

# 개선된 보간 알고리즘을 이용한 $H^\infty$ -최적화

이태영      윤한오      박홍배

경북대학교 공과대학 전자공학과

## $H^\infty$ -optimization using the modified interpolation algorithm

Tae Young Lee, Han O Yun, and Hong Bae Park

Dept. of Electronics, Kyungpook Nat'l. Univ.

**Abstract:** An algorithm of finding a solution to an  $H^\infty$ -minimization problem is proposed, and the solution is obtained explicitly in terms of closed-form. We construct an optimal controller subject to the interpolation constraints such that  $H^\infty$ -norm and the minimized value of transfer function matrix are equal.

### 1. 서론

불확실성(uncertainty)을 가지는 폐루프 제어시스템에서 견실한 안정화(robust stabilization)를 얻기 위한 제어기 설계 문제가 많은 관심을 받고 있다.  $H^\infty$  제어기는 이러한 시스템의 견실한 안정을 보장해 주며  $H^\infty$  최적화한 시스템 전달함수의  $H^\infty$ -norm을 최소화시키는 제어기를 설계하는 것이다.

폐환시스템의  $H^\infty$ -최적화문제는 Zames[1]에 의해 소개되었으며 Chang과 Pearson[1]은 inner-outer 분해를 이용하여 행렬 Nevanlinna-Pick 보간이론(interpolation theory)으로  $H^\infty$ -최적화문제를 해결하였다. 최근에 Kimura[6]는 각 보간점에서 규정된 방향으로 보간문제를 해결하는 새로운 보간 알고리즘인 directional interpolation 이론을 제안하였다.  $H^\infty$  최적화 문제의 가장 중요한 점은 그 해가 전대역통과(all pass) 형태를 가져야 하는 것이다. 그러나 지금까지 알려진 보간이론들은 전대역통과 형태를 갖는 해를 보장하지 않는다.

본 논문에서는 식(1)의 norm을 최소화시키는 견실한 제어기 설계문제를 고려하고자 한다.

$$\|T_* \Delta_m\|_\infty = \sup_{\omega} \bar{\sigma}[T_* \Delta_m(j\omega)] \quad (1)$$

여기서  $T_*$ 은 폐루프 전달함수,  $\Delta_m$ 은 승산불확실성(multiplicative uncertainty)이며,  $\bar{\sigma}[\cdot]$ 는 행렬  $[\cdot]$ 의 가장 큰 singular value이다. 또한 변형된 directional interpolation을 이용한 보간 알고리즘은 일반적인 알고리즘과는 달리 반복적인 계산과정을 요하지 않으며 여기서 얻어지는 해는 전대역통과 형태를 가진다.

### 2. 수학적 배경

이 장에서는 본 논문에 관계되는 수학적 배경과 용어를 살펴 보기로 한다.

#### Hankel-norm

전달함수행렬, 즉  $G = C(sI - A)^{-1}B + D$  에서 시스템이 가 제어(controllable)이고, 가관측(observable)하다고 가정하면, Lyapunov 방정식

$$\begin{aligned} AP + PA^* + BB^* &= 0 & (2) \\ A^*Q + QA + C^*C &= 0 & (3) \end{aligned}$$

의 해  $P, Q$ 를 구하면, 행렬  $G$ 의 Hankel-norm은

$$\|G\|_H = \bar{\sigma}[(PQ)^{1/2}] \quad (4)$$

과 같이 구할 수 있다.

#### Lebesgue space

허수축을 제외한 전구간  $(-\infty, \infty)$ 에서 전달함수가 한계범위(bounded)를 가지는 영역이다.

#### 정의 2.1

전달함수  $G$ 가  $L^\infty$ 에 속할 필요충분조건은  $\bar{\sigma}(G(j\omega)) \leq \infty$  이고,  $L^2$ 에 속할 필요충분조건은

$$\int_{-\infty}^{\infty} G^*(j\omega)G(j\omega) d\omega < \infty \quad (5)$$

이다.

#### Hardy space

허수축을 포함한 RHP(right half plane)에서 해석적이며 전달함수가 한계범위를 가지는 영역이다.

#### 정의 2.2

전달함수  $G$ 가  $H^\infty$ 에 속할 필요충분조건은  $G$ 가 ORHP(open right half plane)에서 해석적이며

$$\sup_{\omega} \bar{\sigma}[G(j\omega)] < \infty \quad (6)$$

를 만족해야 한다.

**보조정리 2.1**

전달함수행렬  $G$ 의 우소인수분해(r.c.f.: right coprime factorization) 및 좌소인수분해(l.c.f.: left coprime factorization)는  $G = ND^{-1} = \hat{D}^{-1}\hat{N}$  와 같이 쓸 수 있으며,  $N, D, \hat{N}, \hat{D}$ 는 Hardy space 에 속하는 행렬이며, Bezout identity, 즉

$$XN + YD = I \quad (7)$$

$$\hat{N}\hat{X} + \hat{D}\hat{Y} = I \quad (8)$$

를 만족하는 Hardy space  $H^\infty$ 에 속하는  $X, Y, \hat{X}, \hat{Y}$ 가 항상 존재한다.

**보조정리 2.2**

전달함수행렬  $G = C(sI-A)^{-1}B + D$ 가 주어질 때 상수행렬  $F$ 와  $H$ 는 식(9)와 (10)의 행렬  $A_F$ 와  $A_H$ 가 안정하도록, 즉 모든 고유값이 좌반부에 있도록 선택할 수 있다.

$$A_F = A + BF \quad (9)$$

$$A_H = A + HC \quad (10)$$

이와같이 얻어진 행렬  $F$ 와  $H$ 로부터

$$C_F = C + DF \quad (11)$$

$$B_H = B + HD \quad (12)$$

를 얻을 수 있다. 이상 얻어진 값들을 이용하여 주어진 함수를 좌·우소인수 분해하면

$$D = [A_F, B, F, I] \quad (13)$$

$$N = [A_F, B, C_F, D] \quad (14)$$

$$\hat{D} = [A_H, H, C, I] \quad (15)$$

$$\hat{N} = [A_H, B_H, C, D] \quad (16)$$

을 얻고, Bezout identity의 해는 다음과 같이 얻어진다.

$$X = [A_F, -I, C_F, I] \quad (17)$$

$$Y = [A_F, B, C_F, D] \quad (18)$$

$$\hat{X} = [A_H, -B_H, F, I] \quad (19)$$

$$\hat{Y} = [A_H, B_H, C, D] \quad (20)$$

**3.  $H^\infty$ -최적화**

그림 3.1은 불확실성을 갖는 일반적인 다변수 귀환시스템이다. 여기서  $P_0$ 는 공칭플랜트,  $\Delta$ 는 불확실성,  $C$ 는 시스템을 안정화시키는 제어기이다. 시스템이 유한한 차원을 가지며 선형 시불변함수로 주어질 때 최적제어기를 설계하고자 한다.

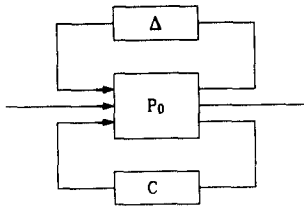


그림 3.1 불확실성을 갖는 시스템  
Fig. 3.1 System with uncertainty.

**정의 3.1**

$M(R(s))$ 에 속하는 플랜트  $P$ 가 주어졌을 때 이를 안정화시키는 제어기  $C$ 는 다음 식으로 주어진다.

$$C = (Y - R\hat{N})^{-1}(X + R\hat{D}), \det(Y - R\hat{N}) \neq 0 \quad (21)$$

$$= (\hat{X} + DR)(\hat{Y} - NR)^{-1}, \det(\hat{Y} - NR) \neq 0$$

여기서  $R$ 은 우반평면에서 해석적인 실계수 유리행렬의 자유매개변수이며 각각의 쌍  $N, D$ 와  $\hat{N}, \hat{D}$ 는  $P$ 의 좌·우 소인수분해,  $X, Y, \hat{X}, \hat{Y}$ 는 Bezout identity의 해이다. 기호  $M(R(s))$ 는 행렬의 각 원소들이 실계수를 가지는 행렬을 나타낸다.

그림 3.1에서 불확실성  $\Delta$ 를 가지는 실제적인 플랜트  $P$ 는 공칭 플랜트  $P_0$ 와 우반부에서 같은 수의 극점을 가져야 하나 극점의 위치는 일치할 필요가 없다. 본 논문에서 고려되는 승산불확실성의 경우 플랜트  $P$ 는

$$P = (I + \Delta_m)P_0 \quad (22)$$

와 같이 표현되며 승산불확실성  $\Delta_m$ 은

$$\|\Delta_m(j\omega)\| < |r(j\omega)|, \quad \forall \omega \quad (23)$$

와 같이 주어지며  $r$ 은 안정한 유리함수이다. 승산불확실성을 가지는 경우 그림 3.2의 시스템을 안정화시키는 제어기를 얻을 수 있다.

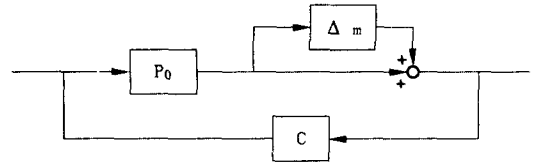


그림 3.2 승산불확실성 시스템  
Fig. 3.2 Multiplicative uncertainty system.

만약 제어기  $C$ 가 공칭플랜트  $P_0$ 를 안정화시킬때,  $\|P_0C(I + P_0C)^{-1}r\|_\infty < 1$  이면 페루프는 안정하다고 말할 수 있다. 나아가 이러한 조건이 만족하지 않을 때는 시스템을 불안정화시키는 불확실성  $\Delta_m$ 이 존재한다. 따라서 이러한 불확실성을 갖는 시스템의 견실한 안정화를 피하고 안정여유도(stability margin)를 최대화시키기 위해 식(24)와 같은  $H^\infty$ 최적화문제를 다루게 된다.

$$\text{minimize } \|P_0C(I + P_0C)^{-1}r\|_\infty \quad (24)$$

식(24)는

$$\|P_0C(I + P_0C)^{-1}r\|_\infty = \|NXr + NRDr\|_\infty \quad (25)$$

로 쓸 수 있고, 식(25)를 최소화시키는  $R$ 을 찾기 위해 이를 다시 쓰면

$$\Psi = T_0QT_1 - T_2 \quad (26)$$

와 같으며,  $T_0 = N, T_1 = D, Q = Rr, T_2 = -NXr$  이다. 이제  $H^\infty$ 최적화문제는  $\|\Psi\|_\infty$ 의 norm을 최소화시키는  $Q$ 를 찾는 문제로 귀결되며, 이러한  $Q$ 는

$$\Psi^H \Psi = \lambda_m^2 \cdot I \quad (27)$$

를 유도하는 해로 알려져 있다. 여기서  $(\cdot)^H$ 는 Hermitian 전치이고,  $\lambda_m$ 은  $\|\Psi\|_\infty$ 의 최소화된 값. 즉

$$\lambda_m = \inf \|\Psi\|_\infty \quad (28)$$

이다.

#### 4. 최적제어기 설계

이 장에서는 3장에서 논의한 이론을 이용하여 건설한 최적 제어기 설계를 하고자 한다. 먼저 식(26)을 최소화 값  $\lambda_m$ 으로 나누면

$$\Phi = \frac{1}{\lambda_m} \Psi \quad (29)$$

$$= T_0 Q T_1 - T_2 \quad (30)$$

와 같이 되고,  $Q = (1/\lambda_m)Q$ ,  $T_2 = (1/\lambda_m)T_2$ .  $\Phi$ 는 식(31)을 만족하는  $H^\infty$ 에 속하는 inner 형태의 행렬이다.

$$\Phi^H \Phi = I \quad (31)$$

##### 정리 4.1

행렬  $G \in H^\infty$ 가 주어질 때, 행렬  $Y \in H^\infty$ 에 대하여

$$\|G\|_H \leq \|G + Y^H\|_\infty \quad (32)$$

을 만족하며, 식(32)으로부터

$$\bar{\sigma}(G) \equiv \|G\|_H = \inf_{Y \in H^\infty} \|G + Y^H\|_\infty \quad (33)$$

을 얻을 수 있다. 이제  $\|\Psi\|_\infty$ 의 최소화 값  $\lambda_m$ 을 구하기 위해  $D$ 를 outer-inner 분해하여 식(26)을 다시 쓰면

$$\|\Psi\|_\infty = \|NXr + NQD_0 D_i\|_\infty \quad (34)$$

$$= \|NXr D_i^{-1} + NQD_0\|_\infty \quad (35)$$

$$= \|G + S\|_\infty \quad (36)$$

이며, 여기서  $G = NXr D_i^{-1}$ ,  $S = NQD_0$ 이고,  $G$ 를 안정한 부분  $G$ -와 불안정한 부분  $G$ -로 나누면 식(36)은

$$\|\Psi\|_\infty = \|G_+ + G_- + S\|_\infty \quad (37)$$

$$= \|G_+ + Y\|_\infty \quad (38)$$

$$= \|G_+^H + Y^H\|_\infty \quad (39)$$

로 쓸 수 있고, 여기서  $G_+^H$ 는 단지 안정한 극점들만 가지며  $Y^H$ 는 불안정한 극점들만 가진다. 그래서  $\lambda_m$ 은

$$\lambda_m = \inf \|\Psi\|_\infty \quad (40)$$

$$= \inf_{Y \in H^\infty} \|G_+^H + Y^H\|_\infty \quad (41)$$

$$= \|G_+^H\|_H \quad (42)$$

와 같이 구할 수 있으면, 여기서  $\bar{G}_+(A, B, C, D)$ 의

Hankel-norm을 구하기 위해 균형화된 구현화(balanced realization)를 하면, 즉 두 Lyapunov 방정식

$$A\Sigma + \Sigma A^t + BB^t = 0 \quad (43)$$

$$A^t \Sigma + \Sigma A^t + C^t C = 0 \quad (44)$$

의 해는

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 I & 0 \\ 0 & \Sigma_1 \end{bmatrix} \quad (46)$$

와 같이 대각화되어야 한다. 여기서  $\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_2, \dots, \sigma_n)$  이고,  $\sigma_1 > \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$  이다. 그러므로  $G$ 의 Hankel-norm은  $\sigma_1$ 이며, 이 값이  $\|\Psi\|_\infty$ 의 최소화 값  $\lambda_m$ 이다.

이제 변형된 보간 알고리즘을 이용하여 자유매개변수  $R$ 을 구하기 위해 먼저  $T_0$ 의 right invertible 전달함수의 영점들을  $s_i$ ,  $i = 1, \dots, \rho_0$ 로  $T_1$ 의 left invertible 전달함수의 영점들은  $s_j$ ,  $j = 1, \dots, \rho_1$ 으로 정의하고, 영점  $s_i$ ,  $s_j$ 에서 행과 열의 영방향 벡터를 각각  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, \rho_0$ 와  $u_j$ ,  $j = 1, \dots, \rho_1$ 으로 정의할 수 있다. 이때 이들 모든 영점은 중근을 가지지 않는다고 가정한다. 이제 식(30)으로부터

$$w_i = -\frac{1}{\lambda_m} T_2(s_i^t) u_i, \quad i = 1, \dots, \rho_1 \quad (46)$$

$$q_i^t = -\frac{1}{\lambda_m} v_i^t T_2(s_i^0), \quad i = 1, \dots, \rho_0 \quad (47)$$

와 같이 정의하면 식(30)을 만족하는 보간조건은

$$w_i = \Phi(s_i^t) u_i, \quad i = 1, \dots, \rho_1 \quad (48)$$

$$q_i^t = v_i^t \Phi(s_i^0), \quad i = 1, \dots, \rho_0 \quad (49)$$

이다. 따라서 보간문제는  $\Phi$ 를

$$\Phi = [I - C(sI + A)^{-1} C^t] \Theta \quad (50)$$

와 같이 둘으로써 해를 구할 수 있고, 여기서  $\Theta$ 는

$$\Theta^t \Theta = I \quad (51)$$

을 만족하는 상수행렬이다.

##### 보조정리 4.1

식(50)의  $\Phi$ 가 식(31)을 만족할 충분조건은

$$A + A^t = C^t C \quad (52)$$

이다.

##### 보조정리 4.2

행렬  $\bar{F}$ 를

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} \bar{F}_{11} & \bar{F}_{12} \\ \bar{F}_{21} & \bar{F}_{22} \end{bmatrix} \quad (53)$$

와 같이 정의할 때 행렬  $\bar{F}$ 가 nonnegative-definite이면 식 (48)과 식(49)의 주어진 보간조건을 만족하는 식(50)의  $\Phi$ 가 존재한다. 여기서

$$\bar{F}_{k,1} \equiv \{\bar{f}_{i,j}^k\}, \quad k, i = 1, 2 \quad (54)$$

이고,  $\bar{f}_{i,j}^k$ 는 각각

$$\bar{f}_{i,j}^1 \equiv (\bar{s}_i^1 + s_j^1)^{-1} \{u_i u_j^1 - w_i w_j^1\} \quad (55)$$

$i, j = 1, \dots, \rho_1$

$$\bar{f}_{i,j}^2 \equiv (s_i^0 - s_j^0)^{-1} \{q_i^0 u_j - v_i^0 w_j\} \quad (56)$$

$i = 1, \dots, \rho_0$   
 $j = 1, \dots, \rho_1$

$$\bar{f}_{i,j}^2 = \{\bar{f}_{i,j}^1\}^* \quad (57)$$

$$\bar{f}_{i,j}^2 \equiv -(s_i^0 + \bar{s}_j^0)^{-1} \{q_i^0 u_j - v_i^0 w_j\} \quad (58)$$

$i, j = 1, \dots, \rho_0$

이다.

#### 정리 4.2

식(53)을 만족하는 nonnegative-definite인  $F$ 가 주어졌을 때 보간조건 식(48)과 (49)을 만족하고,  $H^\infty$ 에 속하는 inner 행렬  $\Phi$ 에 대한 충분조건은

$$\Phi = [I - C(sF + A)^{-1}C^*] \Theta \quad (59)$$

이며, 여기서

$$\hat{C} = \Theta \hat{U} - \hat{W} \quad (60)$$

$$\hat{A} = \hat{C}^* \Theta \hat{U} - \bar{F} \Lambda \quad (61)$$

이다. 또한

$$\hat{U} = [U_1 \ Q_0] \quad (62)$$

$$\hat{W} = [W_1 \ V_0] \quad (63)$$

$$\Lambda = \text{diag} \{ \Lambda_1, -\Lambda_0 \} \quad (64)$$

이며 여기서

$$U_1 = [u_1, \dots, u_{\rho_1}] \quad (65)$$

$$Q_0 = [q_1, \dots, q_{\rho_0}] \quad (66)$$

$$W_1 = [w_1, \dots, w_{\rho_1}] \quad (67)$$

$$V_0 = [v_1, \dots, v_{\rho_0}] \quad (68)$$

$$\Lambda_1 = \text{diag} \{ s_1^1, \dots, s_{\rho_1}^1 \} \quad (69)$$

$$\Lambda_0 = \text{diag} \{ s_1^0, \dots, s_{\rho_0}^0 \} \quad (70)$$

이다.

식(30)으로부터 제어기의 자유매개변수  $R$ 은

$$R = rT_0(\lambda_m U + T_2)T_1 \quad (71)$$

와 같이 얻을 수 있으며, 식(21)로부터 견실한 제어기  $C$ 를 찾을 수 있다.

## 5. 예제

이 장에서는 앞에서 논의한 이론의 타당성을 예제를 통하여 확인한다.

공칭플랜트  $P_0$ 와 불확실성  $r$ 이

$$P_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 2 \\ \frac{1}{s+1} & \frac{s+1}{s-2} \end{bmatrix} \quad r = \frac{s+1}{5(s+2)} \quad (72)$$

로 주어진 시스템을 생각하자.  $P_0$ 의 좌·우 소인수분해를 하기 위해 minimal 구현화를 하면

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} & D &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (73)$$

을 얻을 수 있고 행렬  $F$ 와  $H$ 를 다음값

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (74)$$

로 선택하면  $A_F$ 와  $A_H$ 는 각각

$$A_F = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad A_H = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \quad (75)$$

로 얻어진다. 그리고  $C_F$ ,  $B_H$ 는

$$C_F = \begin{bmatrix} 1 & -10 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad B_H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (76)$$

로 얻어진다. 이들값에서  $P_0$ 의 좌·우 소인수분해는

$$D = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s+2} & 0 \\ 0 & \frac{s-2}{s+3} \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2(s-2)}{s+3} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{s+1}{s+3} \end{bmatrix} \quad (77)$$

$$\hat{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{s-2}{s+4} \end{bmatrix} \quad \hat{N} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 2 \\ \frac{1}{(s+1)(s+4)} & \frac{s+1}{s+3} \end{bmatrix}$$

로 얻을 수 있으며 Bezout identity의 해는

$$X = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-20}{s+3} \\ 0 & \frac{s-1}{s+3} \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{-10}{s+3} \end{bmatrix} \quad (78)$$

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s+1} & 0 \\ \frac{-10}{(s+1)(s+4)} & \frac{s-1}{s+4} \end{bmatrix} \quad \hat{Y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{-10}{s+4} \end{bmatrix}$$

로 구해진다. 식(30)으로부터

$$T_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2(s-2)}{s+3} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{s+1}{s+3} \end{bmatrix} \quad (79)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\ + \frac{-2}{s+3} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (80)$$

이고

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{s-2}{s+4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{-6}{s+4} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (81)$$

이고, 식(34)에서 (39)까지의 식으로부터  $G^H$ 는

$$G^H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{0.6}{s+2} & \frac{-0.528}{s+3} \end{bmatrix} \quad (82)$$

이다. 여기서  $G^H$ 의 Hankel-norm은 0.1998099이므로  $\lambda_m = 0.1998099$ 이다. 식(80)과 (81)로부터  $T_0$ 와  $T_1$ 의 행과 열방향의 영벡터는

$$u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (83)$$

$$v_1^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad v_2^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (84)$$

이고, 식(48)과 (49)로부터

$$w_1 = -\frac{1}{\lambda_m} T_2(4) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2405158 \\ 0.2944219 \end{bmatrix} \quad (85)$$

$$q_1^t = -\frac{1}{\lambda_m} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} T_2(1) = \begin{bmatrix} 0.3336505 & 0.240969 \end{bmatrix} \quad (86)$$

$$q_2^t = -\frac{1}{\lambda_m} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} T_2(3) = \begin{bmatrix} 0.2001903 & 0.227624 \end{bmatrix} \quad (87)$$

을 얻을 수 있다. 그리고 보조정리 4.2로부터

$$F = \begin{bmatrix} 0.10960531 & 0.0001513 & -0.066799 \\ 0.00015132 & 0.4153055 & -0.030411 \\ -0.06679822 & -0.0304111 & 0.151352 \end{bmatrix} \quad (88)$$

를 얻으며,  $F$ 가 nonnegative-definite이므로 정리 4.2로부터

$$\hat{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0.3336505 & 0.2001903 \\ 1 & 0.2409698 & 0.2276238 \end{bmatrix} \quad (89)$$

$$\hat{W} = \begin{bmatrix} 0.2405158 & 1 & 1 \\ 0.2944219 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (90)$$

와 같이 구해지며, 이들 값으로부터

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} -0.240516 & -0.6663495 & 0.200190 \\ 0.705578 & 0.2409698 & -0.772376 \end{bmatrix} \quad (91)$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0.277844 & 0.08993 & -0.0879392 \\ 0.240365 & 0.25104 & -0.1697797 \\ -0.505181 & -0.14974 & 0.3183207 \end{bmatrix} \quad (92)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad (93)$$

을 얻는다. 식(59)로부터  $\Phi$ 를 구하면

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \quad (94)$$

$$\phi_{11} = \frac{(s-0.465)((s+1.26)^2 + 1.42^2)}{(s+0.468)((s+1.6)^2 + 1.01^2)}$$

$$\phi_{12} = \frac{1.98(s-0.0238)(s+0.425)}{(s+0.468)((s+1.6)^2 + 1.01^2)}$$

$$\phi_{21} = \frac{1.98(s+0.0238)(s-0.425)}{(s+0.468)((s+1.6)^2 + 1.01^2)}$$

$$\phi_{22} = \frac{(s+0.465)((s-1.26)^2 + 1.42^2)}{(s+0.468)((s+1.6)^2 + 1.01^2)}$$

이고,  $\Theta$ 는 단위행렬로 선택했다. 그리고 식(71)으로부터 자유매개변수  $R$ 을 구하면

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \quad (95)$$

$$R_{11} = \frac{0.589(s-0.325)(s+1.15)[(s-1.05)^2+1.54^2]}{(s+2.25)[(s+2.54)^2+0.464]}$$

$$R_{12} = \frac{(s+0.468)(s+1)[(s+1.6)^2+1.01^2](s+2)}{(s+2.6)^2(s+2.82)}$$

$$R_{21} = \frac{-0.00038(s+0.46)(s+0.79)[(s+1.43)^2+0.78]^2}{(s-2)(s+4.07)(s+5.81)(s+34.9)(s-342)}$$

$$R_{22} = \frac{(s+0.468)(s+1)[(s+1.6)^2+1.01^2](s+2)}{(s+2.82)(s+3)^3(s+4)}$$

$$R_{11} = \frac{0.395[(s+0.641)^2+1.06^2](s-1.48)(s+1.55)}{(s+2.41)[(s+2.48)^2+0.414^2]}$$

$$R_{21} = \frac{(s+0.468)(s+1)[(s+1.6)^2+1.01^2](s+2)}{(s+2.6)^2(s+2.82)}$$

$$R_{22} = \frac{-0.00019(s+4.71)[(s+1.1)^2+0.742^2](s-2)}{[(s+2.1)^2+1.14^2](s+2.82)(s+3.9)(s-30)} \cdot \frac{(s+0.468)(s+1)[(s+1.6)^2+1.01^2](s+2)}{(s+2.82)(s+3)^3(s+4)}$$

이며, 주어진 플랜트를 안정화시키는 제어기는 식(21)로부터 얻을 수 있다.

## 6. 결론

본 논문에서는 Hankel-norm과 변형된 보간 알고리즘을 이용하여 선형 다변수시스템의  $H^\infty$  최적화 문제를 다루었다. 이때 얻은 해는 inner 형태로부터 얻어진 전대역통과 형태를 갖는다.

제한된 알고리즘으로  $H^\infty$  최적화 문제를 접근할 때 일반적인 보간 알고리즘과는 달리 반복적인 계산량이 없음을 알 수 있었다. 그러나 제한한 보간 알고리즘을 이용하여 설계된 제어기는 다소 높은 차수를 가지므로 앞으로 계속 연구되어야 할 과제이다.

## 참 고 문 헌

[1] B.C. Chang and J.B. Pearson, "Optimal disturbance reduction in linear multivariable systems," *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, vol. AC-29, no. 10, pp. 880-888, Oct. 1984.

- [2] B.S. Chen and C.C. Kung, "The robustness optimization of a multivariable feedback system in Hankel norm space," *Int. J. Contr.*, vol. 39, no. 6, pp. 1211-1228, 1984.
- [3] B.A. Francis, *A Course in  $H^\infty$  Control Theory*, Springer-Verlag, 1987.
- [4] B.A. Francis, J.W. Helton, and G. Zames, " $H^\infty$  optimal feedback controllers for linear multivariable systems," *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, vol. AC-29, no. 10, pp. 889-899, Oct. 1984.
- [5] K. Glover, "All optimal Hankel-norm approximation of linear multivariable systems and their  $L^\infty$  error bounds," *Int. J. Contr.*, vol. 39, pp. 1115-1193, June 1984.
- [6] H. Kimura, "Directional interpolation approach to  $H^\infty$  optimization and robust stabilization," *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, vol. 39, no. 12, pp. 1115-1193, Dec. 1987.
- [7] J. M. Maciejowski, *Multivariable Feedback Design*, Addison Wesley, 1989.
- [8] U. Shaked, "A two-sided interpolation approach to  $H^\infty$  optimization problems," *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, vol. 34, no. 12, pp. 1285-1290, Dec. 1989.
- [9] M. Vidyasagar, *Control System Synthesis: A Factorization Approach*, The MIT Press, 1985.
- [10] M. Vidyasagar and H. Kimura, "Robust controllers for uncertain linear multivariable systems," *Automatica*, vol. 22, no. 1, pp. 85-94, Jan. 1986.
- [11] G. Zames, "Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformation, multiplicative seminorms, and approximate inverse," *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, vol. AC-26, no. 2, pp. 301-320, Feb. 1981.