'91 韓國自動制御學術會議論文集 1991. 10.22~24

힘 타원을 이용한 다중 협력 작업 로봇의 최적 부하 분배에 관한 연구

서 창 원* 최 명 환 조 혜 경 이 범 희 고 명 삼

자동화 시스템 공동 연구소, 서울대학교 공과대학 제어계측공학과

An Application of the Force Ellipsoid to the Optimal Load Distribution of Cooperating Robots

Chang-Won Suh, Myoung-Hwan Choi, Hye-Kyung Cho, Bum-Hee Lee, Myung-Sam Ko

Automation and Systems Research Institute, Dept. of Control & Instrumentation Eng., Seoul National University

Abstract

The manipulability ellipsoid and the force ellipsoid for a single robot are extended to the case of a multi-robot system. The force ellipsoid is applied to solve the optimal load distribution for the multi-robot system. Two cases are considered in solving the optimal load distribution. In one case, there are no constraints on the joint torques, and the analytic solution is given. In the other case, the torque constraints are given in terms of the maximum power consumption, and the algorithm for the solution is proposed.

I 서 론

최근 들어와서 다중 로봇에 대한 연구가 활발해지고 있다. 작업을 수행하는데 있어서 다중 로봇에 의한 공동 작업은 기존의 단일 로봇으로 수행할 수 없었던 많은 일들을 가능하게 한다. 부피가 크고 무거워서 단일 로봇으로 잡을 수 없는 물체를 이동시키는 경우나, 부품을 조립하는데 있어서 지그(jig)나 고정틀(fixture)을 사용하지 않는다는지 하는 것이 그 예가 될 수 있다.

조작 성능 타원(manipulability ellipsoid)과 힘타원(force ellipsoid)은 물체를 움직이는데 있어서 로봇의 조작 성능(manipulability ability)과 관련이 되어 있고 또한 두 타원은 서로간에 밀접하게 연관되어 있다[1,2]. 조작 성능 타원과 힘타원은 특이점 회피(singularity avoidance)나 여유 자유도를 가지는 로봇에 대한 최적 자세등의 해결에 이용되어 왔다. 처음에 단일 로봇에 대하여 정의되었던 조작 성능 타원과 힘타원은 두 로봇에 대하여 확장 정의되었다. 본 논문에서는 [3]에서 두 로봇에 대하여 정의된 조작 성능 타원과 힘타원의 정의를 다중 로봇에 대하여 확장하였다.

다중 로봇의 연구에서 중요한 문제 중의 하나가 부하 분배에 관한 것이다[4,5]. 부하 분배는 로봇들과 물체의 움직임(위치, 속도, 가속도)이 완전히 결정된 상태에서 그 움직임을 발생시키기 위한 관절 토오크를 구하는 것이다. 다중 로봇이 물체를 잡고 있을 때, 물체를 움직이기 위하여 발생시켜야 할 각 로봇의 토오크가 유일하지 않으므로 목적 함수와 제한 조건을 도입하여 이를 만족하는 최적해를 구한다. 최적 부하 문제를 해결하는 데 있어서 힘타원으로 표현된 로봇의 파워에 대하여 제한 조건이 없는 경우와 제한 조건이 있는 2가지 경우를 고려한다[6]. 문제의 수식화와 문제의 해결에 있어서 다중 로봇 힘타원과 단일 로봇 힘타원을 함께 이용하며 제한 조건이 없는 경우에 대하여는 최적해를 구하고 제한 조건이 있는 경우에 대하여서는 최적해를 구하는 알고리즘을 제시한다.

II 조작 성능 타원과 힘타원

관절 속도 공간 상에서의 단위 크기를 가지는 구(hyper sphere)는 자코비안 변환(Jacobian transformation)에 의하여 직교 속도 공간 상에서의 타원(hyper ellipsoid)으로 변환된다. 이를 조작 성능 타원이라 한다. 유사하게 관절 토오크 공간 상의 단위구도 자코비안 변환에 의하여 직교 좌표계의 힘 공간 상의 타원으로 변환된다. 이를 힘타원이라 정의한다. 조작 성능 타원은 단위 크기를 가지는 관절 속도 벡터(joint velocity vector)에 대응되는 직교 좌표계 상의 손끝의 속도 벡터를 나타내며 힘타원은 단위 크기를 가지는 관절 토오크 벡터(joint torque vector)에 해당하는 직교 좌표계 공간 상에서의 힘 벡터를 나타낸다. 여기서는 기존의 조작 성능 타원과 힘타원에 대하여 서술하고 그 개념을 확장시켜 다중 로봇에 대한 조작 성능 타원과 힘타원을 정의한다.

1. 단일 로봇에 대한 조작 성능 타원와 힘타원

[1,2]에서 정의된 조작 성능 타원과 힘타원을 간단히 기술한다. n개의 자유도를 가지는 로봇이 m차원의 작업 공간(work space)상에서 작업을 한다고 가정하면 조작 성능 타원과 힘타원은 아래와 같이 정의된다.

로봇에 관련된 변수를 우선 다음과 같이 정의한다.

$q \in R^n$: 관절 변수 (joint variable)
$x \in R^m$: 로봇의 손 끝의 위치 변수 (position variable)
$f \in R^m$: 로봇이 물체에 가하는 힘
$\tau \in R^n$: 관절의 힘(또는 토오크)

단위크기를 가지는 관절 속도 벡터는 $\|\dot{q}\|^2 = 1$을 만족하며 이를 자코비안 변환을 사용하여 손끝 속도 벡터에 대하여 나타내면 다음과 같다.

$$\dot{x}^T (JJ^T)^{-1} \dot{x} = 1 \qquad (1)$$

식(1)을 조작 성능 타원이라 정의하며, 또한 타원의 체적 V_{sm}은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$V_{sm} = D\, W_s \qquad (2)$$

$$D = \pi^{m/2} \; / \; \Gamma\left((m/2) + 1 \right) \qquad (3)$$

$$W_s = [\det (JJ^T)]^{1/2} \qquad (4)$$

여기서, $\Gamma(\cdot)$는 감마 함수(gamma function)

W_s는 타원 체적의 상수배되는 양으로 조작 성능 측정도(manipulability measure)라 정의한다.

힘타원도 조작 성능 타원과 유사하게 정의할 수 있다. 단위 크기를 가지는 로봇의 관절 토오크는 $\|\tau\|^2 = 1$을 만족하며 자코비안 변환에 의하여 직교 좌표 공간 상의 힘 벡터에 대한 타원으로 변환되며 아래의 식과 같이 표현된다.

$$f^T (JJ^T)\, f = 1 \qquad (5)$$

이 타원을 힘타원이라 정의한다. 힘타원의 체적 V_{sf}는 조작 성능 타원과 역수 관계에 있으며 다음 식을 만족한다.

$$V_{sf} = D \,/\, W_s \qquad (6)$$

2.다중 로봇에 대한 조작 성능 타원과 힘타원

단일 로봇(single robot)에 대하여 정의된 조작 성능 타원과 힘타원은 다중 로봇(multi-robot)에 대하여 확장하여 정의할 수 있다. 우선 다중 로봇이 하나의 물체를 잡고 있는 경우에 대하여 다음과 같은 가정을 한다.

가정 :

1) N개의 로봇이 물체와의 상대적인 움직임이 없도록 물체를 꽉 잡고 있다.

2) N개의 로봇은 특이점(singular point)를 지나지 않는다.

위의 가정 아래서 다중 로봇에 대한 조작 성능 타원과 힘타원을 다음과 같이 정의한다.

2.1 다중 로봇 조작 성능 타원

N개의 로봇의 손끝의 속도 벡터를 ${}^1\dot{x},\cdots,{}^N\dot{x}$, 관절 속도 벡터를 ${}^1\dot{q},\cdots,{}^N\dot{q}$라 하면 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned} {}^1\dot{x} &= {}^1J({}^1q)\, {}^1\dot{q} \\ &\;\vdots \\ {}^N\dot{x} &= {}^NJ({}^Nq)\, {}^N\dot{q} \end{aligned} \qquad (7)$$

또한 가정 1)에 의하여 물체의 기준점에서의 다중 로봇의 손끝 속도는 같다.

$${}^1\dot{x} = \ldots = {}^N\dot{x} \qquad (8)$$

각 로봇의 손끝 속도 벡터, 관절 속도 벡터, 자코비안 행렬로 이루어진 새로운 변수 $v, \dot{q}, J$를 아래와 같이 정의한다.

$$v = [\, {}^1\dot{x}^T \ldots {}^N\dot{x}^T \,], \quad \dot{q} = [\, {}^1\dot{q}^T \ldots {}^N\dot{q}^T \,]$$

$$J = \mathrm{diag}[\, {}^1J \ldots {}^NJ \,]$$

여기서, $v \in R^{Nm}$

$\dot{q} \in R^{Nn}$

$J \in R^{Nm \times Nn}$

식 (7)을 다음과 같이 새로이 정의한 변수들에 관한 식으로 변환시킬 수 있다.

$$v = \begin{bmatrix} {}^1\dot{x} \\ \vdots \\ {}^N\dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1J & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & {}^NJ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1\dot{q} \\ \vdots \\ {}^N\dot{q} \end{bmatrix}$$

$$= J\,\dot{q} \qquad (9)$$

R^{Nn}의 관절 공간 상의 단위구는 다음과 같이 변환된다.

$$\begin{aligned} \|\dot{q}\|^2 &= \dot{q}^T\dot{q} \\ &= v^T (J^+)^T J^+ \, v \\ &= v^T (J\, J^T)^{-1} \, v \\ &= [\, {}^1\dot{x}^T \ldots {}^2\dot{x}^T \,] \begin{bmatrix} ({}^1J\,{}^1J^T)^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & ({}^NJ\,{}^NJ^T)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1\dot{x} \\ \vdots \\ {}^N\dot{x} \end{bmatrix} \\ &= 1 \end{aligned} \qquad (10)$$

여기서 "+"는 유사 역행렬을 나타내며 $J^+ = J^T(JJ^T)^{-1}$ 이다. 가정 1)에 의하여 다중 로봇의 손끝 속도는 같으므로 그 속도를 $\dot{x}$라 하면 아래의 관계가 성립한다.

$$\dot{x} = {}^1\dot{x} = \cdots = {}^N\dot{x} \qquad (11)$$

식 (10)은 식(11)에 의하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[\, \dot{x}^T \ldots \dot{x}^T \,] \begin{bmatrix} ({}^1J\,{}^1J^T)^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & ({}^NJ\,{}^NJ^T)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \vdots \\ \dot{x} \end{bmatrix} = 1$$

$$\dot{x}^T \left[\sum_{k=1}^{N} ({}^kJ\,{}^kJ^T)^{-1} \right] \dot{x} = 1 \qquad (12)$$

식(12)를 다중 로봇의 조작 성능 타원이라 정의한다.
다중 로봇의 조작 성능 타원의 체적 V_{mm}은 다음과 같이 나타낼 수있다.

$$V_{mm} = D\, W_m$$

$$D = \pi^{m/2} \; / \; \Gamma\left((m/2) + 1 \right)$$

$$W_m = \left[\det \left(\sum_{k=1}^{N} ({}^kJ\,{}^kJ^T)^{-1} \right) \right]^{-1/2}$$

단일 로봇의 경우와 같이 W_m는 타원 체적의 상수배되는 양으로 다중로봇 조작성능측정도(multi-robot manipulability measure)라 정의한다.

2.2 다중 로봇 힘타원

N개의 로봇으로 이루어진 다중 로봇에 대하여 N개의 로봇이 동일한 물체를 잡기 위하여 가하는 직교 좌표계상의 힘벡터를 ${}^1F,\cdots,{}^NF$라 하고 이 힘을 발생시키기 위하여 필요한 관절 토오크를 ${}^1T,\cdots,{}^NT$라 정의하면 그 관계는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} {}^1T &= {}^1J^T\, {}^1F \\ &\;\vdots \\ {}^NT &= {}^NJ^T\, {}^NF \end{aligned} \qquad (13)$$

또한 N개의 로봇이 물체에 작용하는 결과적인 힘을 F라 정의한다.

$$F = \sum_{k=1}^{N} {}^kF \qquad (14)$$

F를 T에 관해 나타내기 위해 자코비안 행렬의 전치 행렬의 유사 역행렬을 다음과 같이 정의한다.

$$(J^T)^{\#} = (JJ^T)^{-1}J$$

각 로봇의 힘은 위에서 정의한 $(J^T)^{\#}$에 의하여 관절 토오크로 나타낼 수 있다.

$${}^1F = ({}^1J^T)^{\#}\ {}^1T$$

$$\vdots$$

$${}^NF = ({}^NJ^T)^{\#}\ {}^NT \qquad (15)$$

식 (15)를 사용하여 합성 힘 벡터 F를 다음과 같이 표시한다.

$$\begin{aligned} F &= {}^1F + \cdots + {}^NF \\ &= ({}^1J^T)^{\#}\ {}^1T + \cdots + ({}^NJ^T)^{\#}\ {}^NT \\ &= [({}^1J^T)^{\#} \cdots ({}^NJ^T)^{\#}] \begin{bmatrix} {}^1T \\ \vdots \\ {}^NT \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad (16)$$

F를 간단히 표시하기 위해 K, T를 아래와 같이 정의한다

$$K = [({}^1J^T)^{\#} \cdots ({}^NJ^T)^{\#}] \in R^{mxNn}$$

$$T = [\ {}^1T^T \cdots {}^NT^T\ ]^T \qquad \in R^{Nn}$$

그러면 식(16)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$F = K\ T$$

R^{Nn}차원의 관절 토오크 공간 상에서의 단위구는

$$\|T\|^2 = 1 \qquad (17)$$

로 나타낼 수 있다.

식(17)로 부터 R^m공간 상에서의 힘에 대한 타원식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \|T\|^2 &= T^T T \\ &= F^T (K^+)^T\ K^+\ F \\ &= F^T (\ K\ K^T\ )^{-1} F \\ &= 1 \end{aligned} \qquad (18)$$

식 (18)에 K를 대입하면,

$$F^T \left[[({}^1J^T)^{\#} \cdots ({}^NJ^T)^{\#}] \begin{bmatrix} [({}^1J^T)^{\#}]^T \\ \vdots \\ [({}^NJ^T)^{\#}]^T \end{bmatrix} \right]^{-1} F = 1$$

$$F^T\ [\ ({}^1J{}^1J^T)^{-1} + \cdots + ({}^NJ{}^NJ^T)^{-1}\ ]^{-1}\ F = 1$$

$$F^T\ [\ \sum_{k=1}^{N} ({}^kJ{}^kJ^T)^{-1}\ ]^{-1}\ F = 1 \qquad (19)$$

식 (19)는 다중 로봇이 단위 크기의 관절 토오크를 발생시킬 때 이에 상응하는 손끝에서의 힘을 나타내며 이를 다중 로봇의 힘타원이라 정의한다. 다중 로봇의 힘타원의 체적도 단일 로봇의 경우와 마찬가지로 조작 성능 타원의 체적과 역수 관계에 있으며 그 체적 V_{mf}는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$V_{mf} = D\ /\ W_m \qquad (20)$$

Ⅲ 다중 로봇의 역학적 모델링

동일 물체를 잡고 있는 N개의 로봇으로 이루어진 다중 로봇의 운동 방정식과 물체의 운동 방정식을 구하고 최적 부하 문제 해결에서 목적 함수로서 사용될 다중 로봇의 파워를 정의한다. 우선 다중 로봇에 대하여 앞에서의 가정 1),2)외에 다음과 같은 가정을 추가한다.

가정 :

3) 각 로봇은 여유 자유도를 가지지 않는다.

4) 각 로봇은 같은 수의 자유도를 가진다.

앞에서 정의한 가정하에서 N개의 구성 로봇에 대하여 다음과 같은 변수를 정의한다.

$$i = 1 \cdots N$$

${}^ix \in R^m$: 로봇 i의 기저에서 부터 물체의 기준점까지의 위치 벡터

${}^iq \in R^n$: 로봇 i의 관절 위치 벡터

${}^iJ \in R^{mxn}$: 로봇 i의 자코비안 행렬 ($m \le n$)

${}^iT \in R^n$: 로봇 i의 관절 토오크 벡터

${}^iF \in R^m$: 물체의 기준점에 로봇 i에 의하여 가해지는 직교 좌표 힘 벡터(Cartesian force vector)

$F \in R^m$: 로봇에 의해 물체의 기준점에 가해지는 합성 힘 (resultant force)

다중 로봇에 대한 운동 역학 방정식은 다음과 같이 주어진다.

$${}^iD({}^iq)\ {}^i\ddot{q} + {}^iH({}^iq, {}^i\dot{q}) + {}^iG({}^iq) = {}^iT + ({}^iJ)^T\ {}^iF \qquad (21)$$

$$i = 1 \cdots N$$

일반적으로 3차원 공간 상에서의 물체의 운동은 3차원 위치 벡터(position vector)와 회전 벡터(orientation vector)에 의하여 완전하게 결정된다. 물체의 운동 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{p} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \times I\omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} MG \\ 0 \end{bmatrix} = -\sum_{k=1}^{N} {}^kF \qquad (22)$$

$M \in R^{3x3}$:대각 원소가 물체의 질량을 나타내는 대각 행렬

$I \in R^{3x3}$: 대각 원소가 물체의 주 관성 모멘트(principal moment of inertia)를 나타내는 대각 행렬

$p \in R^3$: 물체의 위치 벡터

$\omega \in R^3$: 물체의 주축에 대한 물체의 회전 각속도

$G = [\ 0\ 0\ g\ ]^T \in R^3$: g는 중력 가속도

$\ddot{p}$, ω, $\dot{\omega}$가 주어지면 물체와 로봇 사이에 상대적인 움직임이 없으므로 ${}^iq$, $\dot{q}$, ${}^i\ddot{q}$를 구할 수 있다. 그러므로 식(21),(22)의 왼쪽 값을 계산할 수 있다. 식(21),(22)의 왼쪽을 ${}^iC$, $-F$라 나타내면 식(21),(22)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} ({}^1J)^T\ {}^1F &+ {}^1T = {}^1C \\ &\vdots \\ ({}^NJ)^T\ {}^NF &+ {}^NT = {}^NC \end{aligned} \qquad (23)$$

$$F = \sum_{k=1}^{N} {}^kF \qquad (24)$$

가정 2)와 3)에 의하여, Jacobian 행렬은 정방 행렬이고 특이 행렬이 아니므로 역 행렬이 존재하며 식(23)는 다음과 같이 변환된다.

$$\begin{aligned} {}^1f &= ({}^1J)^{-T}\ {}^1C - {}^1F \\ &\vdots \\ {}^Nf &= ({}^NJ)^{-T}\ {}^NC - {}^NF \end{aligned} \qquad (25)$$

$$F = \sum_{k=1}^{N} {}^kF$$

여기서 ${}^if = ({}^iJ)^{-T}\ {}^iT$로 손끝 힘 벡터가 아니라 로봇의 토오크가 자코비안 행렬에 의하여 변환된 것이다.

식(25)의 오른쪽 항의 합을 ${}^cf$라 정의한다.

$$ {}^cf = \sum_{k=1}^{N} ({}^kJ)^{-T}\,{}^kC - F \tag{26} $$

식(25)의 합을 ${}^cf$를 이용하여 나타내면 아래식을 얻는다.

$$ \sum_{k=1}^{N} {}^kf = {}^cf $$

다중 로봇의 전체 파워를 P라 정의하고 P를 각 로봇의 관절 토오크에 관하여 나타내면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
P &= T^T T \\
&= [\, {}^1T^T \cdots {}^NT^T \,] \begin{bmatrix} {}^1T \\ \vdots \\ {}^NT \end{bmatrix} \\
&= {}^1T^T\,{}^1T + \cdots + {}^NT^T\,{}^NT \\
&= {}^1f^T\,{}^1J\,{}^1J^T\,{}^1f + \cdots + {}^NJ^T\,{}^NJ\,{}^NJ^T\,{}^Nf \\
&= {}^1f^T\,{}^1A\,{}^1f + \cdots + {}^Nf^T\,{}^NA\,{}^Nf \\
&= \sum_{k=1}^{N} (\, {}^kf^T\,{}^kA\,{}^kf \,)
\end{aligned} \tag{27}
$$

여기서, ${}^iA = {}^iJ\,{}^iJ^T$, $i=1 \cdots N$

위의 식은 다중로봇의 전체 파워를 단일 로봇 힘타원의 합으로 나타낸 것으로 다중 로봇이 소비하는 전체 파워는 각 구성 로봇의 파워의 합임을 나타낸다.

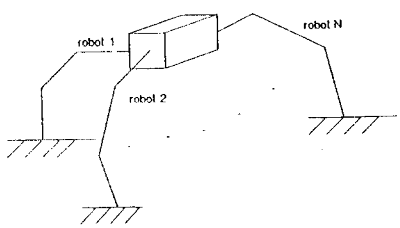

그림 1. 다중 로봇 시스템에 대한 모델
Fig. 1. Model for multi-robot system

Ⅳ 힘타원을 이용한 최적 부하 분배

앞에서 정의한 힘타원을 이용하여 다중 로봇에 대한 최적 부하 분배 문제를 해결한다. 전체 로봇의 파워를 최적화 문제에 대한 목적 함수로 하여 이를 최소화하는 최적 토오크를 구한다. 최적화 문제는 각 로봇의 파워에 제한이 없는 경우와 그렇지 않은 2가지 경우로 나누어 풀며, 목적 함수와 제한 조건은 행렬 2차식 형태(quadratic form)인 힘 타원의 형태로 표현된다.

1. 제한 조건이 없는 경우에 대한 최적 부하 분배

앞에서 정의한 다중 로봇의 파워 P를 식(19)의 다중 로봇 힘타원의 형태로 나타내는 것이 가능하다.

$$ P = T^T T = \zeta^T \, [\, \sum_{k=1}^{N} ({}^kA)^{-1} \,]^{-1} \zeta \tag{28} $$

여기서, $\zeta = \sum_{k=1}^{N} {}^kf$

P=1인 경우가 다중 로봇 힘타원을 나타내며 동시에 힘타원의 체적을 의미한다. 로봇의 토오크 벡터의 크기가 증가함에 따라 P도 증가하게 되어 힘타원도 커지게 된다.

다중 로봇이 내고자 하는 전체 힘의 합은 ${}^cf$로 그 때의 파워는 $\zeta = {}^cf$일때의 P가 된다. 그리고 이 때 ${}^cf$가 힘타원의 표면(surface)에 존재하므로 P는 로봇이 내고자 하는 전체 힘 ${}^cf$를 낼 수 있는 가능한 파워중에서 최소 파워가 된다. 이 때의 파워 P를 P_{min}이라 정의한다.

$$ P_{min} = {}^cf^T \, [\, \sum_{k=1}^{N} ({}^kA)^{-1} \,]^{-1} \, {}^cf \tag{29} $$

최소 파워를 주는 각 로봇의 힘 벡터 ${}^if^*$는 라그랑제 곱수 방법(Lagrange Multipler Method)을 사용하여 구할 수 있다. ${}^if^*$를 구하는 문제를 다음과 같이 수식화한다.

$$
\begin{aligned}
&\text{Minimize} \quad P = \sum_{k=1}^{N} (\, {}^kf^T\,{}^kA\,{}^kf \,) \\
&\text{subject to} \quad \sum_{k=1}^{N} {}^kf = {}^cf \quad , k=1 \cdots N
\end{aligned} \tag{30}
$$

위의 문제를 풀기 위해 함수 Pa를 다음과 같이 정의한다.

$$ Pa = P + \lambda^T (\, \sum_{k=1}^{N} {}^kf - {}^cf) = \sum_{k=1}^{N} ({}^kf^T\,{}^kA\,{}^kf) + \lambda^T (\sum_{k=1}^{N} {}^kf - {}^cf) $$

$$ \lambda \in R^m : \text{라그랑제 곱수} \tag{31} $$

Pa의 극값(extreme value)을 구하기 위해 Pa를 미분한다.

$$ dPa = \sum_{k=1}^{N} (\, 2\,{}^kf^T\,{}^kA + \lambda^T) \, \partial {}^kf + (\sum_{k=1}^{N} {}^kf^T - {}^cf^T \,) \partial \lambda = 0 $$

dPa=0 을 만족하는 ${}^kf$, λ를 ${}^kf^*$, λ^*라 하면

$$ 2({}^kf^*)^T\,{}^kA + (\lambda^*)^T = 0 \quad , k=1 \cdots N \tag{32} $$

$$ \sum_{k=1}^{N} ({}^kf^*)^T - {}^cf^T = 0 \tag{33} $$

식(32)로 부터 ${}^kf^*$를 구할 수 있다.

$$ {}^kf^* = -\tfrac{1}{2}\,{}^kA^{-1}\lambda^* \quad , k=1 \cdots N \tag{34} $$

식(34)를 식(33)에 대입하면 λ^*를 구할 수 있다.

$$ \sum_{k=1}^{N} (-\tfrac{1}{2}\,{}^kA^{-1}\lambda^*) = -\tfrac{1}{2}\,(\sum_{k=1}^{N} {}^kA^{-1})\lambda^* = {}^cf $$

$$ \lambda^* = -2\,(\sum_{k=1}^{N} {}^kA^{-1})^{-1}\,{}^cf \tag{35} $$

식(35)을 식(34)에 대입하여 ${}^if^*$를 구한다.

$$ {}^if^* = -\tfrac{1}{2}\,{}^iA^{-1}\lambda^* = -\tfrac{1}{2}\,{}^iA^{-1}[-2(\sum_{k=1}^{N} {}^kA^{-1})^{-1}\,{}^cf] = {}^iA^{-1}(\sum_{k=1}^{N} {}^kA^{-1})^{-1}\,{}^cf $$

$$ i=1 \cdots N \tag{36} $$

위에서 구한 ${}^if^*$가 다중 로봇 힘타원의 형태로 나타낸 P_{min}을 만족함을 보임으로써 ${}^if^*$가 최적해임을 증명한다. 우선 식을 간단히 하기 위하여 M을 다음과 같이 정의한다.

$$ M = \sum_{k=1}^{N} {}^kA^{-1} \tag{37} $$

${}^if^*$를 M을 사용하여 표현하면 다음과 같다.

$$ {}^if^* = {}^iA^{-1}M^{-1}\,{}^cf $$

${}^iA$가 대칭 행렬이기 때문에 M도 또한 대칭 행렬, 즉 $M = M^T$이다.

${}^if^*$를 함수 P에 대입한다.

$$
\begin{aligned}
P({}^1f^*, \cdots, {}^Nf^*) &= \sum_{i=1}^{N} [\, ({}^iA^{-1}M^{-1}\,{}^cf)^T\,{}^iA\,({}^iA^{-1}M^{-1}\,{}^cf) \,] \\
&= \sum_{i=1}^{N} [\, {}^cf^T M^{-1}\,{}^iA^{-1}M^{-1}\,{}^cf \,] \\
&= {}^cf^T M^{-1} (\sum_{i=1}^{N} {}^iA^{-1}) M^{-1}\,{}^cf = {}^cf^T M^{-1} M M^{-1}\,{}^cf \\
&= {}^cf^T M^{-1}\,{}^cf = {}^cf^T [\, \sum_{i=1}^{N} {}^kA^{-1} \,]^{-1}\,{}^cf \\
&= P_{min}
\end{aligned}
$$

우리가 원하는 힘을 발생시키는 최적 토오크 $^iT^*$는 자코비안 행렬을 이용하여 구할 수 있다.

$$^iT^* = {^iJ^T}\,{^if^*} = {^iJ^T}\,{^iA^{-1}}\left(\sum_{k=1}^{N}{^kA^{-1}}\right)^{-1}{^cf}\ ,\ i=1\cdots N \quad (38)$$

2. 제한 조건이 있는 경우에 대한 최적 부하 분배

여기서는 다중 로봇의 각 구성 로봇의 파워가 제한되는 경우에 대하여 연구한다. 로봇의 파워 $P=f^TJJ^Tf=f^TAf$ 이므로 구성 로봇의 파워가 제한되는 경우는 각 로봇의 힘 벡터는 다음과 같은 제한 조건을 만족해야 한다.

$$^iP={^if^T}\,{^iA}\,{^if} \le {^iP_{max}} \quad ,\ i=1\cdots N$$

위의 식은 다중 로봇의 각 구성 로봇에 대한 힘타원의 체적을 나타내며 그 체적이 일정한 값에 의하여 제한됨을 나타낸다. 제한 조건이 있는 경우에 대한 최적 부하 분배 문제는 다음과 같이 수식화될 수 있다.

$$\text{Minimize}\quad P=\sum_{k=1}^{N}({^kf^T}\,{^kA}\,{^kf}) \quad (39)$$

$$\text{subject to}\quad \sum_{k=1}^{N}{^kf}={^cf}$$

$$^if^T\,{^iA}\,{^if}\le{^iP_{max}}\quad ,\ i=1\ \cdots\ N$$

위의 식을 행렬식으로 다시 수식화하면 아래와 같다.

$$\text{Minimize}\quad P=f^TQf \quad (40)$$

$$\text{subject to}\quad Wf={^cf}$$

$$f^TR_if\le{^iP_{max}}\quad ,\ i=1\ \cdots\ N$$

여기서, $f=[{^1f^T}\ \cdots\ {^Nf^T}]^T\in R^{Nm}$

$R_1=\mathrm{diag}[{^1A},0,\cdots,0]\in R^{Nm\times Nm}$

$R_2=\mathrm{diag}[0,{^2A},\cdots,0]\in R^{Nm\times Nm}$

$\vdots \qquad \vdots$

$R_N=\mathrm{diag}[0,\cdots,0,{^NA}]\in R^{Nm\times Nm}$

$Q=\sum_{k=1}^{N}R_k\in R^{Nm\times Nm}$

$R_k, k=1\cdots N$, Q : 대칭 대각 행렬

$0\in R^{m\times m}$: m차 영 행렬

$W=[I\ I\ \cdots\ I]\in R^{m\times Nm}$

$I\in R^{m\times m}$: m차 단위 행렬

$Wf={^cf}$를 만족하는 f는 유사 역행렬 $W^\#$을 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f=f_0+By$$

여기서, $W^\#=W^T(WW^T)^{-1}\in R^{Nm\times m}$

$f_0=[{^1f_0^T}\ \ldots\ {^Nf_0^T}]=W^\#\,{^cf}\in R^{Nm}$

$^if_0\in R^m$, $i=1\cdots N$

b : Nxm - rank W로 W의 영공간의 차원

I_{Nm} : Nm차 단위 행렬

$B=[{^1B^T}\ \cdots{^NB^T}]\in R^{Nm\times b}$: $(I_{Nm}-W^\#W)$ 행렬에서 선형 독립인 열벡터만을 골라서 정규화시킨 행렬

$^iB\in R^{m\times b}$, $i=1\cdots N$

$y\in R^b$

식(40)를 y를 구하는 문제로 다시 수식화하면 다음과 같다.

$$\text{Minimize}\ P(y)=f^TQf=(f_0+By)^TQ(f_0+By) \quad (41)$$

subject to

$$g_i(y)=(f_0+By)^TR_i(f_0+By)-{^iP_{max}}\le 0\quad ,\ i=1\cdots N$$

이 문제를 Kuhn-Tucker 정리[7,8]를 이용하여 다음과 같이 풀 수 있다. 우선 라그랑제 곱수λ를 사용하여 함수$L(y,\lambda)$를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}L(y,\lambda)&=P(y)+\lambda^Tg(y) \quad (42)\\&=(f_0+By)^TQ(f_0+By)+\sum_{k=1}^{N}{^k\lambda}\,g_k(y)\\&=y^TB^T\left(Q+\sum_{k=1}^{N}{^k\lambda}R_k\right)By+2f_0^T\left(Q+\sum_{k=1}^{N}{^k\lambda}R_k\right)By\\&\quad+f_0^T\left(Q+\sum_{k=1}^{N}{^k\lambda}R_k\right)f_0-\sum_{k=1}^{N}{^k\lambda}\,{^kP_{max}}\end{aligned}$$

여기서, $\lambda=[{^1\lambda}\cdots{^N\lambda}]^T\in R^N\ge0$, $g(y)=[g_1(y)\cdots g_N(y)]^T\in R^N$

y^0를 $P(y)$가 국부 최소값을 가질 때의 y값이라 하면 Kuhn-Tucker정리[7,8]에 의하여 y^0가 제한 조건 $g_i(y)\le0$ 하에서 $P(y)$의 국부 최소값(local minimum)을 발생시키기 위한 필요 조건은 $\lambda^0\ge0$ ($\lambda^0=[{^1\lambda^0}\ldots{^N\lambda^0}]^T$, ${^i\lambda}\ge0$, $i=1\cdots N$) 가 다음 두 식을 만족할 경우이다.

$$\left.\frac{\partial L}{\partial y}\right|_{y=y^0,\ \lambda=\lambda^0}=0 \quad (43)$$

$$\left.\lambda^Tg(y)\right|_{y=y^0,\ \lambda=\lambda^0}=0 \quad (44)$$

만약에 함수 $L(y,\lambda)$가 y에 관한 볼록 함수(convex function)이면 식(43),(44)는 $P(y)$가 전체 최소값(global minimum)을 갖기 위한 필요 충분 조건이 된다. 함수$L(y,\lambda)$는 y에 관한 2차 함수(quadratic function)인데 2차 함수는 함수의 2차항이 양의 정부호(positive definite)일 때 볼록 함수가 되어 유일한 전체 최소값을 갖게 된다는 것이 알려져 있다.

함수 $L(y,\lambda)$를 y에 관하여 미분하여 0이 되는 y값 y^0를 구하면 다음과 같다.

$$y^0=-\left[B^T\left(Q+\sum_{k=1}^{N}{^k\lambda}R_k\right)B\right]^{-1}B^T\left(Q+\sum_{k=1}^{N}{^k\lambda}R_k\right)f_0 \quad (45)$$

식 (44)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sum_{k=1}^{N}{^k\lambda}\ g_k(y)=0 \quad (46)$$

${^i\lambda^o}\ge0$이고 $g_i(y^0)\le0$이기 때문에 식(46)는 다시 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}{^i\lambda^o}&=0\ \text{for}\ g_i(y^0)<0\\&\ge0\ \text{for}\ g_i(y^0)=0\quad ,\ i=1\cdots N \quad (47)\end{aligned}$$

식(45)을 정리하여 ${^iA}$, ${^iB}$에 관한 식으로 다시 나타내는 것이 가능하다.

$$y^0=-\left[\sum_{k=1}^{N}(1+{^k\lambda}){^kB^T}\,{^kA}{^kB}\right]^{-1}\left[(1+{^1\lambda})\,{^1B^T}\,{^1A}\ \cdots\ (1+{^N\lambda})\,{^NB^T}\,{^NA}\right]f_0 \quad (48)$$

$$\begin{aligned}{^i\lambda^o}&=0\ \text{for}\ g_i(y^0)<0\\&\ge0\ \text{for}\ g_i(y^0)=0\quad ,\ i=1\cdots N \quad (49)\end{aligned}$$

여기서,

$$g_k(y)={^kf_0^T}{^kA}{^kf_0}+2{^kf_0^T}\,{^kA}{^kB}y+y^T{^kB^T}{^kA}{^kB}y-{^kP_{max}}\le0\qquad k=1\cdots N$$

위의 식에서 구한 라그랑제 곱수 ${^i\lambda^o}$, $i=1\cdots N$가 함수 $L(y,\lambda)$의 2차항 $y^TB^T(Q+\Sigma\lambda_kR_k)By$에서의 행렬 $B^T(Q+\Sigma\lambda_kR_k)B$를 양의 정부호 형태(positive definiteness)가 되게 하면 $f=f_0+By^0$는 우리가 원하는 해가 된다. 최적 해는 다음과 같은 알고리즘[9,10]에 의하여 구할 수 있다.

<u>최적해를 구하기 위한 알고리즘</u>

[step1] 초기화.
모든 구성 로봇이 제한 조건을 만족한다고 가정하여 k=0으로 한다.

[step2] 반복 횟수 초기화.
반복 횟수를 표시하는 변수j를 1로 초기화 한다.

[step3] y를 구함.
다중 로봇의 구성 로봇 중 k개의 로봇이 제한 조건의 경계선 상에 있다고 가정한다 즉 k개의 g_i가 0 임을 가정한다. 이 때 가능한 ${}_NC_k$의 경우 중에서 검사하지 않은 경우에 대하여 N-k개의 구성 로봇의 ${}^i\lambda^o$=0으로 하여 y^0를 푼다 나머지 k개의 ${}^i\lambda^o$는 앞에서 0이라고 가정한 k개의 g_i에 y^0를 대입하여 푼다.

[step4] y가 최적해 인지 검사.
step3에서 얻은 ${}^i\lambda^o$가 ${}^i\lambda^o \geq 0$과 $g_i(y^0) \leq 0$, $i=1 \cdots N$ 을 만족하고 $B^T(Q+\Sigma\lambda_k R_k)B$를 양의 정부호가 되게하면 step7로 간다.

[step5] 제한 조건의 경계선상에 있는 로봇의 수 증가시킴.
$j={}_NC_k$이고 $k<N$ 이면 k를 하나 증가시킨 후 step2로 간다.
$j={}_NC_k$이고 $k=N$ 이면 step9로 간다.

[step6] 반복 횟수 변수 j를 증가시킴.
j를 하나 증가시키고, step3로 간다.

[step7] 최적해를 구함.
${}^i\lambda^o$를 y^0에 대입하여 y^0를 구한다. 이때 우리가 원하는 최적해는 $f^* = f_o + By^0$가 된다.

[step8] 최적 토오크를 구함.
${}^iT^* = {}^iJ^T\ {}^if^*$에 의하여 제한 조건을 만족하는 최적 토오크를 구한다. step 10으로 간다.

[step9] 원하는 최적해는 존재하지 않는다.

[step10] 알고리즘 종료.

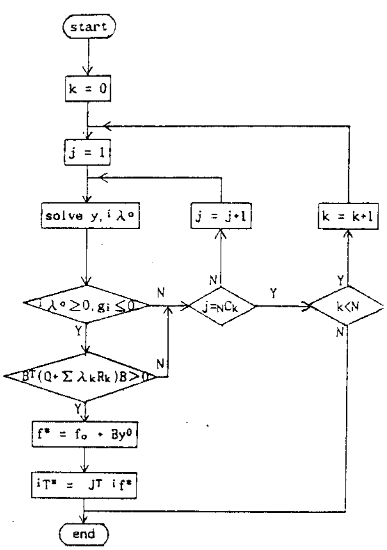

그림 2. 흐름도

Fig. 2. flowchart

V 결 론

본 연구에서는 조작 성능 타원과 힘타원의 개념을 확장시켜서 다중 로봇에 대한 조작 성능 타원과 힘타원을 정의하였다. 또한 힘타원을 이용하여 다중 로봇에 대한 최적 부하 분배 문제를 연구하였다. 다중 로봇에 대한 최적 부하 분배 문제를 해결하는 경우에 있어서 로봇의 파워가 제한되지 않는 경우와 제한되는 경우로 나누었다. 이는 단일 로봇의 힘타원의 체적이 제한되지 않는 경우와 제한되는 경우를 나타낸다. 파워가 제한되는 경우에 대하여는 최적해를 푸는 알고리즘을 제시하였다. 본 논문에서 제시한 알고리즘을 여러 경우의 다중 로봇의 궤적(trajectory)에 대하여 검증할 것이 요구된다.

참 고 문 헌

[1] T. Yoshikawa, "Dynamic Manipulability of Robot Manipulators," Proc.IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp.1033-1038, St. Louis, MO, 1985.

[2] T.Yoshikawa,"Manipulability of robotic mechanism, " Robotics research, pp.439-446, 1985.

[3] Myung Hwan Choi, Myoung Yong Lee, Bum Hee Lee and Myoung Sam Ko,"On the manipulability measure of dual arm," 90 KACC, Vol2, pp.1156-1161, 1990.

[4] Y. F. Zheng and J. Y. S. Luh, "Optimal Load Distribution for Two Industrial Robots Handling a Single Object," Proc. IEEE Int. Conf.on Robotics and Automation,pp.344-349, Philadelpia, PA, 1988d

[5] Fan -Tien Cheng and David E. Orin, " Optimal Force Distribution in Multiple -Chain Robotic Systems," IEEE Trans.on Syst.Man and Cybern., Vol.21, No1, pp.13-24, Feb., 1991.

[6] Myung Hwan Choi,Bum Hee Lee and Myoung Sam Ko," An Application of the Force Ellipsoid to the Optimal Load Distribution of a Dual Robot Arm Holding a Single Object," SICE 91,Japan, 1991.

[7] Yoshihiko Nakamura, "Advanced Robotics," Addison-Wesley Publishing Co., 1991.

[8] Mordecai Avriel, "Nonlinear Programming," Prentice Hall, 1976.

[9] Nakamura,Y., Nagai,K., and Yoshikawa, T., "Mechanics of Coordinative Manipulation by Multiple Robotic Mechanisms," IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp991-998, 1987.

[10] Yoshihiko Nakamura,"Minimizing Object Strain Energy For Coordination Of Multiple Robotic Mechanisms," ACC, 1988.