

# Lagrange 승산자 방법을 이용한 $H^\infty$ 최적제어

○전 재완 윤한오 박홍배 김수중  
 경북대학교 공과대학 전자공학과

## $H^\infty$ Optimal Control Using the Lagrange Multiplier Method

Jae-Yoan Jeon, Han-O Yun, Hong-Bae Park, and Soo-Joong Kim  
 Dept. of Electronics, Kyungpook National University

### ABSTRACT

This paper deals with the design of feedback controllers which minimize the  $H^\infty$ -norm of the weighted sensitivity function. Using the Lagrange multiplier method and the Nevanlinna-Pick interpolation theory, an algorithm which stabilizes a plant and makes the output to track the reference signal is proposed.

### 1. 서론

하중 감도함수의  $H^\infty$ -norm을 최소화시키는 페루프 제어기 설계문제에 관한 연구가 많이 다루어지고 있다. 궤환시스템에 대한  $H^\infty$  최적화 문제는 Zames[12]에 의해 처음으로 소개되었고 Zames와 Francis[13]는 SISO 시스템에서  $H^\infty$ -norm은 Wiener-Hopf 접근방식인  $H^2$ -norm에 비해 플랜트의 주파수응답에 나타날 수 있는 불확실성을 다루기 쉽다는 것을 밝히는  $H^\infty$  최적화 문제를 다루었다. 또한 불확실성이 증가할 때 성능이 어떻게 떨어지는가에 대한 상관관계를 보여주었으며 Doyle와 Stein[2]은 주어진 교란 한계치에 대한 페루프 안정조건을 구했다. 1984년 Kimura[8]가 Nevanlinna-Pick이론과 Youla 변수화이론을 조합하여 SISO 시스템에서의 견실한 안정화(robust stabilization) 및 성능최적화(performance optimization)에 대한 이론적인 연구결과를 발표하였고, 1984년 Francis[5]등에 의해 MIMO 시스템에서의 최적  $H^\infty$  감도해석 방법이 다루어졌으며 1986년 Vidyasagar와 Kimura[11]에 의해 좀 더 일반화되었다.

본 논문에서는 단위궤환을 가진 SISO 시스템에 기존의 제어이론 및 Nevanlinna-Pick 보간 알고리즘을 이용하여 안정화 및 하중 감도함수의 최적화 문제를 다루었으며,  $H^\infty$ -norm의 최소값을 구하기 위한 새로운 방법을 도입하였다. 즉 유한한 시간영역에서의  $H^\infty$  제어에 관련된 성능평가 지수(performance index)로부터 Lagrange 승산자 방법을 이용하여 최적치를 구하고 구해진 값을 Nevanlinna-Pick 보간 알고리즘에 이용하여 제어기를 설계하였다. 설계된 제어기는 주어진 시스템을 안정화시키고 출력이 입력을 따라갈 수 있도록 하는 최적제어기이다.

### 2. 수학적 배경

Hardy space  $H^p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ )는 ORHP(open right half plane)에서 해석적인 복소행렬  $G(s)$ 의 Banach space이며 다음과 같이 한계범위를 가지는 영역이다.

$$\|G(s)\|_p \equiv \sup_{\sigma > 0} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(\sigma + j\omega)|^p d\omega \right]^{1/p} < \infty, \quad p < \infty$$

$$\|G(s)\|_\infty \equiv \sup_{\text{Re}(s) > 0} |G(s)| < \infty \quad (2.1)$$

$H^p$ 에 속하는 함수  $G(s)$ 의 영역은 허수축상으로 확장될 수 있으며 이때 허수축상만에서 고려된  $G(s)$ 의 norm은 다음과 같이 간단한 형태로 쓸 수 있다.

$$\|G(s)\|_p \equiv \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^p d\omega \right]^{1/p} < \infty, \quad p < \infty$$

$$\|G(s)\|_\infty \equiv \text{ess sup}_\omega |G(j\omega)| \quad (2.2)$$

실계수를 가진 유리함수의 집합을  $R(s)$ 라 하고

$$RH^\infty \equiv H^\infty \cap R(s) \quad (2.3)$$

로 두면  $RH^\infty$ 는 실계수를 가지며 안정한 진유리함수(proper rational function)이다.

모든 실함수는 두개의  $H^\infty$  함수들의 비(ratio), 즉  $G(s) = N(s)/D(s)$ 로 나타낼 수 있으며 여기서  $N(s)$ 와  $D(s)$ 는 소인수(coprime)이다. 만약  $G(s) = N(s)/D(s)$ 의 표현을 가지고  $N(s)$ 와  $D(s)$ 가  $RH^\infty$ 이면  $RH^\infty$ 에 속하는 해  $X(s)$ ,  $Y(s)$ 는 Bezout identity

$$X(s)N(s) + Y(s)D(s) = 1 \quad (2.4)$$

로부터 얻어진다.

### 3. 안정화 및 성능최적화

이 장에서는 Lagrange 승산자 방법을 이용하여  $H^\infty$ -norm을 찾고 Nevanlinna-Pick 보간 알고리즘을 이용한 최적제어기 설계에 대해 알아보려고 한다.

3.1 상태공간에서의  $H^\infty$  성능평가 지수  
일반적인 선형 시불변 플랜트는 상태변수 모델

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A x + B u \\ y &= C x + D u \end{aligned} \quad (3.1)$$

로 표현할 수 있으며,  $x, y, u$ 는 각각 상태벡터, 출력벡터 및 입력벡터이다. 또한 상태벡터  $x$ 는 상태전이행렬(state transition matrix)  $\Omega(t, \tau)$ 를 사용하여

$$x(t) = \Omega(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Omega(t, \tau)B(\tau)u(\tau) d\tau \quad (3.2)$$

와 같이 쓸 수 있으며,  $x_0$ 는 상태벡터  $x$ 의 초기치이다.

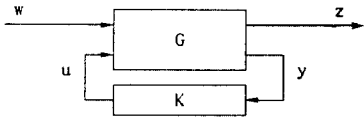


그림 1. 표준 폐환시스템  
Fig. 1. The standard feedback system.

그림 1과 같은 폐환시스템을 생각하자. 여기서  $w$ 는 외부 입력(명령신호, 외란, 측정잡음 등),  $z$ 는 페루프 시스템의 상태를 결정하는 신호의 제어될 입력,  $u$ 는 제어입력,  $y$ 는 측정된 출력이다.  $G$ 는 섭동을 가지지 않는 공칭플랜트(nominal plant),  $K$ 는 시스템을 안정화시키는 제어기로 각각 실계수를 가지는 진유리함수이다.  $G$ 는

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

와 같이 표현할 수 있으므로

$$z = G_{11}w + G_{12}u, \quad y = G_{21}w + G_{22}u, \quad u = Ky \quad (3.4)$$

이다. 전달함수  $w/z$ 의  $H^\infty$ -norm을 최소화시키면서 시스템을 안정화시키는 제어기를 설계하는 것이 표준  $H^\infty$ 문제(standard  $H^\infty$  problem)이며 제어기는 실계수를 가지는 진유리함수이다. 1984년 Doyle[1]은 관측자기준 제어기(observer-based controller)  $Q$ 로 플랜트에 안정한 dynamics를 첨가함으로써 시스템의 안정화를 피하였으며 그 구현화는

$$\dot{q} = \tilde{A} q + \tilde{B} \tilde{y}, \quad u_2 = \tilde{C} q + \tilde{D} \tilde{y} \quad (3.5)$$

와 같이 주어진다. 따라서  $H^\infty$ 제어문제는 전달함수  $\tilde{y}/u_2$ 를 안정하게 만드는  $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ 의 모든 집합중에서 전달함수  $w/z$ 의  $H^\infty$ -norm을 최소화시키는  $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ 를 찾는 문제로 볼 수 있다. 고정된  $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ 에 대해서

$$\lambda = \inf_w \frac{\int_0^\infty w^T(t)w(t) dt}{\int_0^\infty z^T(t)z(t) dt} \quad (3.6)$$

의 값이 정해지며 첨자  $(\cdot)^T$ 는 행렬 혹은 벡터의 전치를 나타낸다. 전달함수  $w/z$ 의  $H^\infty$ -norm은  $1/\sqrt{\lambda}$ 이고 결국  $H^\infty$ -norm을 최소화시키는 것은  $\lambda$ 의 값을 최대화시키는 문제와 동일하다.

함수  $f$ 가 안정한 유리함수이고 그 역도 안정한 유리함수이면 unit함수라고 한다. 만약  $f$ 가 unit이면

$$\sup_{s \in C_+} |1/f(s)| = \left[ \inf_{s \in C_+} |f(s)| \right]^{-1} \quad (3.7)$$

의 성질을 만족하며  $C_+$ 는 RHP(right half plane)을 나타낸다.

3.2 Lagrange 승산자 방법

이 절에서는 주어진 대가함수의 극한치를 구하기 위해 Lagrange 승산자 방법을 이용하여  $H^\infty$ -norm을 구하는 과정을 보인다.

아래와 같이 주어진 대가함수

$$J(w) = \int_{t_0}^t g(w(t), \dot{w}(t), t) dt \quad (3.8)$$

를 생각하자. 식 (3.8)의 대가함수는 제한조건

$$f_i(w(t), t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.9)$$

을 가진다. 이때  $w^*$ 에서  $J(w)$ 가 최소값을 가지도록 하는 필요조건을 구하기 위해 먼저 함수  $g_a$ 를

$$g_a(w(t), \dot{w}(t), p(t), t) \equiv g(w(t), \dot{w}(t), t) + p^T(t)[f(w(t), t)] \quad (3.10)$$

와 같이 정의하고 필요조건식

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_a}{\partial w} (w^*(t), \dot{w}^*(t), p^*(t), t) \\ - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial g_a}{\partial \dot{w}} (w^*(t), \dot{w}^*(t), p^*(t), t) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

을 찾으면 된다. 여기서  $p$ 는 Lagrange 승산자이다. 따라서 식 (3.11)을 풀면  $J(w)$ 의 값을 최소화시키는 동시에 주어진 제한 조건을 만족하는 함수를 구할 수 있다.

식 (3.7)을 이용하여 식 (3.6)을 최소화시킬려는 함수  $\mu$ 로 바꿀 수 있다. 식 (3.6)은 유한한 구간에서의 대가함수

$$\lambda = \inf_w \frac{\int_0^t w^T(t)w(t) dt}{\int_0^t z^T(t)z(t) dt} \quad (3.12)$$

로 표현되며 식 (3.12)를  $\mu$ 로 나타내면

$$\mu = \sup_w \frac{\int_0^t z^T(t)z(t) dt}{\int_0^t w^T(t)w(t) dt} \quad (3.13)$$

와 같다. 식 (3.13)의 최대치가  $\mu$ 이고,  $w$ 와  $z$ 가 스칼라이므로

$$\mu \int_0^t w^2(t) dt - \int_0^t z^2(t) dt \geq 0 \quad (3.14)$$

$$J_1 \equiv \mu \int_0^t w^2(t) dt - \int_0^t z^2(t) dt \quad (3.15)$$

의 형태를 가질 수 있다. 식 (3.13)을 최소화시키는  $w$ 는 역시  $J_1$ 도 최소화시킨다는 것을 알 수 있다. 지금까지 최소화시킬려는 대가함수  $J_1$ 을 식 (3.8)의 형태로 찾았다. 따라서 대가

함수가 실제시스템에서 어떤 의미를 가지며 식 (3.9)와 같은 제한조건은 어디서 나오는가를 보기 위해 그림 2의 시스템을 생각하자.

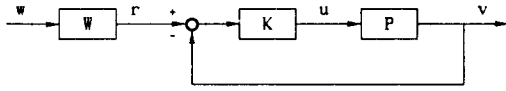


그림 2. 단위귀환 시스템  
Fig. 2. Unity feedback system.

일반적으로 최소화시킬려는 값은 두가지, 즉 플랜트에 들어가는 제어입력( $\rho u$ )과 하중 감도함수, 의 형태를 가진다. 제어입력( $\rho u$ )의 값이 작을수록 경제적인 제어를 할 수 있으며 이때  $\rho$ 는 양의 값을 가지는 하중요소이고 하중 감도함수는 추적 오차신호와 등가적인 양이다. 위에서 설명한 두가지 값을 동시에 고려하기 위해  $z = \rho u$  라고 두고,  $r - v = 0$  을 제한조건으로 잡으면 식 (3.10)에서  $g_a$ 는

$$g_a = \mu w^2 - \rho^2 u^2 + p(r - v) \quad (3.16)$$

으로 표현할 수 있다. 따라서 식 (3.11)를 이용하여  $\mu$ 의 값을 구하면  $\sqrt{\mu}$ 가 대가함수의  $H^\infty$ -norm이다.

### 3.3 최적제어기 설계

이 절에서는 Nevanlinna-Pick 보간 알고리즘을 이용한 최적 제어기 설계과정을 보인다.

플랜트 P가  $R(s)$ 에 속하고  $(N, D)$ 를 P의 소인수 분해, X와 Y를 Bezout identity의 해라고 하면 제어기 K는

$$K = (X + QD)(Y - QN)^{-1} : Q \in R(s), |Y - QN| \neq 0 \quad (3.17)$$

와 같이 주어지며, 여기서 Q는 자유매개변수로서 궁극적으로 제어기를 설계하는데 직접 이용된다.

하중함수를 W, 감도함수를 S라 할 때 하중 감도함수 WS의 norm의 크기가 1로 제한되어야 하므로, 즉 모든  $\omega$ 에 대해

$$\bar{\sigma}[WS(j\omega)] \leq 1 \quad (3.18)$$

이 되어야 하므로  $P \in R(s)$ 에 대해 제어기 K가 플랜트 P를 안정화하고 하중 감도함수를 최소화시킬 조건은

$$\|W(1+PK)^{-1}\|_\infty \leq 1 \quad (3.19)$$

이다.

이제 하중 감도함수의  $H^\infty$ -norm을 최소화하기 위한 문제를 다루고자 한다. 그림 2의 시스템에서 하중 감도함수를 최소화시키기 위한 필요조건인 식 (3.19)로부터

$$\Phi = W(1 + PK)^{-1} \quad (3.20)$$

를 정의하자. 소인수 분해, Bezout identity 및 식 (3.17)을 이용하여 식 (3.20)를 다시 표현하면

$$\begin{aligned} \Phi &= W(Y - QN)D \\ &= WYD - WQND \end{aligned} \quad (3.21)$$

와 같이 쓸 수 있다. 식 (3.21)에서 우측 첫항은 자유매개변수 Q를 포함하지 않고 단지 돌체항에만 들어있음을 주시하라. 따라서 본 연구의 관심은 최적화를 위한 조건, 즉  $\inf \|\Phi\|_\infty < 1$ 이 되도록 하는 Q를 찾는 것이다.

앞에서 논의한 이론과 Nevanlinna-Pick 보간 알고리즘을 이용하여 제어기 설계에 직접적으로 이용되는 자유매개변수 Q를 찾는 과정을 살펴보자. 아래와 같이

$$F = -WND \quad (3.22)$$

$$H = WYD \quad (3.23)$$

을 각각 정의하면, 식 (3.21)은

$$\Phi = FQ + H \quad (3.24)$$

와 같이 쓸 수 있으며, 여기서 F와 H는  $RH^\infty$ 함수이다.  $\|\Phi\|_\infty$ 을 최소화시키는  $Q \in R(s)$ 를 구하는 문제는 Nevanlinna-Pick 보간 알고리즘을 이용하면 그 해를 찾을 수 있다.

### 보조정리 3.1

$H \in RH^\infty$ 이고 F의 모든 영점  $s_i, i = 1, \dots, n$ 이 중첩되지 않는 서로 다른 복소근이면,  $Q \in R(s)$ 일 필요충분조건은 식 (3.24)로부터

$$\Phi \in RH^\infty$$

$$\Phi = H(s_i), \quad i = 1, \dots, n \quad (3.25)$$

이다.

이제 최적화 문제는  $\|\Phi\|_\infty$ 을 최소화시키면서 식 (3.25)을 만족시키는  $\Phi$ 를 찾는 것이다. 즉 Lagrange 승산자 방법에서 구한 하중 감도함수의 최적치  $\mu_0$ 가  $\inf \|\Phi\|_\infty$ 이 되게 하는 Q를 찾기 위해 Nevanlinna-Pick 보간 알고리즘을 이용한다. 따라서

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \inf_{F \in RH^\infty} \|H + FQ\|_\infty \end{aligned} \quad (3.26)$$

을 정의하고, bilinear변환

$$z = \frac{1 - s}{1 + s} \quad (3.27)$$

를 이용하여 식 (3.25)로부터

$$\Psi(z) = \frac{1}{\mu_0} \Phi(s) \Big|_{s=(1-z)/(1+z)} \quad (3.28)$$

$$W_i = \frac{1}{\mu_0} H(s_i) \quad (3.29)$$

을 정의할 수 있다. 또한 Nevanlinna-Pick 보간 알고리즘을 적용하기 위하여 아래와 같은 식들을 정의한다.

**정의 3.1**

$E$ 는  $\sigma(E) < 1$  인 상수행렬일때

$$L(E) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I - EET)^{-1/2} & -(I - EET)^{-1/2}E \\ -(I - EET)^{-1/2}ET & (I - ETE)^{-1/2} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

이다.

**정의 3.2**

$\|X\| \leq 1$  일때

$$T_{L(E)}(X) = (AX + B)(CX + D)^{-1} \quad (3.31)$$

를 정의한다. 또한  $\|T_{L(E)}(X)\| \leq 1$  ( $< 1$ ) 이면  $\|X\| \leq 1$  ( $< 1$ ) 이고,  $\|X\| \leq 1$  ( $< 1$ ) 이면  $\|T_{L(E)}(X)\| \leq 1$  ( $< 1$ ) 임을 알 수 있다.

**정의 3.3**

$$y(\xi, z) = \begin{cases} \frac{\xi - z}{1 - \xi z} \cdot \frac{|\xi|}{\xi} & , \quad \xi \neq 0 \\ -z & , \quad \xi = 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

$$T_{L(E), y(\xi, z)}[X] = y(\xi, z)^{-1}(AX + B)(CX + D)^{-1} \quad (3.33)$$

$$T^{-1}_{L(E), y(\xi, z)}[Y] = [y(\xi, z)YC - A]^{-1}[B - y(\xi, z)YD] \quad (3.34)$$

식 (3.33)은 Nevanlinna-Pick 보간 알고리즘의 전향변환(forward mapping)이고 식 (3.34)는 후향변환(backward mapping)을 나타낸다.

**Nevanlinna-Pick 보간 알고리즘**

1) 먼저  $\Psi(z)$ 는  $\Psi_1(z)$ 로 표현하고,  $W_i^{-1} = W_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  으로 표현한다.

$$\Psi_2(z) = T_{L(W_1^{-1}), y(z_1, z)}[\Psi_1(z)] \quad (3.35)$$

식 (3.33)은  $n$ 개의 조건을 만족시키는 함수  $\Psi_1(z)$ 를 찾는 문제가  $(n-1)$ 개의 조건

$$\Psi_2(z_i) = W_i^{-1}, \quad i = 2, \dots, n \quad (3.36)$$

을 만족시키는  $\Psi_2(z)$ 를 찾는 문제로 귀결되었다. 여기서  $\|\Psi_2(z)\| < 1$  일 필요충분조건은  $\|W_1^{-1}\| < 1$  이다.

2) 다음 과정은 아래 식

$$\Psi_3(z) = T_{L(W_2^{-1}), y(z_2, z)}[\Psi_2(z)] \quad (3.37)$$

을 구하고,  $(n-2)$ 개의 조건

$$\Psi_3(z_i) = W_i^{-1}, \quad i = 3, 4, \dots, n \quad (3.38)$$

을 만족시키는  $\Psi_3(z)$ 를 찾는 문제로 귀결된다.

3) 계속적으로 다음 식

$$\Psi_k(z) = T_{L(W_{k-1}^{-1}), y(z_{k-1}, z)}[\Psi_{k-1}(z)] \quad (3.39)$$

을 구하고

$$\Psi_k(z_i) = W_i^{-1}, \quad i = k, \dots, n \quad (3.40)$$

을 만족시키는 해를 찾는 문제로 된다.

4) 위 과정을

$$\Psi_n(z) = T_{L(W_{n-1}^{-1}), y(z_{n-1}, z)}[\Psi_{n-1}(z)] \quad (3.41)$$

와

$$\Psi_n(z_n) = W_n^{-1} \quad (3.42)$$

이 성립할 때까지 계속한다. 결국  $n$ 개의 조건을 만족시키는  $\Psi_1(z)$ 를 찾는 문제는 단 한개의 조건  $\Psi_n(z_n) = W_n^{-1}$  을 만족시키는  $\Psi_n(z)$ 를 찾는 문제로 귀결된다. 이 문제는 많은 해가 존재하지만, 그중 가장 간단한 해는  $\Psi_n(z) = W_n^{-1}$  이다.

5) 이제 지금까지 과정을 역으로 전개하면  $\Psi_1(z)$ 을 아래와 같이 구한다.

$$\Psi_{n-1}(z) = T^{-1}_{L(W_{n-1}^{-1}), y(z_{n-1}, z)}[\Psi_n(z)] \quad (3.43)$$

$$\Psi_{k-1}(z) = T^{-1}_{L(W_{k-1}^{-1}), y(z_{k-1}, z)}[\Psi_k(z)] \quad (3.44)$$

$$\Psi_1(z) = T^{-1}_{L(W_1^{-1}), y(z_1, z)}[\Psi_2(z)] \quad (3.45)$$

이 후향변환식은 식 (3.34)에서 주어진다. 한 예로  $\Psi_1(z)$ 는

$$\Psi_1(z) = [y(z_1, z)\Psi_2(z)C - A]^{-1}[B - y(z_1, z)\Psi_2(z)D] \quad (3.46)$$

으로 나타낸다. 여기서  $A, B, C, D$ 는  $L(W_1^{-1})$ 에서 계산되어진다. 위의 알고리즘에서  $\Psi_{i+1}(z) < 1$  일 필요충분조건은  $\|W_i^{-1}\| < 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$  이었다. 이제  $\|\Phi\|_\infty = \mu_0$  를 가지고  $Q \in R(s)$  를 보장하는 최적인  $\Phi$ 는

$$\Phi = \mu_0 \Psi(z) \quad |z = (1-s)/(1+s) \quad (3.47)$$

로부터 구해진다. 식 (3.47)을 이용하여 식 (3.21)로부터

$$Q = (WYD - \Phi)W^{-1}N^{-1}D^{-1} \quad (3.48)$$

를 찾을 수 있고, 결국 최적제어기

$$K = (X + QD)(Y - QN)^{-1}, \quad |Y - QN| \neq 0 \quad (3.49)$$

를 얻을 수 있다.

#### 4. 예 제

이 장에서는 주어진 불안정한 플랜트를 안정화시키고 하중 감도함수의  $H_\infty$ -norm을 최소화하는 제어기 설계과정을 예제를 통해 알아보고자 한다

공칭플랜트 P 및 하중함수 W가

$$P = \frac{s-1}{s-2}, \quad W = \frac{s+1}{20s+1} \quad (4.1)$$

와 같이 주어진 시스템에서 주어진 플랜트를 소인수 분해,  $P = N/D$ , 하면

$$N = \frac{s-1}{s+1}, \quad D = \frac{s-2}{s+1} \quad (4.2)$$

로 표현된다. 식 (2.4)로부터 Bezout identity 방정식의 해 X, Y는

$$X = 3, \quad Y = -2 \quad (4.3)$$

와 같이 얻어진다. Lagrange 승산자 방법에 대한 식 (3.16)에서  $\mu_0$ 를 구하기 위해  $\rho = 1$ 로 두면

$$g_a = \mu w^2 - u^2 + p(r - v) \quad (4.4)$$

으로 쓸 수 있다. P와 W를 각각 구현화하면

$$x_p = 2x_p + u \quad (4.5)$$

$$v = x_p + 10 \quad (4.6)$$

$$x_w = -0.1x_w + w \quad (4.7)$$

$$r = 0.09x_w + 0.1w \quad (4.8)$$

이 된다. 식 (3.2)에서

$$x_p(t) = -0.5u(t) + 0.5e^{2t} \quad (4.9)$$

$$x_w(t) = 10u(t) - 10e^{-0.1t} \quad (4.10)$$

을 얻을 수 있으며, 식 (3.10)에서  $\mu_0$ 를 찾기 위한 연립방정식은

$$\frac{\partial g_a}{\partial w} = 2\mu w^* + 0.1p^* = 0 \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial g_a}{\partial p} = r^* - v^* = 0 \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial g_a}{\partial u} = -2u^* - p^* = 0 \quad (4.13)$$

이 되고, 위 식을  $\mu$ 에 대해 구한 후 식 (4.5)에서 식 (4.10)를 대입하면

$$\mu(t) = \frac{0.1u(t)}{-4u(t) + 5e^{2t} + 9e^{-0.1t}} \quad (4.14)$$

이 된다. 이때 최대치  $\mu(t)$ 의 계급근을  $\mu_0$ 로 놓은 후, Nevanlinna-Pick 보간 알고리즘을 이용하여  $\inf \|\Phi\|_\infty$ 이  $\mu_0$ 가 되게 하는 Q를 찾으려면 식 (3.49)로부터 시스템을 안정화시키는 최적제어기 K를 찾을 수 있다. 결과적으로  $\mu_0$ 는

$$\mu_0 = \sqrt{0.01} = 0.1 \quad (4.15)$$

이 된다. 식 (3.25)로부터 보간점은  $s = 1, s = 2$  이므로, 보간조건은

$$\Phi(1) = H(1) = 0.095238 \quad (4.16)$$

$$\Phi(2) = H(2) = 0 \quad (4.17)$$

이고 식 (3.27)과 식 (3.28)에서

$$z_i = \frac{1-s_i}{1+s_i}, \quad i = 1, 2 \quad (4.18)$$

$$\Psi(z_i) = \frac{1}{\mu_0} \Phi(z_i) \Big|_{s=(1-z_i)/(1+z_i)} \quad (4.19)$$

로 각각 정의하면

$$W_i^1 = \frac{1}{\mu_0} H(s_i), \quad i = 1, 2 \quad (4.20)$$

를 얻는다. 또한

$$W_1^1 = 0.0095238$$

$$W_2^1 = 0$$

$$L(W_1^1) = \begin{bmatrix} 3.279617 & -3.123442 \\ -3.123442 & 3.279617 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

이다. 따라서 Nevanlinna-Pick 보간 알고리즘의 전향변환식을 전개하면

$$W_2^2 = -2.85714 \quad (4.22)$$

를 얻는다.  $\Psi_2(z)$ 의 해를

$$\Psi_2(z) = W_2^2 \quad (4.23)$$

로 선택하고, 후향변환식을 전개하면

$$\Phi = \frac{-1.2493766s + 0.6246882}{-12.19373s + 5.634493} \quad (4.24)$$

이다. 식 (3.48)에서 Q를 찾으려면

$$Q = -4.049212 \frac{s+1}{s-2} \quad (4.25)$$

이 얻어진다. 결과적으로 식 (3.49)를 이용하여 얻어진 최적 제어기는

$$K = \frac{-1.049212(s - 2)}{2.049212s - 0.049212} \quad (4.26)$$

와 같다. 그림 3은 Lagrange 승산자 방법으로 구해진 값  $\mu_0 = 0.1$  과 식 (3.24)에서  $\|\Phi\|_\infty = 0.1$  이 일치함을 보여준다. 결과적으로 식 (4.25)의 제어기는 시스템을 안정화시키며, 그림 4에서와 같이 출력이 명령신호(단위입력)를 충실히 따라가도록 하는 최적제어기이다.

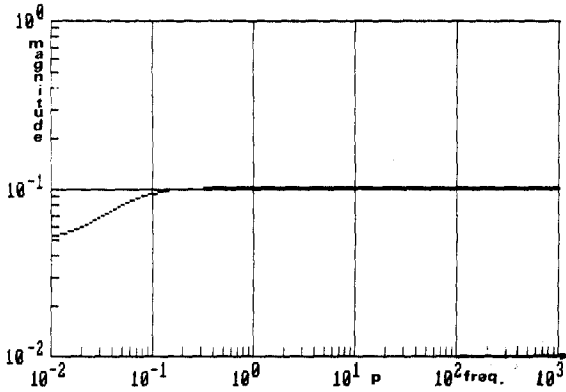


그림 3.  $\Phi$ 의 Bode선도  
Fig. 3. Bode diagram of  $\Phi$ .

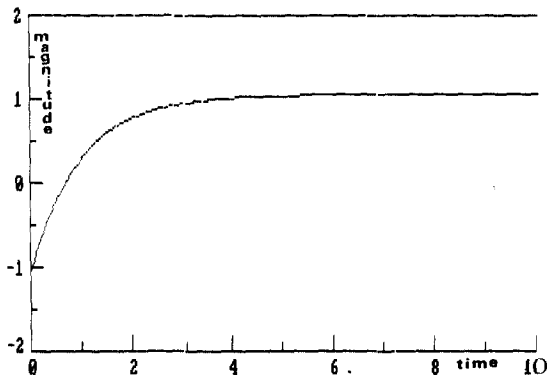


그림 4. 전달함수  $r/v$ 의 시간응답  
Fig. 4. Time response of the transfer function  $r/v$ .

## 5. 결 론

본 논문에서는 단위궤환을 가지는 SISO 시스템의 안정화 및 최적화 문제를 알아 보았다. 즉 Lagrange 승산자 방법을 이용하여 궤환시스템의 최적  $H^\infty$ -norm을 구하고, 그 값을 Nevanlinna-Pick 보간 알고리즘에 이용하여 최적제어기를 구하였으며 동시에 추적문제를 알아보았다.

앞으로 연구되어야 할 과제는 MIMO 시스템으로의 확장이며 또한 외부의 영향을 받지 않는 견실한 제어기를 설계하는 것이다.

## 참 고 문 헌

- [1] J.C. Doyle, *ONR / Honeywell Workshop on Advances in Multivariable Control*, Minneapolis, MN, 1984.
- [2] J.C. Doyle and G. Stein, "Multivariable feedback design : concepts for a classical modern synthesis," *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, vol. AC-26, no. 1, pp. 4-16, Oct. 1981.
- [3] B.A. Francis, *A Course in  $H^\infty$  Control Theory*, Springer-Verlag, 1987.
- [4] B.A. Francis and J.C. Doyle, "Linear control theory with an  $H^\infty$ -optimality criterion," *SIAM J. Control and Optim.*, vol. 25, no. 4, pp. 815-844, July 1987.
- [5] B. A. Francis, J.W. Helton, and G. Zames, " $H^\infty$  optimal feedback controllers for linear multivariable systems," *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, vol. AC-29, no. 10, pp. 889-899, Oct. 1984.
- [6] B. A. Francis and G. Zames, "On  $H^\infty$ -optimal sensitivity theory for SISO feedback systems," *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, vol. AC-29, no. 1, pp. 9-16, Jan. 1984.
- [7] S. Hara and H. Katori, "On constrained  $H^\infty$ -optimization problem for SISO systems," *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, vol. AC-31, no. 9, pp. 856-858, Sept. 1986.
- [8] H. Kimura, "Robust stabilizability for a class of transfer functions," *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, vol. AC-29, no. 9, pp. 788-793, Sept. 1984.
- [9] S.D. O'Young and B.A. Francis, "Optimal performance and robust stabilization," *Automatica*, vol. 22, no. 2, pp. 171-183, 1986.
- [10] M.B. Subrahmanyam, *Optimal Control with a Worst-Case Performance Criterion and Applications*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1990.
- [11] M. Vidyasagar and H. Kimura, "Robust controllers for uncertain linear multivariable systems," *Automatica*, vol. 22, no. 1, pp. 177-186, 1986.
- [12] G. Zames, "Feedback and optimal sensitivity : Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses," *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, vol. AC-26, no. 2, pp. 30-48, April 1981.
- [13] G. Zames and B.A. Francis, "Feedback, minimax sensitivity, and optimal robustness," *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, vol. AC-28, no. 5, pp. 585-601, May 1983.