
Fig. 1. State zero direction and input zero direction

우평면 영점 및 방향에 대하여 그림 2와 같은 덧셈형 오차 (additive error)를 가하면 $G_{MP}(S)$ 는 다음식으로 표현할 수 있다.

$$G_{MP}(S) = G(S) + \Delta(S) \quad (6)$$

여기서 $G(S)$ 는 비최소위상 플랜트 전달함수, $G_{MP}(S)$ 는 근사화된 최소위상 플랜트 전달함수이며 $\Delta(S)$ 는 주파수 영역에서의 오차 함수이다.

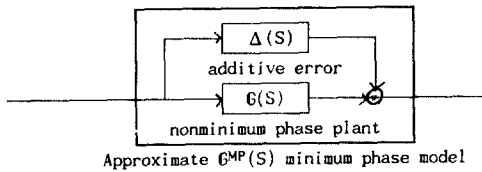


그림 3. 덧셈형 오차를 포함하는 최소위상 모델
Fig. 3. Minimum phase model with additive error

상태공간에서 $\Delta(S)$ 를 $G(S)$ 의 영점구조에 따라 $\Delta_i(S) = C \Phi(S) B_E$ 또는 $\Delta_o(S) = C_E \Phi(S) B$ 로 가정하면 오차함수의 특이치를 최소화하는 최적인 $G_{MP}(S)$ 은

$$G_{MP}(S) = C \Phi(S) B_{MP} \quad (7.a)$$

$$\text{or } = C_{MP} \Phi(S) B \quad (7.b)$$

로 된다. 오차함수는 식 (4)에 의하여

$$C \Phi(S) B_E = \sum_{i=1}^n \frac{C U_i V_i^H B_E}{S - \lambda_i} \quad (8.a)$$

또는

$$C_E \Phi(S) B = \sum_{i=1}^n \frac{C_E U_i V_i^H B}{S - \lambda_i} \quad (8.b)$$

이며 $U_i V_i^H = I$ 이므로 $C B_E = 0$, 또는 $C_E B = 0$ 인때 식 (8.a), (8.b)를 최소화하며 이때 오차함수의 특이치는 $\sigma_{\text{MAX}}[C \Phi(S) B_E] = 0$ (또는 $\sigma_{\text{MAX}}[C_E \Phi(S) B] = 0$)이 된다. 근사화된 플

랜트의 영점구조를 분석하기 위하여 오차함수를 식 (8.a)로 선택하고 영점을 Z_{MP_i} 로 가정하면 다음식이 성립한다.

$$\begin{bmatrix} z_{MP_i} I - A - B_{MP} \\ -C \quad 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{MP_i} \\ W_{MP_i} \end{bmatrix} = 0 \quad (9)$$

X_{MP_i} : 상태영점방향, W_{MP_i} : 입력영점방향

식 (9)에 대한 행렬 표현은 다음과 같다.

$$[z_{MP_i} I - A] X_{MP_i} = B_{MP} W_{MP_i} \quad (10.a)$$

$$C X_{MP_i} = 0 \quad (10.b)$$

그리고 오차함수를 식 (8.b)로 선택하고 영점을 Z_{MP_i} 로 가정하면 다음식이 성립한다.

$$\begin{bmatrix} z_{MP_i} I - A - B \\ -C_{MP} \quad 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{MP_i} \\ W_{MP_i} \end{bmatrix} = 0 \quad (11)$$

X_{MP_i} : 상태영점방향, W_{MP_i} : 입력영점방향

식 (11)에 대한 행렬 표현은

$$[z_{MP_i} I - A] X_{MP_i} = B W_{MP_i} \quad (12.a)$$

$$C_{MP} X_{MP_i} = 0 \quad (12.b)$$

이다. 식 (10.a)는 X_{MP_i} 가 $[z_{MP_i} I - A]^{-1} B_{MP} W_{MP_i}$ 의 확장공간에 있어야 함을 나타내며 식 (12.a)는 X_{MP_i} 가 $[z_{MP_i} I - A]^{-1} B W_{MP_i}$ 의 확장공간에 있어야 함을 나타낸다.

근사화 과정을 요약하면 다음과 같다.

- (1) 우평면 영점 Z_{MP} 를 선택한다.
- (2) 우평면 영점 Z_{MP} 를 만족하고 $C_E B = 0$ 또는 $C B_E = 0$ 를 만족하는 C_E 또는 B_E 를 선택한다.
- (3) 식 (9) 또는 (11)을 만족하는 X_{MP} , W_{MP} 가 존재하는지를 조사한다. 이때 X_{MP} , W_{MP} 가 존재하면 LQG/LTR 설계과정을 수행하며 존재하지 않으면 과정 (2)를 수행한다.

과정 (3)에서 X_{MP} , W_{MP} 의 존재여부는 식 (9)과 (11)의 좌변행렬에 대한 rank 조사만으로 가능하다. 식 (9), (11)을 만족하는 X_{MP} , W_{MP} 가 존재하기 위하여서는 식 (9), 식 (11)의 좌변행렬의 rank가 원 행렬의 차수보다 작아야 하며 유일하기 위해서는 원 행렬의 차수와 rank의 차이가 1이어야 한다. [7.8] 그리고 플랜트가 같은 위치에 복수개의 우평면 영점을 갖는 경우에는 행렬의 차수와 rank의 차이가 근사화 하기위하여 선정한 우평면 영점의 수와 같아야 하며 서로 다른 위치에 근사화된 영점을 선택할 경우 다음과 같이 구성되는 행렬의 차수와 rank의 차이가 1이어야 한다.

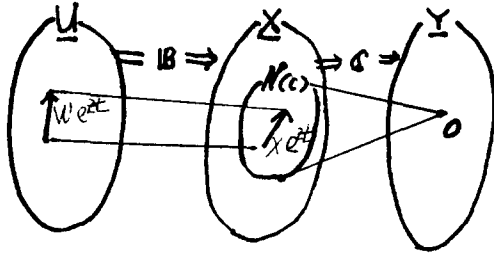
$$\text{diag} \left[\begin{bmatrix} z_{MP_1} I - A - B \\ -C_{MP} \quad 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z_{MP_2} I - A - B \\ -C_{MP} \quad 0 \end{bmatrix}, \dots \dots \dots \begin{bmatrix} z_{MP_l} I - A - B \\ -C_{MP} \quad 0 \end{bmatrix} \right]$$

또는

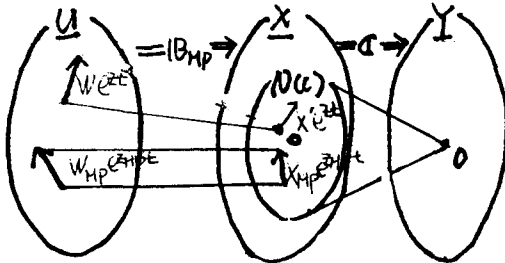
$$\text{diag} \left[\begin{bmatrix} z_{MP_1} I - A - B_{MP} \\ -C \quad 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z_{MP_2} I - A - B_{MP} \\ -C \quad 0 \end{bmatrix}, \dots \dots \dots \begin{bmatrix} z_{MP_l} I - A - B_{MP} \\ -C \quad 0 \end{bmatrix} \right]$$

$$\dots \dots \dots \begin{bmatrix} z^{MP} I I - A & - B_{MP} \\ - C & 0 \end{bmatrix}$$

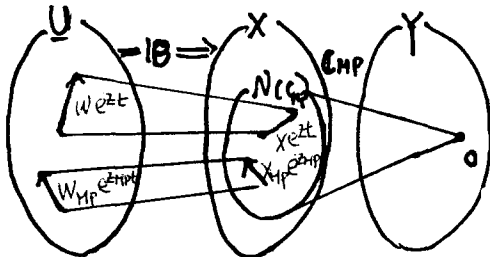
이 근사화 과정을 입력공간과 출력공간의 매핑(mapping) 관계로 도시하면 그림 3과 같다.[11]



a). 플랜트



b) B_{MP} 근사화



c) C_{MP} 근사화

그림 3. 입출력 매핑
Fig 3. Input-output mapping

그림 3.a는 입력공간과 출력공간의 mapping관계를 도시한 것으로 주파수가 Z 이며 방향이 W 인 입력(영점입력 신호)이 신호가 상태공간의 $X e^{z^t}$ 로 mapping되며 출력은 0 이 됨을 나타낸다. 그림 3.b는 입력행렬 B_{MP} 를 이용하여 근사화 시킨 플랜트에 대한 입-출력 사상으로서 주어진 플랜트의 영점 입력 신호는 상태공간의 $\text{Null}(C)$ 로 사상되어 출력이 0 이 되며 근사화된 플랜트의 영점 입력이 $\text{Null}(C)$ 내부의 $X_{MP} e^{z^t}$ 로 사상되어 출력이 0 이 됨을 나타낸다. 그리고 그림 3.c는 C_{MP} 를 이용하여 근사화 시킨 것으로 플랜트의 영점 입력이 상태공간의 $\text{Null}(C_{MP})$ 로 사상되어 출력은 0 이 되며 근사화된 플랜트의 영점 입력은 $\text{Null}(C_{MP})$ 내부의 $X_{MP} e^{z^t}$ 로 사상되어 출력이 0 이 된다. 이와 같이 본 논문에서 제안한 근사화 방법은 시간 영역의 신호에 대해서도 주어진 플랜트와 동일한 입-출력 사상을 보임으로서 주파수 영역과 시간 영역에서 우수한 특성을 보인다.

2.3 루프전달회복 (LTR)의 일반화

LQG-LTR 방법은 비최소위상 플랜트일 경우에는 MBC 피드백 루프가 칼만필터루프인 목표필터루프로 루프전달회복을 이룰 수 없어 칼만필터가 보장하는 안정도-강인성 및 성능-강인성 등 설계상 요구되는 중요한 속성들을 잃게 됨으로 비최소위상 플랜트를 최소위상 플랜트로 근사화하는 방법을 앞절에서 제시하였다. 이 절에서는 근사화된 최소위상 플랜트에 대하여 LQG/LTR을 적용하였을 경우에 목표루우프의 루우프 전달함수의 특성과 루우프 전달회복 과정에 대하여 서술한다.

근사화된 플랜트의 전달함수가 $G^{MP}(S) = C \Phi(S) B_{MP}$ 인 경우 목표루우프를 칼만 필터로 하면 설계변수 $\rho \rightarrow 0$ 일때 보상기 전달함수는 다음과 같은 극한거동을 한다.

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} K(S) \rightarrow (C \Phi(S) B_{MP})^{-1} C \Phi(S) H \quad (13)$$

그리고 개 루우프 전달행렬은

$$\begin{aligned} G(S) K(S) &= C \Phi(S) B_{MP} (C \Phi(S) B_{MP})^{-1} C \Phi(S) H \\ &= C \Phi(S) B_E (C \Phi(S) B_{MP})^{-1} C \Phi(S) H \quad (14) \end{aligned}$$

이며 $C \Phi(S) B_E = 0$ 를 이용하면 식(14)는 다음과 같은 극한거동을 한다.

$$\sigma_{\max}[G(S) K(S)] = \sigma_{\max}[C \Phi(S) H]$$

따라서 개루우프 전달행렬은 $\rho \rightarrow 0$ 일때 오차 함수를 식(8.a)로 선택할 경우 목표 루우프인 칼만필터로 전달회복이 이루어지며 목표루우프의 성능 및 안정도 강인성으로 회복됨을 알 수 있다.

근사화된 플랜트의 전달 행렬이 $G^{MP}(S) = (C + C_E) \Phi(S) B$ 인 경우 목표루우프를 칼만필터로 하고 $\rho \rightarrow 0$ 일때 보상기 전달함수는 다음과 같은 극한거동을 한다.

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} K(S) \rightarrow (C_{MP} \Phi(S) B)^{-1} C \Phi(S) H \quad (15)$$

그리고 개루우프 전달함수는 다음과 같은 극한거동을 한다.

$$\begin{aligned} G(S) K(S) &= C \Phi(S) B (C_{MP} \Phi(S) B)^{-1} C \Phi(S) H \\ &= C \Phi(S) H \end{aligned} \quad (16)$$

이 과정에서도 오차함수를 $C_E \Phi(S) B = 0$ 를 만족하도록 선택하면 개루우프 전달함수가 목표루우프로 전달회복이 일어남을 알 수 있다.

3. 시뮬레이션

시뮬레이션 예제로 다음과 같은 단일입력 단일 출력 시스템을 고려 되었다.

$$G(S) = \frac{(S-1)(S-5)}{S(S+2)^2}$$

주어진 플랜트 $G(S)$ 는 두개의 우평면 영점을 1과 5에 갖는다. 플랜트에 대한 상태공간에서의 가 제어성 표준형 표현은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= \begin{bmatrix} -4 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} U(t) \\ Y(t) &= [1 \ -6 \ 5] X(t) \end{aligned}$$

가 제어성 표준형 표현은 모든 모드에 대한 제어성을 나타내는 표준형으로 근사화는 C_{MP} 인 형태로 이루어 져야 한다. 근사화를 위한 영점을 -1과 -5로 선택하면 전달함수는 다음과 같다.

$$G_{MP}(S) = \frac{(S+1)(S+5)}{S(S+2)^2}$$

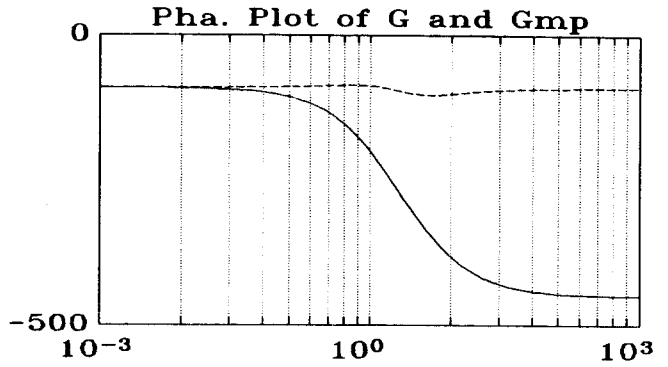
또한 상태공간 표현을 가 제어성 표준형으로 나타내면

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= \begin{bmatrix} -4 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} U(t) \\ Y(t) &= [1 \ 6 \ 5] X(t) \end{aligned}$$

로 된다. 이때 C_E 는

$$C_E = [0 \ 12 \ 0]$$

이며 $B C_E = 0$ 을 만족한다. 주어진 플랜트와 근사화된 플랜트의 Bode선도를 그림 4에 보였다.



b) 위상 Bode 선도

그림 4. 플랜트와 근사화된 플랜트의 Bode선도
Fig 4. Bode plot of plant and approximated plant

그림 4에서 보여지는 바와 같이 주어진 플랜트와 근사화된 플랜트의 주파수역 특성은 크기는 일치하며 위상은 개선됨을 알 수 있다.

루우프 전달회복이 일어남을 보이기 위하여 목표 루우프를 칼만 필터로 선정하고 가중치들을 $\mu=1, L=B B^T + 10 I$ 로 선택하였을 경우 필터 이득 H는

$$H = [0.2271, 2.3471, 2.1445]^T$$

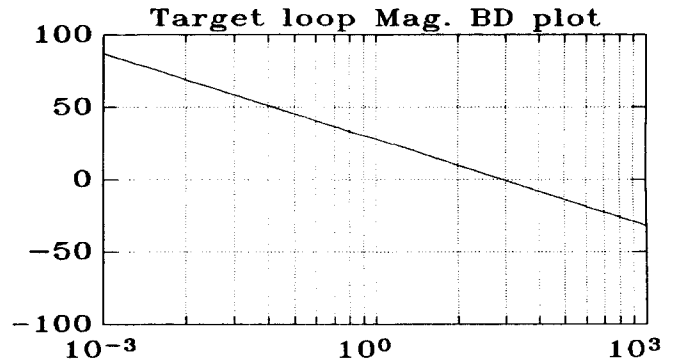
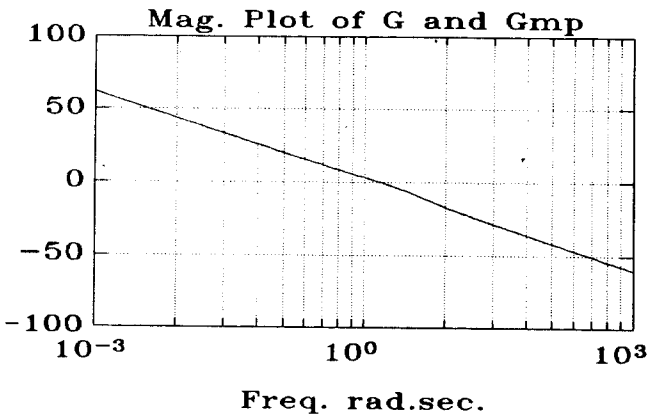


그림 5. 목표 루우프의 Bode선도

Fig 5. Bode plot of target loop

LQ조정기의 가중치들을 $\rho=[1, 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-5}]$, $Q=C_{MP}^T C$ 로 선택하였을 때의 LTR과정을 그림 6.에 보였다.



Freq. rad.sec.

a) 크기 Bode선도

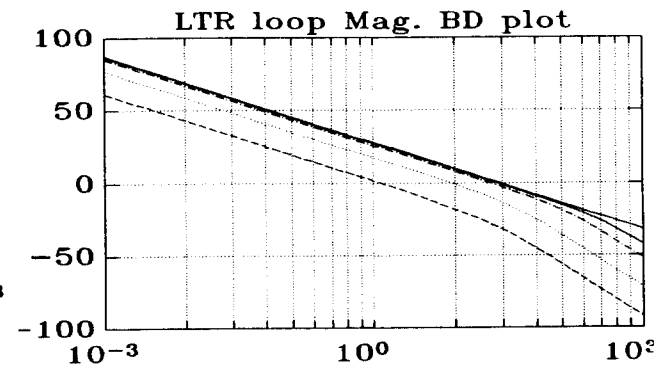


그림 6. LTR 과정

Fig 6. LTR procedure

그림에서 보여지는 바와 같이 본 논문에서 제안한 방법으로 근사화 할 경우 $\rho=10^{-4}$ 에서 루우프 전달회복이 일어남을 알 수 있다. 이때 LQR이득 K_c 는

$$K_c = [3.182 \times 10^2, 1.8983 \times 10^3, 1.5811 \times 10^3]$$

이다.

4. 결론

본 논문에서는 비 최소위상 플랜트에 대하여 LQG/LTR을 적용할 수 없다는 이론적 제한성을 해결하기 위하여 플랜트의 영점구조를 이용한 새로운 근사 방법을 제안 하였다. 근사화 과정에서 발생하는 근사화 오차를 최소화 하기 위한 매개변수의 설정 방법이 제안 되었으며 제안된 방법의 타당성을 보이기 위한 예를 보였다. 이론적으로는 시간영역과 주파수 영역에서 특히 주파수인 극점 주파수 및 영점주파수에 대하여 본 논문에서 제안된 방법이 원래의 비 최소위상 플랜트와 같은 응답특성을 갖게됨을 보였고 예제를 통하여 타당성을 입증하였다. 또한 LTR을 적용하였을 경우에도 LTR오차가 0이되며 정확한 LTR이 일어남을 보여 목표루우프가 갖는 안정도 강인성 및 성능 강인성을 회복함을 보였다. 그러나 근사화 과정에서 일반 주파수에 대한 응답 특성에 대한 분석이 연구되어야 할 과제이다.

5. 참고문헌

- [1] B.D.O. Anderson and J.B. Moore, "Linear Optimal Control : Linear Quadratic Methods", Englewood Cliffs, NJ: Printice-Hall, 1990
- [2] M.G. Safanov and M. Athans, " Gains and phase margin for multiloop LQG regulators." IEEE Trans. Automat. contr., vol. AC-22, pp. 173-179, Apr. 1977.
- [3] N.A.Letomaki, N.R. Sandell, Sr., and M. Athans. " Robustness results in linear quadratic Gaussian based multivariable control designs." IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-26, pp 75-93, Feb. 1981.
- [4] J. C. Doyle. " Robustness with observers." IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-24, pp 607-611
- [5]. J.C. Doyle and G. Stein, "Multivariable Feedback Design : Concept for Classical Mordern Synthesis," IEEE Trans. Auto. Contr., Vol.AC-26, 1981
- [6]. Kwakernaak, H., and Sivan, P., 'Linear Optimal Control Theory', Wiley-Interscience, 1972
- [7] F.R. Gantmacher, " Matrix Theory." Chelsea Publishing Company, 1960
- [8] Gene H. Golub and Chartes F. Van Loan. " Matrix Computation." The Johns Hopkins University Press., Baltimore, Maryland, 1983
- [9]. M. Athans and G. Stein, " The LQG/LTR Procedure for Multivariable Feedback Control Design," IEEE Trans. Auto. Contr., Vol.AC-32, No.2, Feb. ,1987
- [10] H.H. Rosenbrock, " State-space and Multivariable Theory. " Wiley, New York, 1970
- [11] A.G.J. Macfarlane, N. Karcnias, " Poles and zeros of linear multivariable theory. Int. J. Control 24(1), 1976, pp 33-74