'91 韓國自動制御學術會議論文集 1991. 10.22~24

강인 성능을 보장하는 제어기 설계에 관한 연구

이준화° 김상우 권욱현

서울대학교 공과대학 제어계측공학과

A Study on the Design of Robust Controllers with Guaranteed Cost Bounds

Joon Hwa Lee, Sang Woo Kim and Wook Hyun Kwon

Dept. of Control & Instrumentation Eng.

ABSTRACT

In this paper, robust controllers which guarantee the stability and the quadratic performance in the presence of the state and the input matrix uncertainties are presented. Modified quadratic performance indices which include the model uncertainties are proposed for continuous and discrete time linear systems. And it is shown that the solution of the proposed optimal performance problem is the robust controller.

1. 서 론

강인 제어기 및 강인 성능 제어기는 주파수 영역 및 상태변수 영역에서 많이 연구 되어 왔다[1]. 주파수 영역에서의 강인 제어기 설계는 계산의 어려움이 있어서 현재는 주로 상태 변수 영역에서의 강인 제어기 설계에 대한 연구가 이루어 지고 있다[1-6]. 상태변수 영역에서의 강인 제어기를 설계할때 가정하는 시스템은 주로 상태 행렬 및 입출력 행렬에 모델 오차가 있는 것이다. 이러한 시스템의 강인 제어기는 변형된 형태의 리카티(Riccati) 방정식을 풀어서 얻는다[1]-[2],[5]-[6]. 강인 성능을 보장하는 제어기는 모델오차가 포함되지 않은 특별한 형태의 보조 성능 함수를 최적화 시키는 방법을 사용하여 구하고 있다[3-4]. 이러한 방법들은 연속 시간 시스템의 강인 제어기 설계 및 강인 성능 제어기 설계에 적용되어 그 결과가 발표 되었지만 이산 시간 시스템에의 적용예는 아직 없었다. 이산 시간 시스템의 경우는 리아프노프(Lyapunov) 방정식의 해를 사용하여 강인 제어기를 구하고 있으나 강인 성능 제어기를 구하지는 못하였다[7-8].

본 논문에서는 새로운 형태의 성능 지수 함수를 연속 시간 시스템 및 이산 시간 시스템에 대하여 정의하고, 정의된 성능 지수 함수가 최적의 값을 갖도록 제어기를 구하였다. 새로 정의된 성능 지수 함수의 최적해는 변형된 형태의 리카티(Riccati) 방정식을 풀어서 얻을 수 있다. 연속시간 시스템의 경우 본 논문에서 구한 리카티(Riccati)방정식은 기존의 강인 제어기 설계 방법에서 사용한 리카티(Riccati)방정식과 그 형태가 같다. 이렇게 구해진 최적 제어기는 상태 및 입력 행렬에 모델 오차가 독립적으로 작용하는 연속시간 시스템 및 이산 시간 시스템의 강인 제어기 및 강인 성능 제어기가 된다. 연속 시간 시스템 및 이산 시간 시스템의 모델 오차가 구조화 되지 않은 경우와 구조화 된 경우에 각각 제어기를 설계 하였다. 논문에서 가정하는 제어기의 형태는 상태변수 궤환제어의 형태이며 출력 변수 궤환 제어의 형태는 앞으로 연구 되어야 할 부분이다.

본 논문의 순서는 다음과 같다. 2 절에서는 연속 시간 시스템의 강인 제어기및 강인 성능 제어기를 구한다. 먼저 2.1 절에서는 구조화 되지않은 모델 오차에 대한 강인 안정화 제어기를 제안하고 2.2 절에서는, 2.1 절의 결과를 사용하여 강인 성능을 보장하는 제어기를 구한다. 2.3 절에서는 구조화된 모델오차를 가정하고 강인 안정화 및 강인 성능을 보장하는 제어기를 구한다. 3 절에서는 이산 시간 시스템의 강인 제어기 및 강인 성능 제어기를 구한다.

2. 연속 시간 시스템의 강인제어기 설계

2.1 강인제어기

시불변 선형 시스템

$$dx/dt = (A+\Delta A(t))\, x + (B+\Delta B(t))\, u \qquad (2\text{-}1)$$

을 생각하자. 여기서 x 는 상태 변수이고 u 는 제어입력이며 $\Delta A(t)$ 및 $\Delta B(t)$ 는 모델 오차이다. 모델 오차의 크기가 다음과 같이 주어져 있다고 가정하자.

$$\Delta A(t)'\Delta A(t) < Q, \quad \Delta B(t)'\Delta B(t) < R \qquad (2\text{-}2)$$

위 식에서 Q 및 R 는 양한정(positive definite) 행렬이다. 이와 같은 모델 오차하에서 항상 (2-1)의 시스템을 안정하게 하는 제어입력 u 를 구하는 강인 안정화 문제를 생각하자. 이 문제를 풀기 위하여 다음과 같은 새로운 문제를 정의한다.(편의상 $\Delta A(t)$, $\Delta B(t)$ 는 ΔA, ΔB 로 표시한다.)

문제1: (강인제어기 설계 문제)

$$J_1^* = \min_{u} \max_{\Delta A, \Delta B} 1/2 \int_0^\infty \{ x'(Q-\Delta A'\Delta A)x + u'(R-\Delta B'\Delta B)u\}\, dt \qquad (2\text{-}3)$$

문제 1이 가정하는 시스템은 (2-1) 이다. 문제 1의 해가 존재한다면 그 해는 (2-1)의 시스템을 (2-2)의 모델 오차에 대해서 항상 안정화 시킨다는 것은 다음과 같이 보일 수 있다.

$u^*, \Delta A^*, \Delta B^*$ 를 문제 1의 최적해라고 하면 모든 $\Delta A, \Delta B$ 에대하여 다음이 성립한다.

$$J_1^* = \min_{u} \max_{\Delta A, \Delta B} 1/2 \int_0^\infty \{ x'(Q-\Delta A'\Delta A)x + u'(R-\Delta B'\Delta B)u\}\, dt$$
$$\geq 1/2 \int_0^\infty \{ \tilde{x}'(Q-\Delta A'\Delta A)\tilde{x} + u'(R-\Delta B'\Delta B)u\}\, dt \qquad (2\text{-}4)$$

위 식에서 $\tilde{x}=x(\Delta A, \Delta B, u^*)$ 이다.. (2-4)식에서 $\Delta A'\Delta A < Q$, $\Delta B'\Delta B < R$ 인 경우를 생각하면 $Q-\Delta A'\Delta A > 0$, $R-\Delta B'\Delta B > 0$ 이므로 u^* 의 제어 입력으로 (2-1)의 시스템은 (2-2)의 모델 오차에서 안정함을 알 수 있다. 따라서 (2-1) 시스템의 강인 안정화 제어입력은 문제 1을 풀어서 얻을 수 있다. 문제 1을 풀기 위하여 다음과 같이 해밀토니안(Hamiltonian)을 정의하자.

$$H := 1/2 \{ x'(Q-\Delta A'\Delta A)x + u'(R-\Delta B'\Delta B)u\} + p'\{(A+\Delta A)x + (B+\Delta B)u\} \qquad (2\text{-}5)$$

(2-5) 식에서 p 는 여상태(Costate) 벡터이다. 문제 1을 풀기 위해서는 다음 조건을 만족하는 제어입력을 구해야 한다.

$$dp/dt=-\partial H/\partial x \qquad (2\text{-}6)$$
$$0=\partial H/\partial u \qquad (2\text{-}7)$$
$$0=\partial H/\partial \Delta A \qquad (2\text{-}8)$$
$$0=\partial H/\partial \Delta B \qquad (2\text{-}9)$$

H를 직접 대입해서 풀면 다음 관계식들을 얻는다.

$$dp/dt=-(Q-\Delta A'\Delta A)x - (A+\Delta A)'p \qquad (2\text{-}10)$$
$$0=(R-\Delta B'\Delta B)u + (B+\Delta B)'p \qquad (2\text{-}11)$$
$$0=px'-\Delta Axx' \qquad (2\text{-}12)$$
$$0=pu'-\Delta Buu' \qquad (2\text{-}13)$$

(2-12) 및 (2-13) 식은

$$p=\Delta Ax \qquad (2\text{-}14)$$
$$p=\Delta Bu \qquad (2\text{-}15)$$

이면 만족된다. (2-14) 및 (2-15) 식을 (2-10) 및 (2-11),(2-1) 식에 대입하고 정리 하면 다음 식을 얻는다.

$$dp/dt = -Qx - A'p \qquad (2\text{-}10)$$
$$0 = Ru + B'p \qquad (2\text{-}11)$$
$$dx/dt = Ax + Bu + 2p \qquad (2\text{-}18)$$

(2-17) 식에서 제어입력 은

$$u=-R^{-1}B'p \qquad (2\text{-}19)$$

이고 (2-18) 식에 적용하면

$$dx/dt = Ax - BR^{-1}B'p + 2p \qquad (2\text{-}20)$$

을 얻고 (2-16)식 및 (2-20) 식으로부터 다음의 리카티(Riccati) 방정식을 얻는다.

$$A'K + KA - KBR^{-1}B'K + 2KK + Q = 0 \qquad (2\text{-}21)$$

이때 $p=Kx$ 이다. (2-21) 식의 리카티(Riccati)방정식이 양한정인 해 K 를 가지면

$$u=-R^{-1}B'Kx \tag{2-22}$$

의 상태변수 궤환제어입력이 문제 1의 한 해가 된다. 또한 (2-1) 및 (2-2) 로 주어지는 시스템의 강인 제어기가 된다.

2.2 강인 성능 제어기

2.1 절의 (2-4)식에서 $\Delta A=0$, $\Delta B=0$ 인 경우를 생각하면 문제 1에서 구한 성능 지수 값이 정상상태 성능지수(nominal performance)의 상한치 임을 알 수 있다. 즉

$$J_1{}^* \geq 1/2 \int_0^\infty \{x'(0,0,u^*)Qx(0,0,u^*) + u^{*\prime}Ru^*\}dt \tag{2-23}$$

이 성립한다. 이것은 2.1 절에서 구한 제어기를 사용하면 주어진 모델 오차의 범위내에서 안정도를 보장하며 정상상태의 성능을 보장한다는 것을 의미한다. 성능지수를

$$1/2 \int_0^\infty \{ x'Q_1x + u'R_1u\} \, dt \tag{2-24}$$

로 하고 모델오차의 범위를

$$\Delta A'\Delta A < Q_2, \quad \Delta B'\Delta B < R_2 \tag{2-25}$$

로 가정하고 다음의 문제를 풀면 강인성능제어기를 얻을 수 있다.

문제 2: (강인성능 제어기 설계 문제)

$$J_2{}^* = \min_{u} \max_{\Delta A,\Delta B} 1/2 \int_0^\infty \{ x'(Q_1+Q_2-\Delta A'\Delta A)x + u'(R_1+R_2-\Delta B'\Delta B)u\} \, dt \tag{2-26}$$

이것은 문제 2의 제어기 u^*가 $\Delta A'\Delta A < Q_2$, $\Delta B'\Delta B < R_2$ 의 모델오차에 대해서 안정성을 보장하고

$$J_2{}^* \geq \max_{\Delta A'\Delta A<Q_2,\, \Delta B'\Delta B<R_2} 1/2 \int_0^\infty \{ x'Q_1x + u'R_1u \} \, dt \tag{2-27}$$

이성립하므로, (2-25) 식으로 주어지는 모델 오차 하에서도 $J_2{}^*$ 의 성능을 보장하는 제어기가 됨을 보여준다.

2.3 구조화된 불확실성

2.1 절 및 2.2 절에서는 (2-1) 의 시스템과 같이 구조화 되지 않은 불확실성을 가정한 상태에서 강인 제어기 및 강인 성능 제어기를 구하였다. 본절에서는 다음처럼 구조화된 불확실성을 가정하고 강인 성능제어기를 구하자.

$$dx/dt = (A+D_AF_A(t)E_A)x + (B+D_BF_B(t)E_B)u \tag{2-28}$$

위식에서 D_A, E_A, D_B, E_B 는 고정된 행렬이며 $F_A(t), F_B(t)$는 다음과같이 그 크기가 제한된 모델 오차이다.

$$\|F_A(t)\| < 1, \quad \|F_B(t)\| < 1 \tag{2-29}$$

(2-29) 식으로 정의된 모델 오차는 다음과 같은 행렬의 부등식과 같은 조건이다.

$$F_A'F_A < I, \qquad F_B'F_B < I, \tag{2-30}$$

이러한 모델오차를 갖는 (2-28) 의 시스템에 대한 강인 성능 제어기를 구하기 위해서 다음과 같은 성능 지수를 정의하자.

$$J_3 = 1/2 \int_0^\infty \{ x'(Q+E_A'(I-F_A'F_A)E_A)x + u'(R+E_B'(I-F_B'F_B)E_B)u\} \, dt \tag{2-31}$$

위와 같은 성능지수를 사용하고 문제 2의 강인 성능제어 문제를 풀면 (2-28) 및 (2-29) 식으로 주어지는 시스템의 강인 성능을 보장하는 제어기를 구할 수 있다. (2-31) 식에서 $(Q+E_A'E_A), (R+E_B'E_B)$은 문제 2의 Q_1, R_1에 해당하고 $E_A'E_A$, $E_B'E_B$ 는 Q_2, R_2 에 해당한다. (2-31) 식을 u 에대해서 최소화 시키고 F_A, F_B 에대해서 최대화 시키면 강인성능 제어기를 구할 수 있다. (2-28)식의 강인 성능 제어기를 구하기 위해서는 다음의 리카티(Riccati)방정식을 풀면 된다.

$$A'K + KA - KB(R+E_B'E_B)^{-1}B'K + KD_AD_A'K + KD_BD_B'K + Q + E_A'E_A = 0 \tag{2-32}$$

이때 강인 성능 제어입력은

$$u^*=-R^{-1}B'Kx$$

로 주어진다. 다음과 같이 모델오차의 범위가 주어진다면

$$\|F_A\| < 1/\lambda \ , \quad \|F_B\| < 1/\kappa \qquad (2\text{-}33)$$

다음의 리카티(Riccati) 방정식을 풀어서 강인 제어기를 얻을 수 있다.

$$A'K + KA - KB(R+E_B'E_B)^{-1}B'K + KD_AD_A'K/\lambda^2 + KD_BD_B'K/\kappa^2 + Q + E_A'E_A = 0 \qquad (2\text{-}34)$$

3. 이산 시간 시스템의 강인 제어기 설계

연속시간 시스템에서 강인 제어기를 구하기 위해서 사용한 성능지수의 형태는 이산 시간 시스템의 강인제어기를 구하는데 그대로 사용할 수 있다.

다음과 같이 모델 오차가 포함된 이산 시간 시스템을 생각하자.

$$x(k+1) = (A+\Delta A(k))x(k) + (B+\Delta B(k))u(k) \qquad (3\text{-}1)$$

위 식에서 x 는 상태 변수 이고 u 는 입력 변수이다. 상태 행렬 및 입력행렬에 들어간 모델오차는 다음과 같은 행렬의 부등식을 만족한다고 가정하자.

$$\Delta A(k)'\Delta A(k) < Q \ , \quad \Delta B(k)'\Delta B(k) < R \qquad (3\text{-}2)$$

위 식에서 Q 및 R 는 양한정 행렬이다. 이와 같은 모델오차 하에서 (3-1) 의 이산 시간 시스템을 안정화 시키기 위해서는 다음의 문제를 풀어야 한다.

문제 3:(강인 제어기 설계 문제)

$$J_3{}^* = \min_{u(\cdot)} \max_{\Delta A,\Delta B} 1/2 \sum_{i=0}^{\infty} \{ x'(i)(Q-\Delta A(i)'\Delta A(i))x(i) + u'(i)(R-\Delta B(i)'\Delta B(i))u(i)\} \qquad (3\text{-}3)$$

문제 3의 해가 (3-1) 및 (3-2) 로 주어지는 시스템의 강인 안정화 제어기가 되는 이유는 연속시간 시스템의 경우와 마찬가지이다. 문제 3 의 해를 구하기 전에 유한 구간의 문제를 먼저 풀자.

문제 4 : (유한 구간의 강인 제어 문제)

$$J_4{}^* = \min_{u(\cdot)} \max_{\Delta A,\Delta B} [\ 1/2 \sum_{i=0}^{N-1} \{ x'(i)(Q-\Delta A(i)'\Delta A(i))x(i) + u'(i)(R-\Delta B(i)'\Delta B(i))u(i)\} + 1/2(x'(N)QX(N) + u'(N)Ru(N)] \qquad (3\text{-}4)$$

시점 N 에서 시작하는 최적치는 다음과 같다.

$$J_{N,N}\ (x(N)) = 1/2\ x'(N)P(N)x(N),\ P(N)=Q,\ u(N)=0 \qquad (3\text{-}5)$$

시점 N-1 에서 시작하는 최적치는

$$\begin{aligned} J_{N-1,N}&(x(N-1),u(N-1),\Delta A(N-1),\Delta B(N-1)) \\ &= 1/2\ x'(N-1)\{Q-\Delta A(N-1)'\Delta A(N-1)\}x(N-1) \\ &\quad + 1/2\ u'(N-1)\{R-\Delta B(N-1)'\Delta B(N-1)\}u(N-1) \\ &\quad + 1/2\ [(A+\Delta A(N-1))x(N-1)+(B+\Delta B(N-1))u(N-1)]' \\ &\quad P(N)[(A+\Delta A(N-1))x(N-1)+(B+\Delta B(N-1))u(N-1)] \end{aligned} \qquad (3\text{-}6)$$

식으로 주어진다. 위의 값을 입력 변수 u 및 ΔA, ΔB 로 미분 하고 그 값을 0 과 같다고 놓으면 다음 식들을 얻는다.

$$\begin{aligned} \partial J_{N-1,N}/\partial u &= [R-\Delta B(N-1)'\Delta B(N-1)]u(N-1) \\ &\quad + (B+\Delta B(N-1))'P(N)[(A+\Delta A(N-1))x(N-1) \\ &\quad + (B+\Delta B(N-1))u(N-1)] = 0 \end{aligned} \qquad (3\text{-}7)$$

$$\begin{aligned} \partial J_{N-1,N}/\partial\Delta A(N-1) &= -\Delta A(N-1)x(N-1)x'(N-1) \\ &\quad + P(N)[(A+\Delta A(N-1))x(N-1) \\ &\quad + (B+\Delta B(N-1))u(N-1)]x'(N-1) = 0 \end{aligned} \qquad (3\text{-}8)$$

$$\begin{aligned} \partial J_{N-1,N}/\partial\Delta B(N-1) &= -\Delta B(N-1)u(N-1)u'(N-1) \\ &\quad + P(N)[(A+\Delta A(N-1))x(N-1) \\ &\quad + (B+\Delta B(N-1))u(N-1)]u'(N-1) = 0 \end{aligned} \qquad (3\text{-}9)$$

(3-8) 식 및 (3-9) 식은 다음과 같이 정리 된다.

$$\Delta A(N-1)x(N-1)x'(N-1)=P(N)x(N)x'(N-1) \qquad (3\text{-}10)$$

$$\Delta B(N-1)u(N-1)u'(N-1)=P(N)x(N)u'(N-1) \qquad (3\text{-}11)$$

(3-10) 식 및 (3-11) 식은

$$\Delta A(N-1)x(N-1)=P(N)x(N) \qquad (3\text{-}12)$$

$$\Delta B(N-1)u(N-1)=P(N)x(N) \qquad (3\text{-}13)$$

이면 만족된다. (3-12) 식 및 (3-13) 식을 (3-7) 식에 대입하여 정리하면

$$Ru(N-1) + B'P(N)x(N) = 0 \qquad (3\text{-}14)$$

의 관계를 얻는다. 위식에서 x(N)은 다음처럼 구할 수 있다. (3-12) 및 (3-13) 식을 (3-1) 의 시스템에 적용하면

$$x(N) = (A+\Delta A(N-1))x(N-1) + (B+\Delta B(N-1))u(N-1)$$
$$= Ax(N-1) + Bu(N-1) + 2P(N)x(N) \quad (3\text{-}15)$$

이고 따라서 다음식을 얻는다.

$$x(N) = (I-2P(N))^{-1}(Ax(N-1)+Bu(N-1)) \quad (3\text{-}16)$$

$Z(N)=(I-2P(N))^{-1}$ 로 정의 하자. (3-16) 식을 (3-14) 식에 적용하면 다음처럼 제어 입력을 구할 수 있다.

$$u(N-1) = -\{R+B'P(N)Z(N)B\}^{-1}B'P(N)Z(N)Ax(N-1)$$
$$= F(N-1)x(N-1) \quad (3\text{-}17)$$

여기서 F(N-1) 은 다음과 같이 정의 된다.

$$F(N-1) = -\{R+B'P(N)Z(N)B\}^{-1}B'P(N)Z(N)A \quad (3\text{-}18)$$

따라서 x(N) 은 (3-16) 식으로부터

$$x(N) = Z(N)(A+BF(N-1))x(N-1)$$
$$= G(N-1)x(N-1) \quad (3\text{-}19)$$

이다. 여기서 G(N-1)은 다음과 같이 정의 된다.

$$G(N-1)=Z(N)(A+BF(N-1)) \quad (3\text{-}20)$$

위의 결과를 $J_{N-1,N}$ 의 최적치를 구하는데 사용하면 다음과 같다.

$$J^*_{N,N-1}(x^*(N-1),u^*(N-1),\Delta A^*(N-1),\Delta B^*(N-1))$$
$$= 1/2\ x^{*\prime}(N-1)Qx^*(N-1) + 1/2\ u^{*\prime}(N-1)Ru^*(N-1)$$
$$+ 1/2\ x'(N)\{P(N)-2P(N)P(N)\}x(N)$$
$$= 1/2\ x^{*\prime}(N-1)\{ Q + F(N-1)'RF(N-1) +$$
$$G(N-1)'(P(N)-2P(N)P(N))G(N-1)\}x^*(N-1)$$
$$:= 1/2\ x^{*\prime}(N-1)P(N-1)x^*(N-1) \quad (3\text{-}21)$$

위의 결과는 일반적인 첨자 i 에 대해서 성립하고 따라서 다음의 결과를 얻는다.

$P(N)=Q$ 이고 $1 \le i \le N$ 일때는 다음 식이 성립한다.

$$Z(i)=(I-2P(i))^{-1}$$
$$F(i-1)=-\{R+B'P(i)Z(i)B\}^{-1}B'P(i)Z(i)A$$
$$G(i-1)=Z(i)(A+BF(i-1))$$
$$P(i-1)=Q+F'(i-1)RF(i-1)+G'(i-1)(P(i)-2P(i)P(i))G(i-1) \quad (3\text{-}22)$$

최적 제어입력 u^* 는

$$u^*(i)=F(i)x(i) \quad (3\text{-}23)$$

와 같이 주어진다. 무한구간 문제의 해는 유한 구간 문제의 해로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$Z = (I-2P)^{-1} \quad (3\text{-}24)$$
$$F = - \{ R + B'PZB \}^{-1}B'PZA \quad (3\text{-}25)$$
$$G = Z(A + BF) \quad (3\text{-}26)$$
$$P = Q + F'RF + G'PZ^{-1}G \quad (3\text{-}27)$$
$$u^*(i)=Fx(i) \quad (3\text{-}28)$$

위식중에서 (3-24) 식의 Z 는 모델 오차의 크기가 없는 경우에 단위행렬로 되고 주어진 식은 일반적인 최적제어문제의 리카티(Riccati) 방정식으로 된다. 즉 Z는 강인 안정도를 보장하기 위해서 추가된 항이라는 것을 알 수 있다. 위의 강인 제어기는 연속시간 시스템의 경우와 마찬가지로 정상 상태 성능 (nominal performance)을 보장하지만 강인 성을 보장하지는 않는다. 강인 성능을 보장하는 제어기를 구성하기 위해서는 연속시간 시스템의 경우와 마찬가지로 다음의 성능지수를 사용해야 한다.

$$J^* = \min_{u} \max_{\Delta A,\Delta B} 1/2 \sum_{i=0}^{\infty} \{ x'(i)(Q_1+Q_2-\Delta A(i)'\Delta A(i))x(i) +$$
$$u'(i)(R_1+R_2-\Delta B(i)'\Delta B(i))u(i)\} \quad (3\text{-}29)$$

이때 가정하는 모델 오차의 범위는

$$\Delta A(i)'\Delta A(i) < Q_2 \quad , \quad \Delta B(i)'\Delta B(i) < R_2 \quad (3\text{-}30)$$

이고 원하는 성능지수는

$$1/2\ \Sigma\ \{ x'(i)Q_1x(i) + u'(i)R_1u(i) \} \quad (3\text{-}29)$$

이다. 모델 오차에 구조화된 불확실성이 있는 다음의 이산

시간 시스템에 대하여 강인 안정화 제어기를 구하자.

$$x(k+1) = (A+D_AF_A(k)E_A)x(k) + (B+D_BF_B(k)E_B)u(k) \quad (3\text{-}30)$$

위식에서 D_A, E_A, D_B, E_B 는 고정된 행렬이며 F_A, F_B 는 다음과 같이 그 크기가 제한된 모델 오차이다.

$$\|F_A(k)\| < 1, \quad \|F_B(k)\| < 1 \quad (3\text{-}31)$$

(3-31) 식으로 정의된 모델 오차는 다음과 같은 행렬의 부등식과 같은 조건이다.

$$F_A'F_A < I, \quad F_B'F_B < I, \quad (3\text{-}32)$$

다음의 성능지수를 최적화 시켜야 한다.

$$\sum_{i=0}^{\infty} \{ x'(i)(Q+E_A'(I-F_A'(i)F_A(i))E_A)x(i) + u'(i)(R+E_B'(I-F_B'(i)F_B(i))E_B)u(i)\} \, dt \quad (3\text{-}33)$$

위 문제를 유한 구간의 문제로 만들고 풀면 다음의 결과를 얻는다. $P(N)=Q$ 이고 $1 \le i \le N$ 일때는 다음 식이 성립한다.

$$Z(i)=[I-(D_A'D_A+D_B'D_B)P(i)]^{-1}$$
$$F(i-1)=-[R+E_B'E_B+B'P(i)Z(i)B]^{-1}B'P(i)Z(i)A$$
$$G(i-1)=Z(i)[A+BF(i-1)]$$
$$P(i-1)=[Q+E_A'E_A+F'(i-1)\{R+E_B'E_B\}F(i-1)+ G'(i-1)\{P(i)-D_A'P(i)P(i)D_A-D_A'P(i)P(i)D_A\}G(i-1)]$$
$$u^*(i)=F(i)x(i) \quad (3\text{-}34)$$

무한구간의 문제는 유한 구간의 문제로 부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$Z=[I-(D_A'D_A+D_B'D_B)P]^{-1}$$
$$F=-[R+E_B'E_B+B'PZB]^{-1}B'PZA$$
$$G=Z[A+BF]$$
$$P=[Q+E_A'E_A+F'\{R+E_B'E_B\}F+G'\{P-D_A'PPD_A-D_A'PPD_A\}G]$$
$$u^*(i)=Fx(i) \quad (3\text{-}35)$$

다음과 같이 모델오차의 범위가 주어진다면

$$\|F_A\| < 1/\lambda, \quad \|F_B\| < 1/\kappa \quad (3\text{-}36)$$

다음의 리카티(Riccati) 방정식을 풀어야 한다.

$$Z=[I-(D_A'D_A/\lambda^2+D_B'D_B/\kappa^2)P]^{-1}$$
$$F=-[R+E_B'E_B+B'PZB]^{-1}B'PZA$$
$$G=Z[A+BF]$$
$$P=[Q+E_A'E_A+F'\{R+E_B'E_B\}F+G'\{P-D_A'PPD_A/\lambda^2-D_A'PPD_A/\kappa^2\}G]$$
$$u^*(i)=Fx(i) \quad (3\text{-}37)$$

4. 결 론

본 논문에서는 상태 행렬 및 입력 행렬에 모델 오차가 있는 연속 시간 및 이산 시간 시스템의 강인제어기를 설계하기 위하여 새로운 2 차형식의 성능 지수를 제안하고 제안된 성능 지수를 최적화 시키는 제어기를 구함으로써 주어진 시스템의 강인 제어 문제 및 강인 성능 제어 문제를 해결 하였다. 본 논문에서 제안하는 제어기 설계방법은 놈(Norm) 의 크기가 제한된 모델 오차뿐 아니라 그 크기가 양한정인 행렬로 제한된 모델 오차에 대해서도 적용할 수 있다. 제안된 강인 제어기는 불확실성이 있는 연속 시간 시스템의 경우에 기존의 강인 제어기와 같고, 강인 성능을 보장한다. 이산 시간 시스템의 강인 제어기 및 강인 성능 제어기는 기존의 강인 제어기와 달리 이산시간 리카티(Riccati) 방정식을 사용하여 얻을 수 있다. 본 논문에서는 상태 변수 궤환 제어 형태의 강인 제어 및 강인 성능 제어만을 다루었고, 출력 궤환 강인 성능 제어기는 앞으로 연구되어야 할 과제이다.

REFERENCES

[1] P. P. Khargonekar, I. R. Pertersen, "Robust Stabilization of Uncertain Linear Systems : Quadratic Stabilizability and H∞ Control Theory," IEEE Trans. Automat. Contr. , vol. 35, pp. 356-361, 1990.

[2] S.Yamamoto and H.Kimura,"On the State Feedback Stabilization of Norm Bounded Uncertain Systems," in Proc. Amer. Contr. Conf. ,San Diego, Califonia, pp. 891-893, 1990.

[3] D.S.Bernstein and W.M.Haddad,"Robust Stability and Performance for Fixed-order Dynamic Compensation via the Optimal Projection Equations with Guaranteed Cost Bounds," in Proc. Amer. Contr. Conf., Atlanta, Georgia, pp. 2471-2476, 1988.

[4] H. H. Yeh, S. S. Banda, S. A. Heise and A.C.Bartiett,"Robust Design of Multivariable Feedback Systems with Real Parameter Uncertainty and Unmodelled Dynamics," in Proc. Amer. Contr. Conf., 1989.

[5] I.R.Pertersen,"A Stabilization Algorithm for a Class of Uncertain Linear Systems," Systems & Control Letters., vol.8, pp. 351-357, 1987.

[6] D.S.Bernstein,"Robust Static and Dynamic Output-Feedback Stabilization: Deterministic and Stochastic Perspectives," IEEE Trans. Automat. Contr. vol. 32, pp. 1076-1084, 1987.

[7] M.E.Magana and S.H.Zak,"Robust State Feedback Stabilization of Discrete-Time Uncertain Dynamical Systems," IEEE Trans. Automat. Contr. vol. 33, pp. 887-891, 1988.

[8] M.E.Magana and S.H.Zak,"Robust Output Feedback Stabilization of Discrete-Time Uncertain Dynamical Systems," IEEE Trans. Automat. Contr. vol. 33, pp. 1082-1085, 1988.