

다변수 계통에 대한 출력궤환 가변구조 제어계에 관한 연구

이 기 상 오 동 식

단국대학교 공과대학 전기공학과

Design of the output feedback variable structure control system for multivariable system

Kee-Sang Lee Dong-Sik Cho
Dept. of electrical Eng.
Dankook University

ABSTRACT

Recently, an output feedback variable structure control scheme (OFVSCS) is proposed to remove the assumption of full state availability and to make the application of VSC scheme to the high order systems with unmeasurable state variables possible. In this paper, a design method of an output feedback variable structure control system (IOFVSCS) that guarantees the invariance of the sliding mode against process parameter variation and external disturbance is proposed. The IOFVSCS is composed of two components: dynamic switching surface driven by measured I/O informations and switching control input generator driven by switching surface information and measured output, where the two components are constructed by adopting unknown vector modelling approach. The invariance condition for the IOFVSCS is proved to be the same as that of the conventional VSCS. Simulation results show that the IOFVSCS can be designed to have robust properties better than that of the conventional VSCS in spite that the IOFVSCS is driven by small amount of measured information.

1. 서론

가변구조제어계(variable structure control system, VSCS)는 슬라이딩 모드에서 프로세스의 파라미터 변화 및 외란에 둔감한 특성을 갖고 있어 각종 서어보 제어에 적극적으로 도입되고 있다. 그러나 VSCS에 대한 대부분의 연구결과는 스위칭 평면과 스위칭 입력의 결정을 위해 모든 상태변수의 측정을 전제하고 있다. 이 전제조건은 측정 불가능한 변수를 가진 계통, 고차계통 등에 대한 가변구조제어(variable structure control, VSC)기법의 적용을 불가능하게 하는 요인이 되고 있다. 이 문제는 VSC기법의 적용범위 확장을 위해 시급히 해결 해야할 과제로서 이미 1983년 Utkin 등에 의해 언급된 바 있지만 Decarlo의 지적처럼 최근까지도 그 해결책이 제시되지 못하고 있는 실정이다. [1][2] 이 문제의 해결을 위한 소수의 연구결과가 보고된 바 있으나 [3][4] 이들 기법은 실제적 응용과 이론적 확장을 기대하기 어려운 실정이다. 최근 Lee 등은 위의 전제조건을 제거하는 동시에 모든 선형계통에 적용이 가능한 출력궤환 가변구조제어계(output feedback variable structure control system, OFVSCS)를 제안하고 그 타당성을 보인 바 있다. [5][6] 이 OFVSCS는 측정입출력변수만에 의해 구동되는

동적스위칭평면과 측정출력 및 스위칭 평면 정보에 의해 결정되는 입력으로 구성되었으며 측정정보만을 이용함에도 불구하고 기존의 VSCS와 동등한 제어성능을 갖도록 설계될 수 있다. 그러나 모든 VSCS에서 어느정도 이상의 외란 또는 파라미터 변화가 발생한 경우 상태궤적은 슬라이딩 모우드를 이탈하여 정상상태 편차 또는 전 제어계의 불안정을 초래할 수 있도 있으며 따라서 VSCS의 실질적 적용을 위해서는 측정 불가능한 외란 및 파라미터 변동이 발생한 경우에도 슬라이딩 모우드의 불변성이 보장되어야 한다. 본 연구에서는 모든 상태의 가용성에 대한 해결책으로서 참고문헌[5]에 제안된 OFVSCS에 대하여 외란 및 파라미터 변화 발생시 슬라이딩 모우드의 불변성을 보장하기 위한 불변성 설계(Invariant design)방법을 제시함으로써 OFVSCS의 실질적 적용을 가능케 함에 그 목적을 두었으며 이를 위해 먼저 동적스위칭평면과 출력궤환입력으로 구성된 OFVSCS에 대하여 간단히 기술하고 이를 기준으로 하여 불변성 조건과 그 설계방법을 제시하기로 하였다.

2. 출력궤환 가변구조제어계(OFVSCS)의 기본설계

OFVSCS는 전술한 바와 같이 측정입출력에 의해 구동되는 동적스위칭평면과 출력 및 스위칭평면 정보에 의해 결정되는 제어입력으로 구성되며 그 기본적 설계과정을 요약하면 다음과 같다.

2.1 동적 스위칭 평면의 설계

다음의 선형 시불변계를 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{2.1}$$

여기서 $x \in R^n, u \in R^m, C \in R^q$ 이고 A, B, C 는 각각 $(n, n), (n, m), (q, n)$ 차원의 행렬이다. 전개의 편이상 위의 계통은 완전가제어, 완전 가관측이라 가정한다. OFVSCS를 위한 동적스위칭평면은 다음과 같이 정의되며

$$D = Ly + Qz \tag{2.2a}$$

$$\dot{z} = Fz + Jy + Gu \tag{2.2b}$$

여기서 L, Q 는 $(m, q), (m, m)$ 차원의 행렬이고 z 는 정상상태에서 $z = Tx$ 이며 $[C|A]$ 의 가관측 지수가 r 이라 할때 식(2.3)

을 만족하는 α 차원의 벡터이다. [7] 또한 F, J, G는 각각 $(\alpha, \alpha), (\alpha, q), (\alpha, m)$ 차원의 행렬이다.

$$\frac{(n-q)m}{q+m-1} \leq \alpha \leq m(r-1) \quad (2.3)$$

동적 스위칭 평면의 설계과정은 다음과 같다.

(step 1) 기준 스위칭 함수로서 식(2.4)의 동적 스위칭 함수를 설계

$$s(x) = Px \quad (2.4)$$

(step 2) 식(2.2)의 동적스위칭 함수가 $s(x)$ 에 점근적으로 수렴하기위한 다음 조건을 만족하도록 각 파라미터 행렬을 결정

$$LC + QT = P \quad (2.5a)$$

$$TA - JC = FT \quad (2.5b)$$

$$G = TB \quad (2.5c)$$

$$\text{Re}[\lambda_i(F)] \ll 0 \quad (i = 1, 2, \dots, \alpha) \quad (2.5d)$$

식(2.5)의 조건이 만족된경우 z 와 Tx 의 편차를 식(2.6)으로 정의하면

$$e = Tx - z \quad (2.6)$$

편차는 다음식에 의해 지배된다.

$$\dot{e} = Fe \quad (2.7)$$

각 파라미터의 결정 알고리즘은 [8]에 자세히 기술되었으므로 본고에서는 이를 생략하였다.

2.2 출력궤환 제어입력

2.1절에서 구해진 동적스위칭평면과 함께 완전한 OFVSCS를 실현해줄 수 있는 한 가지 출력궤환 제어입력은 다음과 같다.

$$u = -[k_y y + k_z z] - k_d(PB)^{-1}D / \|D\|^2 \quad (2.8)$$

($k_d > 0$)

이 제어입력이 식(2.2)의 동적스위칭평면상에서 슬라이딩 모우드 발생을 보장하기 위해서는 이득 $[k_y \ k_z]$ 가 다음정리를 만족하도록 결정되어야 한다.

(정리 1) $k_y C = (PB)^{-1}(PA - QFT) \quad (2.9)$

$$k_z = (PB)^{-1}QF \quad (2.10)$$

을 만족하는 k_y, k_z 가 존재하면 식(2.11), (2.2) 및 식(2.8)로 구성된 OFVSCS는 슬라이딩 모우드의 존재조건 $D^T \dot{D} < 0$ 을 만족한다.

(증명)식(2.9), (2.10)을 식(2.8)에 대입하고 이를 식(2.1), (2.2)에서 구해진 D식에 대입한 다음 식(2.5)의 조건을 도입하여 정리하면 식(2.11)의 $D^T \dot{D}$ 가 얻어진다.

$$D^T \dot{D} = -k_d \quad (2.11)$$

위에서 $k_d > 0$ 이므로 $D^T \dot{D} < 0$ 이다.

위의 정리는 식(2.9), (2.10)을 만족하는 해 k_y, k_z 가 존재하는 한 식(2.8)의 입력이 제한된 OFVSCS의 슬라이딩 모우드 발생을 보장함을 입증한 것이다. 그러나 출력행렬 C가 역행렬을 갖지 못하기 때문에 식(2.9)의 정확한 해는 매우 까다로운 조건하에서만 존재한다. 따라서 본절에서는 k_y, k_z 에 대한 정확한 해, 근사해를 구하기 위한 방법을 제시하고 근사해를 사용한 경우에도 식(2.8)내의 이득 k_d 를 조정함으로써 슬라이딩 모우드의 발생이 보장됨을 보이기로 한다.

(a) 정확한 해

$$k_y = (PB)^{-1}(PA - QFT)C^* \quad (2.12)$$

$$k_z = (PB)^{-1}QF \quad (2.10)$$

여기서 C^* 는 식(2.13)의 의사역행렬이다.

$$C^* = (CTC)^{-1}CT \quad (2.13)$$

식(2.12)의 해는 C^* 이 유일하지 않기 때문에 반드시 식(2.9)에 대입하여 식(2.9)의 만족여부를 확인하여야 한다. 그러나 불행히도 식(2.12)가 식(2.9)를 만족하는 경우는 매우 드물다. [9]

(b) 근사해

한가지 근사해는 식(2.8)에서 z 와 Tx 의 과도편차를 무시한 상태에서 $z = Tx$ 라고 가정하여 다음식을 만족하는 k_y, k_z 를 구하는 것이다.

$$k_y C + k_z T = (PB)^{-1}PA \quad (2.14)$$

이 근사해는 $\text{rank}[(C;T)^T] \leq n$ 인 경우

$$[k_y \ k_z] = (PB)^{-1}PA \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix}^* \quad (2.15)$$

$\text{rank}[(C;T)^T] = n$ 인 경우

$$[k_y \ k_z] = (PB)^{-1}PA \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.16)$$

로 구해진다. 그러나 식(2.15)는 정확한 해와 관련하여 언급한 바와 같이 식(2.14)를 만족하는 경우에 한해 사용할 수 있음에 유의해야 한다. 한편 식(2.16)은 $m(r-1) \geq (n-q)$ 인 경우 항상 구해지는 유일해이므로 OFVSCS에 효과적으로 이용될 수 있다. 일반식(2.14)를 만족하는 $[k_y \ k_z]$ 가 구해진 경우 식(2.8)의 제어입력은 식(2.17)과 동치로 되며

$$u = -(PB)^{-1}PAx + k_z e - k_d(PB)^{-1}D / \|D\|^2 \quad (2.17)$$

이를 이용하여 $D^T \dot{D}$ 를 구한결과는 다음과 같다.

$$D^T \dot{D} = D^T(PBk_z - QF)e - k_d \quad (2.18)$$

따라서 슬라이딩 모우드의 존재조건은

$$D^T(PBk_z - QF)e < k_d \quad (2.19)$$

로 되며 여기서 $\|D\|$ 는 제한되고 $e(t)$ 는 F의 고유치를 부의 큰 실수부로 선정하여 급속히 감소시킬 수 있으므로 $D^T D < 0$ 은 k_d 를 어느정도 증가시킴으로써 쉽게 만족될 수 있다.

3 불변성 출력궤환 가변구조 제어계(IOFVSCS)의 설계

상태궤환 가변구조제어계에 의한 불변성 설계기법은 이미 여러가지가 제안된 바 있다. 그 중 가장 기본적인 방법은 구동장치 또는 입력 구동용 서어보 기구의 출력을 이용한 국부궤환 기법과 [10][1] 외란 추정기를 삽입하고 그 추정결과를 근거로 외란효과 상쇄를 위한 별도의 입력을 발생시키는 방법이며 그 밖에도 일반 선형제어이론에서 개발된 불변성 이론을 이용한 기법들이 있다. [11] 본 절에서는 2절에서 기술한 OFVSCS에 대하여 외란 및 파라미터 변화에 대한 슬라이딩 모우드의 불변성을 보장하기 위한 설계기법을 제안한다.

3.1 IOFVSCS을 위한 프로세스 모델링

외란 및 파라미터 변화를 포함한 다음의 프로세스 모델을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + \Delta A)x + (B + \Delta B)u + Ef \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (3.1)$$

위에서 $f \in R^1$ 는 외란벡터이고 $E \in R^{(n,1)}$ 이며 $\Delta A, \Delta B$ 는 A, B와 같은 차원을 갖는 파라미터 섭동행렬이다. 파라미터 변화와 외란을 함께 처리하기 위해 식(3.2)를 정의하면

$$HW = \Delta Ax + \Delta Bu + Ef \quad (3.2)$$

식(3.1)은 식(3.3)으로 된다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + HW \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (3.3)$$

위에서 $W \in R^1, H \in R^{(n,1)}$ 이라 가정한다.

본 연구에서 제안하고자 하는 불변성 설계방법은 미지벡터 모델링 기법에 근거 한다. 이 미지벡터 모델링 기법은 일반 선형제어이론에서 외란처리를 위해 널리 사용되고 있고 [12]에 자세히 수록되어 있으므로 본 절에서는 그 결과만을 이용하기로 하겠다. 편의상 미지벡터 $W = [w_1, w_2, \dots, w_1]^T$ 의 각 요소가 다음의 동태방정식으로 표현된다고 가정한다.

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_i &= M_i \eta_i \\ w_i &= N_i \eta_i \end{aligned} \quad (3.4)$$

여기서 $\eta_i \in R^{k_i}, M_i \in R^{(k_i, k_i)}, N_i \in R^{(1, k_i)}$, 이며 k_i 및 M_i 의 요소는 미지변수의 예상되는 파형에 따라 결정되고 $N_i = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$ 이다. 따라서 1차원 벡터 W 에 대한 모델은 다음과 같다

$$\dot{\eta} = M\eta \quad (3.5a)$$

$$W = N\eta \quad (3.5b)$$

η 는 $k = \sum k_i$ 차원의 벡터이고 $M \in R^{(k, k)}, N \in R^{(1, k)}$ 로서 다음과 같이 표현된다.

$$M = \text{Bloc. diag}[M_1, M_2, \dots, M_1] \quad (3.6)$$

$$N = \text{Bloc. diag}[N_1, N_2, \dots, N_1] \quad (3.7)$$

이제 식(3.5)를 식(3.3)에 결합하면 다음의 확장된 프로세스 모델이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \\ y &= \bar{C}\bar{x} \end{aligned} \quad (3.8)$$

여기서 $\bar{x} \in R^{n+k}, \bar{A} \in R^{(n+k, n+k)}, \bar{B} \in R^{(n+k, m)}, \bar{C} \in R^{(q, n+k)}$ 이며 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ 는 다음과 같다.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & HN \\ 0 & M \end{bmatrix} \quad (3.9a)$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.9b)$$

$$\bar{C} = [C \ 0] \quad (3.9c)$$

3.2 불변성 출력궤환 가변구조제어계(IOFVSCS)를 위한 동적 스위칭평면

제안된 동적스위칭평면은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{D} &= \bar{L}y + \bar{Q}z \\ \dot{\bar{z}} &= \bar{F}\bar{z} + \bar{J}y + \bar{G}u \end{aligned} \quad (3.10)$$

위의 스위칭 평면 설계과정의 첫단계는 외란 및 파라미터 변화를 고려하지 않은 상태에서 식(2.4)의 정적 스위칭 평면을 설계하고 그 결과를 식(2.8)의 파라미터로 표현하면 다음과 같다.

$$s(\bar{x}) = s(x) = Px = [P \ 0] \begin{bmatrix} x \\ \eta \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

이제 식(3.10)의 설계는 외란이 투입된 상태에서 식(3.10)의 D가 $s(x)$ 에 수렴하도록 각 파라미터 행렬을 결정하는 것이며 식(3.10)이 식(3.11)에 수렴하기 위한 파라미터의 결정조건은 다음과 같다.

$$\bar{L}\bar{C} + \bar{Q}\bar{T} = \bar{P} \quad (3.12a)$$

$$\bar{T}\bar{A} - \bar{J}\bar{C} = \bar{F}\bar{T} \quad (3.12b)$$

$$\bar{G} = \bar{T}\bar{B} \quad (3.12c)$$

$$\text{Re}[\lambda_i(\bar{F})] < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, \alpha) \quad (3.12d)$$

식(3.12)를 식(3.3)의 파라미터로 구한결과는 다음과 같다.

$$(3.12a) \Rightarrow \begin{cases} \bar{L}\bar{C} + \bar{Q}\bar{T}_1 = \bar{P} \\ \bar{Q}\bar{T}_2 = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

$$(3.12b) \Rightarrow \begin{cases} \bar{T}_1\bar{A} - \bar{J}\bar{C} = \bar{F}\bar{T}_1 \\ \bar{T}_1\bar{H}N + \bar{T}_2\bar{M} = \bar{F}\bar{T}_2 \end{cases} \quad (3.14)$$

$$(3.12c) \Rightarrow \bar{G} = \bar{T}_1\bar{B} \quad (3.15)$$

위의 조건이 만족되도록 각 파라미터를 결정한 경우 정상상태에서는

$$\bar{z} = \bar{T}\bar{x} = [\bar{T}_1 \ \bar{T}_2] \begin{bmatrix} x \\ \eta \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

이며 편차는 식(3.17)로 정의할때

$$\bar{e} = [\bar{T}_1 x + \bar{T}_2 \eta] - \bar{z} \quad (3.17)$$

이 편차는 식(3.18)에 의해 지배된다.

$$\dot{\bar{e}} = \bar{F}\bar{e} \quad (3.18)$$

3.3 IOFVSCS를 위한 출력궤환 제어입력

본 절에서 제안하는 출력궤환 제어입력의 형태는 식(3.19)와 같다.

$$u = -[k_{yy} + k_z \bar{z}] - k_d(\bar{P}\bar{B})^{-1}\bar{D}/\|\bar{D}\|^2 \quad (3.19)$$

위에서 $\bar{P}\bar{B} = [P; 0] \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} = PB$ 이므로 식(3.19)는

식(3.20)으로 표현된다.

$$u = -[k_{yy} + k_z \bar{z}] - k_d(PB)^{-1}\bar{D}/\|\bar{D}\|^2 \quad (3.20)$$

위의 제어입력이 식(3.3), (3.10)으로 구성된 제어계에 대하여 슬라이딩 모우드의 존재를 보장함을 다음정리에 보였다.

(정리 2)식(3.21), 식(3.22)를 만족하는 k_y, k_z 가 존재하면 식(3.3), (3.10), (3.20)으로 구성된 제어계는 슬라이딩 모우드의 존재조건 $\bar{D}^T \bar{D} < 0$ 을 만족한다.

$$k_y \bar{C} = (PB)^{-1}[(PA - \bar{Q}\bar{F}\bar{T}_1) ; (PHN - \bar{Q}\bar{F}\bar{T}_2)] \quad (3.21)$$

$$k_z = (PB)^{-1}\bar{Q}\bar{F} \quad (3.22)$$

(증명) 식(3.21), (3.22)를 식(3.20)에 대입하면 다음과 같다

$$u = -(PB)^{-1}[(PA - \bar{Q}\bar{F}\bar{T}_1)x + (PHN - \bar{Q}\bar{F}\bar{T}_2)\eta + \bar{Q}\bar{F}\bar{z} + k_d \bar{D}/\|\bar{D}\|^2] \quad (3.23)$$

식(3.3)과 식(3.10)에서 $\dot{\bar{D}}$ 를 구하면 식(3.24)이 얻어진다.

$$\dot{\bar{D}} = (\bar{L}CA + \bar{Q}\bar{J}C)x + \bar{L}CHW + \bar{Q}\bar{F}\bar{z} + (\bar{L}CB + \bar{Q}\bar{G})u \quad (3.24a)$$

위식에 $\bar{e} = (\bar{T}_1 x + \bar{T}_2 \eta) - \bar{z}$ 를 대입하면

$$\dot{\bar{D}} = (\bar{L}CA + \bar{Q}\bar{J}C + \bar{Q}\bar{F}\bar{T}_1)x + (\bar{L}CHN + \bar{Q}\bar{F}\bar{T}_2)\eta - \bar{Q}\bar{F}\bar{e} + (\bar{L}CB + \bar{Q}\bar{G})u \quad (3.24b)$$

여기에 다시 (3.13), (3.14), (3.15)를 대입하면

$$\dot{\bar{D}} = PAx + (\bar{L}CHN + \bar{Q}\bar{F}\bar{T}_2)\eta - \bar{Q}\bar{F}(\bar{T}_1 x + \bar{T}_2 \eta - \bar{z}) + PBu \quad (3.24c)$$

식(3.24)에 식(3.23)을 대입하고 정리하면 식(3.25)가 얻어지고

$$\dot{\bar{D}} = -k_d \bar{D}/\|\bar{D}\|^2 \quad (k_d > 0) \quad (3.25)$$

따라서 $\bar{D}^T \dot{\bar{D}} < 0$ 은 항상 만족된다.

제한된 OFVSCS의 불변성을 보이기 위한 또하나의 과정은 슬라이딩 모우드내에서 프로세스의 모든 상태가 파라미터 변화 및 외란의 영향을 받지않음을 입증하는 것으로 동가제어계 방정식을 구함으로써 쉽게 수행될 수 있으며 이를 정리

한 결과를 (정리 3)에 기술했다.

(정리 3) 식(3.1)의 계통 방정식과 정적 스유허평면행렬 P가

$$[I - B(PB)^{-1}P]H = 0 \quad (3.26)$$

을 만족하면 식(3.1), (3.12), (3.20)의 제어입력으로 구성된 제어계에 대한 동가제어계 방정식은 식(3.27)로 되고 따라서 이 OFVSCS는 식(3.2)의 외란 및 파라미터 변화에 대해 불변인 특성을 가진다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\bar{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [I - B(PB)^{-1}P]A & B(PB)^{-1}\bar{Q}\bar{F} \\ 0 & \bar{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \bar{e} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

(증명) 식(3.23)에서 u_{eq} 를 구하고 이를 식(3.3)에 대입한 다음 식(3.12) 또는 식(3.13)에 식(3.15)와 식(3.17), (3.18)의 편차 방정식을 도입하고 정리한다음 식(3.26)의 불변성 조건을 이용하면 식(3.27)의 동가제어계가 얻어진다. ///

식(3.26)은 기존의 상태궤환 가변구조제어이론에서 잘 알려진 불변성 조건이다. 위의 정리와 관련하여 주목해야할 사실은 제한된 OFVSCS가 매우 제한된 측정정보만을 이용함에도 설계의 첫단계에서 얻어지는 행렬 P가 이 조건을 만족하는 한 슬라이딩 모우드의 불변성이 보장된다는 점이다.

3.4 출력궤환 이득 $[k_y \ k_z]$ 의 결정

이제까지의 논의는 식(3.21), (3.22)를 만족하는 해 k_y, k_z 가 존재한다는 가정하에 전개된 것이다. 그러나 정확한 해는 많은 경우 존재하지 않는다. 따라서 본 절에서는 정확한 해와 함께 근사해법에 관해 기술하기로 한다.

(a) 정확한 해

정확한 해의 형태는 다음식과 같다.

$$k_y = (PB)^{-1}[(PA - \bar{Q}\bar{F}\bar{T}_1) ; (PHN - \bar{Q}\bar{F}\bar{T}_2)]\bar{C}^* \quad (3.28)$$

그러나 \bar{C}^* 는 유일하지 않으므로 식(3.28)이 식(3.21)을 만족하는 경우는 많지않다. 따라서 식(3.28)의 해는 식(3.21)을 만족하는 경우에 한해서만 사용될수있다.

(b) 근사해

식(3.28)이 식(3.21)을 만족하지 않을 경우에는 다음에 설명하는 근사해를 사용할 수 있다. 이 근사해는 일반적으로

$$m(r'-1) > (n+k-q) \quad (3.29)$$

(단, r' 는 $[\bar{C} ; \bar{A}]$ 의 가관측지수)

를 만족하고 따라서 $\text{rank}(\bar{T}) = n+k-q$ 가 성립되는 많은 경우에 사용될 수 있다. 여기서 \bar{T} 에 관한 계수조건은 행렬 \bar{T} 에서 $(n+k-q)$ 개의 독립된 행으로 구성된 $(n+k-q, n+k)$ 차원의 행렬로 가정한다. 이 경우에는 식(3.30)을 만족하는 k_y, k_z 를 사용한다.

$$[k_y \ k_z] \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{T} \end{bmatrix} = (\bar{P}\bar{B})^{-1}\bar{P}\bar{A} = (PB)^{-1}[PA ; PHN] \quad (3.30)$$

위에 기술된 조건에서 $\text{rank}[(\bar{C}; \bar{T})^T] = n+k$ 이므로 식(3.30)의 해는 다음과 같이 주어진다.

$$[k_y \ k_z] = (PB)^{-1}[PA \ ; \ PHN] \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{T} \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.31)$$

식(3.30)에서 $\bar{C} = [C \ ; \ 0]$, $\bar{T} = [\bar{T}_1 \ \bar{T}_2]$ 이므로 식(3.31)은 명백히 다음조건을 만족한다.

$$k_y C + k_z \bar{T}_1 = (PB)^{-1}PA \quad (3.32a)$$

$$k_z \bar{T}_2 = (PB)^{-1}PHN \quad (3.32b)$$

따라서 식(3.31)의 이득행렬을 포함한 제어입력은 다음식과 동치이다.

$$u = -(PB)^{-1}[PA + PHN\eta] + k_z \bar{e} - k_d(PB)^{-1}\bar{D}/\|\bar{D}\|^2 \quad (3.33)$$

슬라이딩 모우드의 존재조건 $\bar{D}^T \dot{\bar{D}} < 0$ 의 만족여부를 고찰하기 위해 식(3.33)을 식(3.24a)에 대입하면

$$\dot{\bar{D}} = \bar{Q}\bar{T}_2 M \eta + (PBk_z - \bar{Q}\bar{F})\bar{e} - k_d \bar{D}/\|\bar{D}\|^2 \quad (3.34)$$

위식에 식(3.13)을 적용하면 $\bar{Q}\bar{T}_2 M = 0$ 이므로 $\bar{D}^T \dot{\bar{D}}$ 는 식(3.35)와 같이 구해진다.

$$\bar{D}^T \dot{\bar{D}} = \bar{D}^T (PBk_z - \bar{Q}\bar{F})\bar{e} - k_d \quad (k_d > 0) \quad (3.35)$$

위에서 $\|\bar{D}\|$, $\|\bar{e}\|$ 는 모두 제한되므로 k_d 를 어느정도 증가시키면 $\bar{D}^T \dot{\bar{D}} < 0$ 은 쉽게 만족된다. 이 근사해에 근거한 제어입력을 도입한 경우 계통특성 고찰을 위해 식(3.33)을 식(3.3)에 대입하면

$$\dot{\hat{x}} = [I - B(PB)^{-1}P]Ax + [I - B(PB)^{-1}P]HW + Bk_z \bar{e} - k_d \bar{D}/\|\bar{D}\|^2 \quad (3.36)$$

으로되고 여기서 $\bar{e} = \bar{F}\bar{e}$ 이다.

따라서 불변성 조건인 식(3.26)이 만족되면 제어계는 식(3.2)로 정의된 외란 및 파라미터 변화에 둔감한 특성을 갖는다.

4. 수치예

이상에서 논의된 출력궤환 가변구조제어입력의 타당성을 입증하기 위해 $\dot{\hat{x}} = Ax + Bu$ 로 표현되며 다음의 파라미터를 갖는 다변수계통을 고려한다.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

이계통에 대한 정적스위칭함수는 슬라이딩 모우드에서 감소 차수 모델이 -5 와 -6을 갖도록 다음과 같이 선정했다.

$$s = Px$$

$$p = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 7.0344 & 20.2605 \\ 1 & 0 & -4.0171 & -10.1268 \end{bmatrix}$$

3.1절에서 언급한 확장계통은 다음과 같다.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

이 확장계통에 대한 정적스위칭함수와 고유치 -8을 갖는 동적스위칭함수는 다음과 같다.

$$\bar{s} = \bar{P}\bar{x}$$

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 7.0344 & 20.2605 & 0 \\ 1 & 0 & -4.0171 & -10.1268 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{D} = \bar{L}y + \bar{Q}\bar{z}$$

$$\bar{z} = \bar{F}z + \bar{J}y + \bar{G}u$$

$$\bar{L} = \begin{bmatrix} -450.141 & 1 & 76.518 \\ 257.091 & 0 & -42.263 \end{bmatrix} \quad \bar{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \quad \bar{J} = \begin{bmatrix} 3158 & -444.141 \\ -1793 & 252.074 \end{bmatrix}$$

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} -0.005 & 451.144 \\ 0 & -256.091 \end{bmatrix}$$

제어입력은 3.4절에서 설명한 다음과 같은 근사적 해를 사용하였다.

$$u(t) = -[k_y y + k_z \bar{z}] - (\bar{P}\bar{B})^{-1}k_d \bar{D}/\|\bar{D}\|^2$$

$$[k_y \ k_z] = \begin{bmatrix} -5652 & 12.074 & 168.148 & 1572 & 2747 \\ 644.09 & -5.017 & -80.013 & 0.003 & 2.527 \end{bmatrix}$$

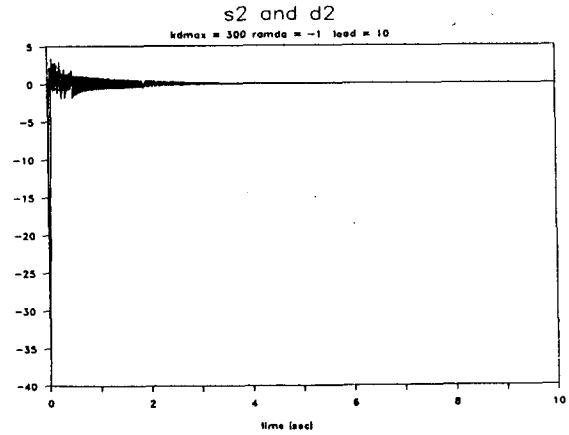
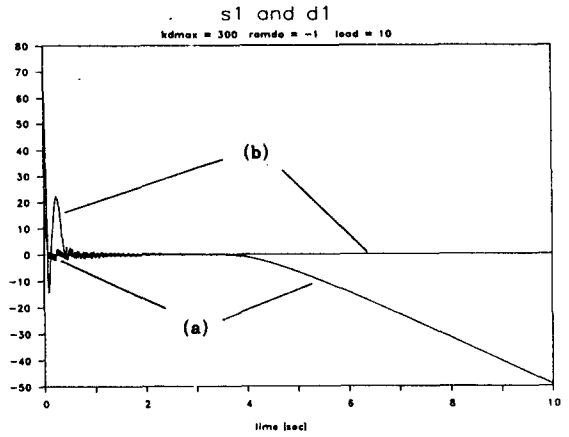
시뮬레이션은 상태궤환 가변구조제어(a)와 출력궤환 가변구조제어계에 대하여 수행하였고 제어목적은 편차의 레귤레이션이다. 그림1은 각각의 파라미터에 $1+0.1\sin 5t$ 를 곱하고 외란 10을 인가한 경우 x_4 에 대한 시간궤적이다. 4차계의 경우 상평면궤적의 작성이 불가능하므로 시간에 따른 스위칭함수의 궤적을 그림2에 보였다. 그림 1,2에 보인 바와같이 동적스위칭함수를 사용한 경우 외란과 파라미터의 변화에 둔감한 특성을 보이고 있다.

5. 결론

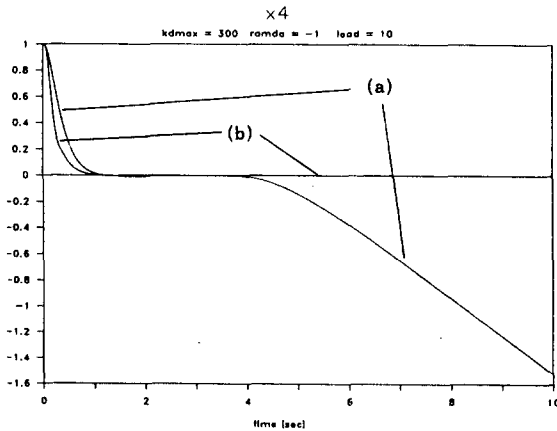
본 연구에서는 기존의 VSCS의 문제점인 모든 상태변수의 가용성에 대한 전제조건을 제거하기 위하여 제안된 출력궤환 가변구조제어계의 실질적 적용을 가능케 하기 위하여 외란 및 파라미터 변화가 발생한 경우에도 슬라이딩 모우드의 불변성을 보장할 수 있는 불변성 출력궤환 가변구조제어계(1OFVSCS)의 설계방안을 제시하고 그 유용성을 보였다. 제안된 1OFVSCS는 미지벡터 모델링 기법에 근거하여 설계되며 매우 제한된 측정 정보만을 이용함에도 불구하고 기존 VSCS이론에서 잘 알려진 불변성 조건을 만족하는 한 외란 및 파라미터 변화에 대해 매우 강인한 특성을 가진다.

6. 참고 문헌

- [1]V. I. Utikin, "Variable structure system: present and future", automat. Remote control, Vol. 45, 1984, pp1105-1120
- [2]R. A. Decarlo et. al., "Variable structure control of nonlinear multivariable system: A Tutorial", IEEE proc. vol. 76, No. 3. march, 1988, pp212-232.
- [3]B. A. White, "Reduced order switching function in variable structure control system", IEE proc., Vol. 130, No. 2, March, 1983, pp33-40
- [4]H. Y. CHUN et. al., " Position control of brushless DC motor using variable structure ", 90 IPEC - Tokyo , pp 978-984
- [5]이기상, 조동식, "출력궤환 가변구조제어에 관한 연구", 제어계측연구회 합동학술발표회 논문집, pp 101-105, 1991.
- [6]K. S. Lee et al., "A new dynamic switching function for output feedback variable structure control", Trans. of KIEE, Vol. 40, No. 7, pp 706-717, July
- [7]M. S. santana et al., "New algorithms for minimal - order observer - controller design", proceeding of the 25th conference on design and control, pp 1127-1128, 1986
- [8]P. Murdoch, "Observer design for a linear functional of statevector", IEEEtrans. automat. control, AC-16, 1973, pp308-310.
- [9]M. Munro, "Further results on pole-shifting using output feedback", Int. J. Control, 1974, Vol. 20, No. 5, pp775-786
- [10]U. Itkis, "Control system of variable structure", John wiley & Sons, 1976.
- [11]O. M. E. El-Ghezawi, et al., "Analysis and design of variable structure systems using a geometric approach," Int. J. contr., vol. 38, no. 3, pp. 657-671, 1983
- [12]C. D. Johnson, "Theory of disturbance - accommodating controllers", Control and dynamic systems, vol. 12, pp387-489.



[그림 2] 스위칭 함수의 시간궤적
(a) 상태궤환의 경우 (b) 출력궤환의 경우



[그림 1] x_4 에 대한 시간궤적
(a) 상태궤환의 경우 (b) 출력궤환의 경우