'91 韓國自動制御學術會議論文集 1991. 10.22~24

최적제어이론을 이용한 불확실한 시스템의 제어 기법 연구

한 형 석* 이 장 규

서울대학교 공과대학 제어계측공학과

A Study On The Stabilizing Control of Uncertain System with Optimal Control

Hyung-Seok Han Jang-Gyu Lee

Dept. of Control & Instrumentation Eng.
Seoul National University

ABSTRACT

This paper presents a method for designing a full state feedback linear static control law. This will stabilize a given linear uncertains system and also guarantee the performance of the system. The uncertain systems are described by state eqation which contains uncertain paprameters in system and input distribution matrices. The method is based on the guaranteed cost control of Chang and Peng(1972). The controller gain can be obtained by the solution of a algebraic Riccati equation in which the input weighting matrices depend on the uncertainty bounds. The algebraic Riccati equation in this paper is same as that of weighted LQ regulator problem.

1. 서 론

시스템 제어는 대상 시스템의 모델링을 기초로 이루어 진다. 그러나, 현실적으로 대상 시스템의 동특성을 정확히 모델링하는 것은 불가능 하다. 따라서, 동특성을 근사하게 나타낼 수 있는 모델을 특정한 동작점에서 얻게되며 이 모델은 동작점의 변화에 따라 모델 오차를 수반한다. 모델오차는 동작점의 변화와 외부의 교란등으로 구성될 수 있으며 이를 상태공간(state space) 에서는 시스템 행렬 및 입력 분산 행렬의 변화로 표현할 수 있다. 특정한 동작점에서 상태공간으로 표현된 시스템에 대하여 설계한 제어기가 시스템 행렬과 입력행렬로 모델링된 모델오차에 대하여 안정성을 유지하도록 하기 위한 견실 제어(robust control) 에 관한 연구가 진행되어왔다.[1-8]

불확실한 시스템의 안정화 제어에 관한 연구는 제어 이론의 주된 연구 과제로 오랫동안 연구되고 있다. 이미 발표된 대부분의 연구결과는 리아프노프(Lyapunov) 안정성 이론을 이용하였으며 불확실성이 공칭 조건(matching condition)을 만족하는 경우에 대하여 이루어 졌다.[3] 또한, 공칭 조건을 만족하지 않는 불확실한 시스템에 대하여서도 연구가 진행되고 있다.[3,4] 공칭 조건을 만족하지 않는 시스템에 대하여서는 시스템 행렬에서의 불확실성이 있는 경우[2]와 입력 분산 행렬에 불확실성이 있는 경우[5]에 관하여 독립적으로 연구되었다.

일반적인 불확실 시스템에 대하여서는 그 결과가 대수 리카티 방정식(Algebraic Ricatti Equation) 과 비슷한 형태로 표현되나 이 방정식의 존재성은 아직 증명되지않고있다. 따라서 일반적인 불확실 시스템에는 시행착오적인 방법으로 해를 구하게 된다.

본 논문에서는 불확실한 시스템의 안정화 상태 궤환 제어 이득을 최적제어인 LQ(Linear Quadratic) 조정기의 해를 구하는 방법과 유사한 보장 성능 제어 (Guaranteed Cost Control)[1] 을 이용하여 설계한다. 논문에서 사용한 불확실한 시스템은 시스템행렬과 입력 분산 행렬의 불확실성 크기만을 알고 있고 입력 분산 행렬의 불확실성만이 공칭 조건을 만족하는 시스템이다. 안정화 제어 이득은 대수 리카티 방정식

의 형태를 갖게되며 일반적으로 알려진 대수 리카티 방정식의 성질을 이용할 수 있다. 대수 리카티 방정식은 가중(weighted) LQ 문제에서의 방정식과 같은 형태를 갖는다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2 절에서는 불확실한 시스템의 모델과 공칭 조건에 관하여 설명하고 본 논문에서 다루는 시스템을 설명한다. 3 절에서는 보장 성능 제어에 대하여 알아보고 4 절에서는 2 절에서 설명한 시스템에 대하여 보장 성능 제어를 적용한 결과를 설명한다. 5 절에서 결론을 맺도록 한다.

2. 문제 설정

일반적인 선형 시스템은 다음과 같이 표현된다.

$$(\Sigma) \quad \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \tag{1}$$

여기서, $x(t)$ 는 n 차원의 상태 벡터, $u(t)$ 는 m 차원의 입력 벡터, A 행렬은 n X n 차원 그리고 B 행렬은 n X m 차원이다. 행렬 {A, B} 는 가제어성(controllability) 조건을 만족한다고 가정한다.

기준(nominal)동작점에서의 제어대상 시스템 모델은 식 (1) 과 같이 표현될 수 있으며, A, B 행렬에 부가되는 불확실성을 $\Delta A(r)$ 와 $\Delta B(s)$로 표현한다.

불확실성을 포함한 시스템은 다음과 같이 표현된다.

$$(\Sigma_I) \quad \dot{x}(t) = (A + \Delta A(r))\,x(t) + (B + \Delta B(s))\,u(t) \tag{2}$$

여기서, r 은 p 차원, s 는 q 차원의 불확실 변수 백터를 의미하며 이 변수들은 시변일 수 있다. 또한 $r(\cdot): R \rightarrow \mathcal{R} \subset R^p$, $s(\cdot): R \rightarrow \mathcal{S} \subset R^q$ 이며 Lebesque measurable 하며 집합 $\mathcal{R}$ 과 $\mathcal{S}$ 는 이미 알 수 있는 compact 하고 bounding한 집합이다.

다음은 공칭조건의 정의를 알아본다.

<u>정의 1]</u>

시스템 (Σ_I)이 다음의 가정을 만족하면 공칭조건을 갖는다고한다.

조건 1) $\Delta A(r) = BD(r)$ (3)

조건 2) $\Delta B(s) = BE(s)$ (4)

조건 3) $\| E(s) \|_2 < 1/3$ (모든 s 에 대하여) (5)

본 논문에서 다루는 불확실 시스템은 조건 2, 3만을 만족하는 시스템을 가정한다. 즉, 시스템 행렬의 불확실성은 단지 그의 최대 크기만을 알고 있다고 가정한다.

$$\| \Delta A(r) \|_2 \le \alpha \qquad (\text{ 모든 } r \text{ 에 대하여 }) \tag{6}$$

3. 보장 성능 제어 (Guaranteed Cost Control)

불확실한 시스템 (Σ_I) 에 대하여 최소화하고자 하는 제곱 성능 지표(quadratic performance index)를 다음과 같이 정의한다.

$$J_T = x^T(T)S_T x(T) + \int_0^T [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]\,dt \tag{7}$$

여기서, 행렬 S_T 와 Q 는 nxn 차원의 준정칙(positive semidefinite) 이고 행렬 R 은 mxm 차원의 양정칙행렬이며 $x^T(T)\,S_T\,x(T)$ 는 J_T 의 최종시간에서의 값이다.

보장 성능 제어는 Chang 과 Peng(1972) 이 처음으로 제안한 방법이다. 이 방법은 모든 불확실 변수들에 대하여 성능 지표를 일정한 값이하로 보장 할 수 있도록 전상태 궤환 제어 이득을 찾는 과정으로 구성된다. 성능 지표를 보장하는 값을 보장 성능이라하고 이때의 제어 이득을 보장 성능 제어 이득이라 한다. 다음은 Chang 과 Peng 이 제안한 보장 성능 제어의 개념에 대하여 설명한다.

<u>정리 1](Chang 과 Peng)[1]</u>

시스템 (Σ_I) 이 $\Delta B(s) = 0$ 인 경우에 대하여 , 모든 $x \in R^n$ 과 $r \in \mathcal{R}$ 에 대하여 $V(x,T) = x^T(T)\,S_T\,x(T)$ 을 만족하고 다음의 부등식을 만족하면,

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial V(x,t)}{\partial t}[Ax(t)+Bu(t)]+x^T(t)Qx(t)+u^T(t)Ru(t) \le 0 \tag{8}$$

다음과 같은 제어 입력은

$$u(t) = -R^{-1}B^TP(t)x(t) \tag{9}$$

보장 성능 제어 입력이고 보장 성능은 다음과 같다.

$$V(x,0) = x^T(0)P(0)x(0) \tag{10}$$

이와 동등한 조건은 다음 방정식을 만족하는 준정칙 대칭행렬 $P(t)$, $t \in [0,T]$ 가 존재한다는 것이다.

$$\frac{dP(t)}{dt} + P(t)A + A^TP(t) - P(t)BR^{-1}B^TP(t) + Q + U(P(t)) = 0 \tag{11}$$

$$(\, P(T) = S_T \,)$$

윗 식에서의 $U(P(t))$ 는 $\Delta A(r)$ 에 의하여 생기는 불확실성의 상한을 의미한다.

즉,

$$x^T(t)(\, P(t)\Delta A(r) + \Delta A(r)^TP \,)x(t) \le x^T(t)U(P(t))x(t) \tag{12}$$

증명 : 참고 문헌 참조 ■

4. 입력 분산 행렬의 불확실성을 포함한 보장 이득 제어

Chang의 정리는 시스템 행렬의 불확실성만을 고려하였다. 이를 입력 분산행렬의 불확실성에까지 확대적용하기 위하여 다음의 보조정리를 이용한다.

보조정리 1]

임의의 n 차원의 벡터 x, y 는 임의의 양수의 ε 대하여 다음의 부등식이 성립한다.

$$2\, x^T y \le x^T x / \varepsilon + \varepsilon\, y^T y \tag{13}$$

증명 :

$$(x/\varepsilon^{1/2} - \varepsilon^{1/2} y)^T (x/\varepsilon^{1/2} - \varepsilon^{1/2} y)$$

$$= x^T x / \varepsilon + \varepsilon y^T y - 2x^T y \ge 0$$

그러므로, $2\, x^T y \le x^T x / \varepsilon + \varepsilon\, y^T y$ ■

위의 보조정리를 이용하여 시스템 행렬과 입력 분산 행렬에 의한 불확실성의 상한을 구하면 다음과 같다.

보조정리 2]

준정칙 대칭행렬 P와 임의의 양의 정수 ε에 대하여 다음 식들이 성립한다.

$$2\, x^T(t) P \Delta A(r) x(t) \le 2\alpha\, x^T(t)\, P\, x(t) \quad (\text{ 모든 } r \text{ 에 대하여 }) \tag{14}$$

$$\begin{aligned} &-2x^T(t) P \Delta B(s) R^{-1} B^T P x(t) \\ &\quad \le \varepsilon x^T(t) P B B^T P x(t) + x^T(t) P B R^{-1} R^{-1} B^T P x(t) / (9\varepsilon) \\ &\quad (\text{ 모든 } s \text{ 에 대하여 }) \end{aligned} \tag{15}$$

증명 :

보조정리 1 을 이용하면 다음의 부등식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} 2\, x^T(t) P \Delta A(r) x(t) &\le x^T(t) P P x(t) / \varepsilon \\ &\quad + \varepsilon x^T(t) \Delta A^T(r) \Delta A(r) x(t) \end{aligned} \tag{16}$$

모든 양의 ε 에 대하여 위의 부등식이 성립되므로 $\Delta A(r)$ 의 스펙트럼 반경을 사용하면 다음의 부등식이 성립한다.[7]

$$2\, x^T(t) P \Delta A(r) x(t) \le x^T(t) (\varepsilon + 1/\varepsilon\, \rho^2(\Delta A(r))) P\, x(t) \tag{17}$$

여기서, $\rho(\cdot)$ 는 행렬의 스펙트럼 반경

그러므로,

$$\begin{aligned} 2\, x^T(t) P \Delta A(r) x(t) &\le 2\, x^T(t) \rho(\Delta A(r)) P\, x(t) \\ &\le 2\, x^T(t) \|\Delta A(r)\|_2 P\, x(t) \\ &\le 2\, \alpha\, x^T(t)\, P\, x(t) \\ &\quad (\text{ 모든 } r \text{ 에 대하여 }) \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} -2x^T(t) P \Delta B(s) R^{-1} B^T P x(t) &= -2\, x^T(t) P B E(s) R^{-1} B^T P x(t) \\ &\le \varepsilon x^T(t) P B B^T P x(t) + x^T(t) P B R^{-1} E^T(s) E(s) R^{-1} B^T P x(t) / \varepsilon \\ &\le \varepsilon x^T(t) P B B^T P x(t) + x^T(t) P B R^{-1} R^{-1} B^T P x(t) / (9\varepsilon) \\ &\quad (\text{ 모든 } s \text{ 에 대하여 }) \end{aligned} \tag{19}$$

■

보조정리 2 를 이용한 불확실한 시스템의 보장 성능 제어는 다음 정의로 표현된다.

정리 2]

시스템 (Σ_I) 에 대하여 다음을 만족하는 준정칙 대칭행렬 P(t) 가 임의의 양의 정수 ε에 대하여 존재하면

$$\frac{dP(t)}{dt} + P(t)(A + \alpha I) + (A + \alpha I)^T P(t) - P(t) B \hat{R}^{-1} B^T P(t) + Q = 0 \quad \forall t \in [0, T] \tag{20}$$

$$\hat{R}^{-1} = R^{-1} - \varepsilon I - R^{-2}/(9\varepsilon) \quad (\text{ I는 단위 행렬 })$$

$$\|\Delta A(r)\|_2 \le \alpha$$

다음의 제어입력은

$$u^*(t) = Kx(t) = -R^{-1} B^T P x(t) \tag{21}$$

보장 성능 제어 입력이고 다음의 값은

$$V^*(x, 0) = x^T(0) P x(0) \tag{22}$$

보장 성능값이다.

증명 : 보조정리 2 와 정리 1을 이용 ■

정리 2 의 결과를 무한시간에서 다루도록한다. 무한시간에서의 성능 지표는 다음과 같다.

$$J = \int_0^\infty [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)]\, dt \tag{23}$$

정리 2 에서의 해 P(t) 가 무한시간에서 상수 정칙 행렬 P 로 수렴함을 가정하면 다음과 같은 제어 입력에 대하여 성능 지표는 식 (26) 과 같은 상한값을 갖는다.

$$u^o(t) = K^o x(t) = -R^{-1} B^T P x(t) \tag{24}$$

$$J(x(0), u^o) \le x^T(0) P x(0) \tag{25}$$

여기서, 행렬 P 는 다음의 대수 리카티 방정식을 만족한다.

$$P(A + \alpha I) + (A + \alpha I)^T P - P B \hat{R}^{-1} B^T P + Q = 0 \tag{26}$$

위의 식은 가중 LQ 조정기[9]에서 제어 이득을 구하기위한 방정식과 동일하다. 따라서 일반적인 대수 리카티 방정식 해의 존재에 대한 정리를 사용할 수 있으며 이는 다음과 같다.

정리 3][9]

시스템 (Σ) 가 다음의 조건을 만족하면

조건 a) $[A,B]$ 가 가제어성을 만족한다.

조건 b) $[A,Q^{1/2}]$ 가 가관측성을 만족한다.

조건 c) Q 가 준정칙 행렬이다.

조건 d) $\hat{R}$ 가 정칙 행렬이다.

식(29)는 유일한 정칙행렬 해를 갖는다.

증명 : 참고 문헌 참조 ■

위의 정리를 정리 2에 적용하기 위하여서는 정리 2의 $\hat{R}^{-1}$를 정칙행렬로 만드는 정칙행렬 R^{-1}가 존재하여야 한다. 이는 다음의 보조정리로 정칙행렬 R^{-1}가 존재를 증명할 수 있다.

보조정리 3]

정칙행렬 R^{-1}가 rI ($r > 0$, I는 단위행렬)이면, 어떤 ε에 대하여 $R^{-1}-\varepsilon I-R^{-2}/(9\varepsilon)$ 는 항상 정칙행렬이 된다.

증명 :

R^{-1}가 rI이므로 $R^{-1}-\varepsilon I-R^{-2}/(9\varepsilon)$이 정칙행렬이 되기위하여서는 다음 식을 만족하여야 한다.

$$r-(\varepsilon+r^2/(9\varepsilon)) > 0$$

ε를 $r/3$으로 결정하면 $r-(\varepsilon+r^2/(9\varepsilon))$ 는 $2r/3$ 과 같다.

따라서,

$$R^{-1}-\varepsilon I-R^{-2}/(9\varepsilon) > 0 \qquad (R^{-1} = rI,\ \varepsilon = r/3)$$

(모든 $r > 0$ 에 대하여) ■

식 (24)-(26) 에 의한 보장 성능 제어의 폐루루우프 안정성은 다음 정리로 보일 수 있다.

정의 2]

불확실한 시스템 에 있어서 모든 가능한 불확실 변수 r 과 s 에 대하여 폐루우프 시스템의 리아프노프 함수 $V(x,t)=x^T(t)Px(t)$ 의 미분치인 $L(x,t)$가 부등식 (27)을 만족하도록 하는 초기값이 0 이고 연속적인 제어입력 $u(\cdot):R^n\rightarrow R^m$ 이 존재하고 nxn 차원의 정칙 대칭 행렬 P 와 양의 정수 μ가 존재하면 불확실한 시스템이 재곱적으로 안정화 (quadratically stabilizable) 하다고 한다.

$$L(x,t) \le -\mu \|x\|^2 \qquad (27)$$

정리 4]

식 (24)와 (26)에 의하여 구성되는 폐루우프 시스템은 리아프노프 함수 $V(x,t)=x^T(t)Px(t)$에 대하여 안정하다.

증명 :

$$\begin{aligned} L(x,t) &= 2x^T(t)PAx(t) + 2x^T(t)P\Delta A(r)x(t) \\ &\quad - 2x^T(t)P\Delta B(s)R^{-1}B^TPx(t) - 2x^T(t)PBR^{-1}B^TPx(t) \\ &\le 2x^T(t)PAx(t) + 2\alpha x^T(t)Px(t) \\ &\quad + \varepsilon x^T(t)PBB^TPx(t) + x^T(t)PBR^{-1}R^{-1}B^TPx(t)/(9\varepsilon) \\ &\quad - x^T(t)PBR^{-1}B^TPx(t) \\ &= -x^T(t)Qx(t) \le -\lambda_{min}(Q)\|x(t)^2\| \qquad (28) \end{aligned}$$

■

5. 결 론

본 논문에서는 시스템 행렬과 입력 분산 행렬에 크기를 알 수 있는 불확실성이 존재하는 시스템의 안정화 제어 기법을 보장 성능 제어 기법을 이용하여 설계하였다. 본 논문에서 구한 안정화 제어 이득은 대수 리카티 방정식으로 얻을 수 있으며 이는 가중 LQ 조정기 문제의 방정식과 같은 형태를 지닌다. 따라서, 제어 이득 선정에 있어 계산상의 어려움을 극복할 수 있으며 또한 해의 존재 유무 및 유일성을 보장받을 수 있다.

참고 문헌

[1] S.S.L. Chang and T.K.C. Peng, " Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters", *IEEE Trans. Automat. Control* 17 (1972) 474.

[2] I.R.Petersen, " A stabilization algcrithm for a class of uncertain linear systems", *Sytem & Control Letters* 8 (1987), 351.

[3] I.R.Petersen, " Structure stabilization of uncertain systems : Necessity of the matching condition", SIAM *J. Control and Optim.* 23 (1985), 286.

[4] I.R.Petersen and C.V.Hollot, " A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear syatems" , *Automatica* 22 (July 1986).

[5] W.E.Schmitendorf, " Designing stabilizing controllers for uncertain systems using the Riccati equation approach", *IEEE Trans.Automat. Control* 33 (1988) 376.

[6] I.R.Petersen, " Stabilization of an uncertain linear system in which uncertain paremeters enter into input

matrix ", SIAM *J. Control and Optim.* 26 (1988) 1257.

[7] J.Kawaguchi, Synthesis of insensitive controllers in linear quadratic control problems , ISAS Report 605 (1983).

[8] E. Noldus," Design of robust state feedback laws ", *Internat. J. Control* 35 (1982) 935.

[9] Anderson, B. D. O. and Moore, J. B., *Linear Optimal Control* ,Englewood Cliffs, N. J.:Prentice-Hall, (1971).