

Hankel-근사화를 이용한 H^∞ -최적설계

이 경 준 윤 한 오 박 흥 배

경북대학교 공과대학 전자공학과

H^∞ -Optimal Design using Hankel-Approximation

Kyeong Joon Lee, Han O Yun, and Hong Bae Park

Dept. of Electronics, Kyungpook Nat'l. Univ.

ABSTRACT

In this paper, we provide a treatment of the H^∞ -mixed sensitivity optimization approach to feedback system design. With compromising between the effect of a disturbance at the plant output and the effect of plant perturbations, we propose an algorithm to design robust controller. A H^∞ -optimization problem is to be equivalent to a Hankel-approximation, this enables the problem to be solved using state-space methods based on balanced realizations.

1. 서론

1975년 이래로 불확실성(uncertainties)을 가지는 궤환제어 시스템의 안정화를 위한 제어기의 설계, 즉 견실제어이론(robust control theory)에 관한 많은 연구가 있어 왔다. 또한 시스템 불확실성에 대한 견실성(robustness) 문제를 해결하기 위한 궤환시스템 합성에 Hardy space, 보간 이론(interpolation theory), 연산자 이론(operator theory) 등이 응용되어 왔다. 1976년 Youla[13] 등에 의해 다변수 시스템에서의 최적 제어기 설계가 소개되었으며, 1980년 Desoer[2] 등에 의해 행렬 소인수 분해(matrix coprime factorization)를 이용한 제어기 설계 방법이 발표되었다. 1984년 Kimura[7]는 SISO 시스템에서 Nevanlinna-Pick 보간 알고리즘을 이용하여 비구조적 섭동을 가진 시스템의 견실제어 문제를 소개하였으며, Francis[4], Vidyasagar, Kimura[11], Glover[5,6] 등에 의해 MIMO 시스템의 최적 H^∞ -감도 해석방법에 관한 연구가 진행되어 왔다.

한편, Foo, Postlethwaite[3]와 Verma[10] 등에 의해 외란과 추적오차의 감소와 섭동하에서의 견실성을 최대화시키는 동시 제어문제에 대해 활발한 연구가 진행되고 있다.

따라서, 본 논문에서는 궤환시스템의 혼합된 감도함수의 H^∞ -최적화를 꾀하였다. 비구조적 가산섭동(unstructured additive perturbations)과 출력단의 외란(disturbance)이 시스템에 미치는 영향은 서로 보상관계(tradeoff)에 있으므로, 동시 최적화 문제는 불가능하다. 그러나 외란은 저주파 성분이 많고 섭동은 고주파 성분이 많으므로, 서로 다른 주파수 범위내에서의 동시 최적화 문제는 가능해진다.

또한, 궤환시스템 설계에 있어서의 H^∞ -최적화 문제는 균

형화된 구현화(balanced realization)를 이용하여 상태공간방법(state space method)에 의한 해석, 즉 Hankel-근사화 문제로 귀결시킬 수 있다. 여기서 Hankel-근사화를 이용하면 H^∞ -최적 궤환시스템의 설계절차를 간단하게 할 수 있다. 따라서, 반복적인 알고리즘과 Hankel-근사화를 이용하여 H^∞ -norm 을 최소화하고, 페루프를 안정화시키며, 견실성을 최대화시키는 제어기를 설계하는 방법을 제안하였다.

2. 수학적 배경 및 용어

본 이론에 필요한 몇가지 수학적 배경 및 용어에 대해 살펴보기로 한다.

Hardy space

여기서 다루는 Hardy space는 실유리 함수(real rational funtion) 및 실유리 행렬(real rational matrix)에 국한하기로 한다.

함수 $G(s)$ 가 ORHP(open right half plane)에서 해석적이고, 유한한 H^2 -norm을 가지면 Hardy space H^2 라 하며, H^2 -norm, $\|G(s)\|_2$ 은

$$\|G(s)\|_2 = [\int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega]^{1/2} < \infty \quad (2.1)$$

로 정의된다. 마찬가지로 ORHP에서 해석적이고, 유한한 H^∞ -norm 을 가지면 Hardy space H^∞ 라 하며, H^∞ -norm, $\|G(s)\|_\infty$ 은

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega} |G(j\omega)| < \infty \quad (2.2)$$

와 같이 정의된다.

Lebesgue space

허수축을 제외한 전구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 전달함수행렬의 한계범위(bounded)를 논하게 되는 space 이고, L^2 와 L^∞ 로 정의된다.

소인수 분해(coprime factorization) 및 Bezout identity

전달함수행렬 $G(s)$ 의 우소인수분해(r.c.f.: right coprime factorization) 및 좌소인수분해(l.c.f.: left coprime factorization)는 $G = N_r D_r^{-1} = D_l^{-1} N_l$ 와 같이 쓸 수 있

며, N_r, D_r, N_l, D_l 은 Hardy space H^∞ 에 속하는 행렬이며, Bezout identity, 즉

$$U_r N_r + V_r D_r = N_l U_l + D_l V_l = I \quad (2.3)$$

를 만족하는 Hardy space H^∞ 에 속하는 U_r, V_r, U_l, V_l 이 항상 존재한다.

Inner, Outer 행렬

$G(s), G_i(s), G_o(s)$ 가 Hardy space H^∞ 에 속하며, 행렬 $G_i(s)$ 가 $G_i^*(j\omega)G_i(j\omega) = I$ 를 만족할 때 inner 행렬이라 하고, 행렬 $G_o(s)$ 의 역행렬의 각 요소들이 DRHP에서 해석적이면 outer 행렬이라 하며, 행렬 $G(s)$ 는 inner 와 outer 의 행렬 곱으로 나타낼 수 있다. 즉

$$G(s) = G_i(s) \cdot G_o(s) \quad (2.4)$$

이다.

Hankel norm

전달함수행렬, 즉 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ 에서 시스템이 가제어(controllable)이고, 가관측(observable)하다고 가정하면, Lyapunov 방정식

$$AP + PA^* = -BB^* \quad (2.5)$$

$$A^*Q + QA = -C^*C \quad (2.6)$$

의 해 P, Q 를 구하면, 행렬 $G(s)$ 의 Hankel-norm $\|G(s)\|_H$ 은

$$\|G(s)\|_H = [\lambda_{\max}(PQ)]^{1/2} \quad (2.7)$$

과 같이 구할 수 있으며, A^* 는 A 의 공역복소수 전치이다.

3. 혼합된 감도함수의 최적화

이 장에서는 외란제거와 견실성의 극대화를 위해 혼합된 감도함수의 동시 최적화 문제를 다루고자 한다. 이를 위해 그림 1과 같은 단위 궤환시스템을 생각하자.

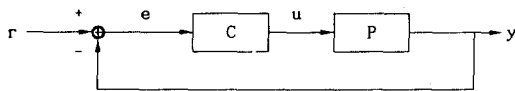


그림 1. 단위 궤환 시스템
Fig. 1. Unity feedback system.

여기서 P 는 섭동을 가지지 않는 공칭 플랜트, u 와 y 는 플랜트의 입력과 출력, r 은 기준 입력신호, e 는 추적오차, C 는 시스템을 안정화시키는 제어기이다.

만일, 하중 출력신호 z 를 $z^T = [\tilde{e}^T \ \tilde{u}^T]$ 라고 하면, z 는

$$z = \begin{bmatrix} \tilde{e} \\ \tilde{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1(I + PC)^{-1} \\ W_2C(I + PC)^{-1} \end{bmatrix} r \quad (3.1)$$

으로 표시할 수 있다. 여기서 $\tilde{e} = W_1 e, \tilde{u} = W_2 u$ 이며, W_1 과 W_2 는 외란제거가 중요시되는 주파수 범위와 견실성이 중요시되는 주파수 범위에서 각각 크고 안정해야 한다. 식 (3.1)을 간단히 표시하면,

$$z = Tr \quad (3.2)$$

이고, 궤환시스템의 감도함수 $S = (I + PC)^{-1}$ 라 정의하고, Q -매개변수(Q -parameter), $Q = C(I + PC)^{-1}$ 로 두면 식 (3.2)의 T 는

$$T = \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_2 Q \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

로 표현할 수 있다.

최적의 외란이나 추적오차의 제거문제는 식 (3.4)와 같이 표현할 수 있으며,

$$\inf_{C \text{ stabilizing}} \|W_1 S\|_\infty \quad (3.4)$$

불확실성 가산 섭동하에서의 견실성을 최대화시키는 문제는 식 (3.5)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\inf_{C \text{ stabilizing}} \|W_2 Q\|_\infty \quad (3.5)$$

위의 식 (3.4)와 식 (3.5)의 두 가지 목적의 동시 최적화 문제는 식 (3.6)과 같이 등가적으로 쓸 수 있다.

$$\inf_{C \text{ stabilizing}} \|T\|_\infty \quad (3.6)$$

최적화 문제를 풀기 위해서 먼저 플랜트를 안정화시키는 제어기의 집합을 매개변수화시켜야 한다. 플랜트를 우-최소인 수분해를 하면

$$P = N_r D_r^{-1} = D_l^{-1} N_l \quad (3.7)$$

와 같이 되고, doubly bezout identity, 즉

$$\begin{bmatrix} D_l & -N_l \\ U_r & V_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_l & N_r \\ -U_l & D_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

을 만족하는 Hardy space H^∞ 에 속하는 U_r, V_r, U_l, V_l 을 구하면, 플랜트를 안정화시키는 proper 한 실유리 행렬의 제어기는 식 (3.9)와 같이 나타낼 수 있다.

$$C = (U_l + D_r X)(V_l - N_r X)^{-1} \\ = (V_r - X N_l)^{-1}(U_r + X D_l), \quad X \in H_{n \times m}^\infty \quad (3.9)$$

여기서 $\det(V_l - N_r X)(\infty) \neq 0$, 또는 $\det(V_r - X N_l)(\infty) \neq 0$ 이어야 한다. 식 (3.9)에 주어진 제어기의 형태로 식 (3.3)을 전개하면

$$T = \begin{bmatrix} W_1(1 + PC)^{-1} \\ W_2C(1 + PC)^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1V_1D_1 - W_1N_rXD_1 \\ W_2U_1D_1 + W_2D_rXD_1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

이 된다. 여기서

$$\begin{aligned} G_1 &\equiv W_1V_1D_1 & G_2 &\equiv W_2U_1D_1 \\ H_1 &\equiv W_1N_r & H_2 &\equiv -W_2D_r & H_3 &\equiv D_1 \end{aligned} \quad (3.11)$$

이라 두면, 식 (3.10)은

$$T = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} H_3 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

으로 표현할 수 있다. 따라서, H^∞ -최적 설계문제는

$$X \in H_{n \times m}^\infty \quad \left\| \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} H_3 \end{bmatrix} \right\|_\infty \quad (3.13)$$

으로 다시 쓸 수 있다. 행렬 H_3 는 $H_{m \times m}^\infty$ 에 속하는 정방행렬이지만,

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \in H_{(m+n) \times n}^\infty \quad (3.14)$$

은 항상 정방행렬이 아니다. 따라서 식 (3.13)의 최적화 문제는 행렬의 아래 부분을 고정시키고, 윗부분에 의존하는 최적화 문제로 변환이 되어야 한다. 행렬 H_3 를 outer-inner 분해를 하면,

$$H_3 = M_3\psi_3 \quad (3.15)$$

으로 된다. 여기서 M_3 는 outer 행렬이고, ψ_3 는 inner 행렬이다. 행렬 T 의 앞뒤로 all-pass 행렬을 곱하더라도 H^∞ -norm 값은 변함이 없으므로 식 (3.13)은

$$\|T\|_\infty = \|T_1\|_\infty \quad (3.16)$$

로 들 수 있다. 여기서 T_1 은

$$\begin{aligned} T_1 &= T\psi_3^{-1} = \begin{bmatrix} G_1\psi_3^{-1} \\ G_2\psi_3^{-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} XM_3 \\ &= \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} Y \end{aligned} \quad (3.17)$$

이고,

$$K_1 \equiv G_1\psi_3^{-1}, \quad K_2 \equiv G_2\psi_3^{-1}, \quad Y \equiv XM_3 \quad (3.18)$$

으로 정의된다.

다음으로 $T_1^*T_1$ 을 구하면

$$\begin{aligned} T_1^*T_1 &= (K_1 - H_1Y)^*(K_1 - H_1Y) + (K_2 - H_2Y)^*(K_2 - H_2Y) \\ &= K_1^*K_1 + K_2^*K_2 - (K_1^*H_1 + K_2^*H_2)Y - Y^*(H_1^*K_1 + H_2^*K_2) + Y^*(H_1^*H_1 + H_2^*H_2)Y \end{aligned} \quad (3.19)$$

이다. 식 (3.20)을 만족하는 outer 행렬 M_1 이 존재하고,

$$M_1^*M_1 = H_1^*H_1 + H_2^*H_2 \quad (3.20)$$

행렬 K 를

$$K \equiv (M_1^*)^{-1}[H_1^*K_1 + H_2^*K_2] \quad (3.21)$$

와 같이 정의하면, 식 (3.19)는

$$\begin{aligned} T_1^*T_1 &= K_1^*K_1 + K_2^*K_2 - M_1^*KY - Y^*K^*M_1 + Y^*M_1^*M_1Y \\ &= (K - M_1Y)^*(K - M_1Y) + K_1^*K_1 + K_2^*K_2 - K^*K \end{aligned} \quad (3.22)$$

으로 쓸 수 있다.

보조정리 3.1

허수축에서 $K_1^*K_1 + K_2^*K_2 - K^*K \geq 0$ 이면, 식 (3.23)을 만족하는 $F \in H_{m \times m}^\infty$ 가 항상 존재한다.

$$F^*F = K_1^*K_1 + K_2^*K_2 - K^*K \quad (3.23)$$

보조정리 3.1로 부터 식 (3.22)는

$$T_1^*T_1 = (K - M_1Y)^*(K - M_1Y) + F^*F \quad (3.24)$$

으로 쓸 수 있고, $Z \equiv M_1Y$ 로 정의하면 식 (3.13)의 혼합된 감도함수의 최적화 문제는 식 (3.25)와 동가이다.

$$Z \in H_{n \times m}^\infty \quad \left\| \begin{bmatrix} K - Z \\ F \end{bmatrix} \right\|_\infty \quad (3.25)$$

식 (3.24)는

$$T_1^*T_1 = E^*(X)E(X) + F^*F \quad (3.26)$$

와 같이 쓸 수 있으며, 여기서 $E(X) = K - Z = K - M_1XM_3$ 이다.

$\|T_1\|_\infty$ 을 최적화시키는 해는 all-pass 형태를 가지고 있어야 하므로

$$T_0^*T_0 = \lambda^2 I \quad (3.27)$$

이라고 가정한다. 여기서 T_0 는 T_1 의 최적치이고, $\|T_0\|_\infty = \lambda$ 이다. 그러므로 식 (3.26)을 정리하면,

$$E^*(X)E(X) = \lambda^2 I - F^*F \equiv M^*M \quad (3.28)$$

이며, 여기서 행렬 M 은 outer 행렬이다. 그러므로 식 (3.28)에서

$$KM^{-1} - M_1XM_2M^{-1} = I \quad (3.29)$$

를 얻을 수 있다. 그래서 식 (3.13)의 H^∞ -최적화 문제는 식 (3.30), 즉

$$\inf_{X \in H_{n \times m}^\infty} \|KM^{-1} - M_1XM_2M^{-1}\|_\infty \equiv \mu \quad (3.30)$$

와 같이 표현될 수 있으며, 주어진 λ 값은 양의 실수인 μ 의 값이 1 일 때 혼합된 감도함수의 최적치가 된다.

보조정리 3.2

$X \in H_{n \times m}^\infty$ 일 때 $\|T\|_\infty$ 의 최적치가 λ 이면 $\lambda \geq \|T\|_\infty$ 이다.

아래 보조정리 3.3은 λ 의 값을 크게 선택했을 경우를 나타

내며, 보조정리 3.4는 λ 의 값을 작게 선택했을 경우를 나타낸다.

보조정리 3.3

$\lambda > \|T\|_\infty$ 라 두고, 식 (3.27)에서 정의한 μ 의 값이 1 보다 작으면 $\lambda' < \lambda$ 일 때 해가 존재한다.

보조정리 3.4

만일 μ 의 값이 1 보다 크면, $\lambda' > \lambda$ 일 때 해가 존재한다.

정리 3.1

$\|T\|_\infty$ 보다 큰 λ 의 값이 T 의 H^∞ -norm의 최적치일 필요충분 조건은 $\mu = 1$ 일 때이다.

H^∞ -최적화 문제가 Hankel-norm 근사화 문제와 동가이므로 균형화된 구현화에 의한 상태공간 방법을 이용하면, H^∞ -최적화 문제를 풀 수 있다. 그러므로 식 (3.30)을 다시 쓰면,

$$\inf_{X \in H_{n \times m}^\infty} \|A + BXC\|_\infty \quad (3.31)$$

이다. 여기서 $A = KM^{-1}$, $B = -M_1$, $C = M_2M^{-1}$ 이다. 식 (3.31)에서 행렬 B 와 C 가 정방행렬이라고 가정하면,

$$B = \theta_1 M_1 \quad (3.32)$$

$$C = M_2 \theta_2 \quad (3.33)$$

으로 inner-outer 분해할 수 있다. 여기서 θ_1 과 θ_2 는 inner 행렬이고, M_1 과 M_2 는 outer 행렬이다. 그러므로

$$\begin{aligned} A + BXC &= A + \theta_1 M_1 X M_2 \theta_2 \\ &= A + \theta_1 \tilde{X} \theta_2 \end{aligned} \quad (3.34)$$

으로 표현할 수 있고, 여기서 $\tilde{X} = M_1 X M_2$ 이다. 따라서 식 (3.34)를 이용하여 식 (3.31)을 다시 쓰면,

$$\inf_{X \in H^\infty} \|A + BXC\|_\infty = \inf_{\tilde{X} \in H^\infty} \|A + \theta_1 \tilde{X} \theta_2\|_\infty \quad (3.35)$$

으로 표현할 수 있다. inner 행렬의 성질, 즉 $\theta^* = \theta^{-1}$ 를 이용하여 식 (3.35)를 다시 쓰면

$$\begin{aligned} \|A + BXC\|_\infty &= \|\theta_1^* A \theta_2^* + \tilde{X}\|_\infty \\ &= \|\theta_1^* A^* \theta_2 + \tilde{X}^*\|_\infty \end{aligned} \quad (3.36)$$

으로 표현할 수 있다. 식 (3.36)을 Hankel-근사화 형태로 변환하기 위해

$$\begin{aligned} G &\equiv [\theta_1^* A^* \theta_2]^*, \\ X_0^* &\equiv G - \theta_1 A^* \theta_2 \\ Y &\equiv \tilde{X} - X_0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

으로 정의하고, $[\cdot]^*$ 는 부분분수 전개한 행렬의 안정한 부분으로 나타내면, G 와 X_0 는 H^∞ 에 속하므로 식 (3.31)은

$$\inf_{X \in H^\infty} \|A + BXC\|_\infty = \inf_{Y \in H^\infty} \|G + Y^*\|_\infty \quad (3.38)$$

으로 나타낼 수 있다.

정리 3.2

행렬 $G \in H^\infty$ 가 주어질 때, 행렬 $Y \in H^\infty$ 에 대하여

$$\|G\|_H \leq \|G + Y^*\|_\infty$$

이 성립한다.

정리 3.2를 이용하면 식 (3.38)은

$$\inf_{Y \in H^\infty} \|G + Y^*\|_\infty = \|G\|_H \quad (3.39)$$

으로 표현할 수 있다. 식 (3.39)를 풀기 위하여 $G(A, B, C, D)$ 의 균형화된 구현을 얻어야 한다. 즉, Lyapunov 식

$$A\Sigma + \Sigma A^* + BB^* = 0 \quad (3.40)$$

$$A^*\Sigma + \Sigma A + C^*C = 0 \quad (3.41)$$

의 해는

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 I & 0 \\ 0 & \Sigma_1 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

와 같이 대각화되어야 한다. 여기서 $\Sigma_1 = \text{diag} \{ \sigma_2, \dots, \sigma_n \}$ 이고, $\sigma_1 > \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$ 이다. 그러므로 행렬 G 의 Hankel-norm 은 σ_1 이다.

Σ 와 마찬가지로 $A, B,$ 및 C 를 분할하면

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

으로 나타낼 수 있다. $\Gamma = \Sigma_1^2 - \sigma_1^2 I$ 라 두고, $UU^T = I$ 와 $B_1 = -C_1 U$ 를 만족하는 U 를 선택하면,

$$\tilde{A} = \Gamma^{-1}(\sigma_1^2 A_{22}^T + \Sigma_1 A_{22} \Sigma_1 - \sigma_1 C_2^T U B_2^T) \quad (3.44)$$

$$\tilde{B} = \Gamma^{-1}(\Sigma_1 B_2 + \sigma_1 C_2^T U) \quad (3.45)$$

$$\tilde{C} = -C_2 \Sigma_1 - \sigma_1 U B_2^T \quad (3.46)$$

$$\tilde{D} = -D + \sigma_1 U \quad (3.47)$$

를 얻을 수 있다. 여기서 $B_1 B_1^T = C_1^T C_1$ 을 만족하면 U 는 항상 존재한다. 그러므로 식 (3.39)의 해 Y 는 $(-\tilde{A}^T, -\tilde{C}^T, \tilde{B}^T, \tilde{D}^T)$ 의 구현을 가진다.

마지막으로 자유매개변수 X 는 식 (3.37)로 부터 얻을 수 있고, 식 (3.6)을 만족하는 제어기는 식 (3.9)로 부터 얻을 수 있다.

4. 예제

이 장에서는 예제를 통하여 제안된 알고리즘의 타당성을 알아 보기로 한다. 즉, 혼합된 감도함수를 최적화시키고 안정화시키는 제어기 설계과정을 보이며 계산상의 간략성을 위해 SISO의 예를 보이겠다.

플랜트 P , 하중행렬 W_1, W_2 를 식 (4.1)과 같이 두자.

$$P = \frac{s+1}{s-2}, \quad W_1 = \frac{1}{s+5}, \quad W_2 = \frac{s+1}{s+100} \quad (4.1)$$

플랜트 P 를 소인수 분해하면

$$P = \frac{s+1}{s-2} = 1 \cdot \left[\frac{s-2}{s+1} \right]^{-1} = ND^{-1} \quad (4.2)$$

로 나타낼 수 있고, Bezout identity 를 만족하는 U, V 는

$$U = \frac{3}{s+1}, \quad V = 1 \quad (4.3)$$

이다. 식 (3.11)에서 정의한 G_1, G_2, H_1, H_2, H_3 는

$$G_1 = \frac{s-2}{(s+1)(s+5)}, \quad G_2 = \frac{3(s-2)}{(s+1)(s+100)} \quad (4.4)$$

$$H_1 = \frac{1}{s+5}, \quad H_2 = -\frac{s-2}{s+100}, \quad H_3 = \frac{s-2}{s+1}$$

으로 나타낼 수 있다. 식 (3.15)에서와 같이 H_3 를 outer-inner 분해를 하면

$$H_3 = M_3 \tilde{H}_3 = \frac{s+2}{s+1} \cdot \frac{s-2}{s+2} \quad (4.5)$$

이다. 식 (3.18)에서 정의한 K_1, K_2 는

$$K_1 = \frac{(s+2)}{(s+1)(s+5)}, \quad K_2 = \frac{3(s+2)}{(s+1)(s+100)} \quad (4.6)$$

이고, 식 (3.20)의 M_1 은

$$M_1 = \frac{(s+7.5993)^2 + 6.5383^2}{(s+5)(s+100)} \quad (4.7)$$

으로 구해지고, 식 (3.21)의 K 를 구하면

$$K = \frac{-3(s+2)((s+8.5670)^2 + 12.4580^2)(s-14.8010)}{(s+1)(s+5)((s-7.5993)^2 + 6.5383^2)(s+100)} \quad (4.8)$$

이다. 식 (3.23)의 F 는

$$F = \frac{-2(s+2)}{(s+7.5993)^2 + 6.5383^2} \quad (4.9)$$

으로 주어진다. 보조정리 3.2로부터 $\|F\|_\infty$ 을 구하면

$$\|F\|_\infty = 0.06712 \quad (4.10)$$

이다. $\|F\|_\infty$ 보다 큰 λ 의 값을 선택하여 반복적인 방법에 의해 혼합 감도함수의 최적치를 구하면 표 4.1과 같다.

표 4.1 λ 값에 따른 μ 값(식 (3.30))

λ	μ
0.1	0.8991
0.098	0.9244
0.095	0.9409
0.093	0.9559
0.0928	0.9990
0.092735	1.0000

표 4.1에서 알 수 있듯이 식 (3.6)의 최적치는 0.092735이다. 식 (3.28)의 M 은

$$M = \frac{0.092735((s+5.2448)^2 + 8.4053^2)}{(s+7.5993)^2 + 6.5383^2} \quad (4.11)$$

이고, 식 (3.38)의 G 는

$$G = \frac{12.6501(s+13.7001)}{(s+7.5993)^2 + 6.5383^2} \quad (4.12)$$

이고, 식 (4.12)의 균형화된 구현은

$$A = \begin{bmatrix} -7.3993 & 6.5414 \\ -6.5414 & -7.7993 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3.8470 \\ 1.4662 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$C = \begin{bmatrix} 3.8470 & -1.4662 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

이다. 식 (3.40), (3.41)의 Lyapunov 식을 만족하는 식 (3.42)의 해 Σ 는

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 \\ 0 & 0.1378 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

이다. 여기서 $\sigma_1 = 1.0000$, $\Sigma_1 = 0.1378$ 이다. 그리고 $U^T = I$ 와 $B_1 = -C_1 U$ 를 만족하는 U 는 -1 이고, Γ 는

$$\Gamma = \Sigma_1^2 - \sigma_1^2 I = -0.9812 \quad (4.15)$$

이다. 그러므로 식 (3.43)과 같이 A , B , 및 C 를 분할하여 식 (3.44-47)의 \tilde{A} , \tilde{B} , \tilde{C} , \tilde{D} 를 구하면

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= 10.2962 & \tilde{B} &= -1.7004 \\ \tilde{C} &= 1.6683 & \tilde{D} &= -1.0000 \end{aligned} \quad (4.16)$$

이다. 그러므로 식 (3.39)의 해 Y^* 는

$$Y^* = \frac{-1.0000(s - 7.4558)}{(s - 10.2923)} \quad (4.17)$$

이다. 식 (3.39)의 $\|G + Y^*\|_\infty$ 의 값은 1.0000 으로 $\|G\|_H$ 의 값과 일치함을 알 수 있다. 그러므로 식 (3.37)로부터 얻을 수 있는 자유매개변수 X 는

$$X = \frac{N_X}{D_X} \quad (4.18)$$

이다. 여기서 $N_X = -0.09274(s + 2.4228)(s + 71.4274)((s + 7.5961)^2 + 6.5372^2)((s + 7.6022)^2 + 6.5395^2)$ 이고, $D_X = (s + 2)((s + 7.5993)^2 + 6.5383^2)(s + 10.2923)$ 이다.

마지막으로 식 (3.6)을 만족하는 제어기 C 는 식 (3.9)로부터

$$C = \frac{N_C}{D_C} \quad (4.19)$$

를 얻을 수 있다. 여기서 $N_C = 0.1022(s + 3.1979)(s + 100)((s + 7.5961)^2 + 6.5372^2)((s + 7.6022)^2 + 6.5390^2)$ 이고, $D_C = (s + 1)(s + 5)((s + 7.5964)^2 + 6.5391^2)((s + 7.6021)^2 + 6.5378^2)$ 이다.

식 (4.19)의 제어기 C 는 혼합 감도함수를 최적화시키며 섭동과 외란을 가지는 폐루프 시스템을 안정화시킨다.

5. 결론

본 논문에서는 비구조적 가산 섭동과 출력단에 외란이 있는 다변수 궤환시스템의 동시 최적화 문제를 다루었다. 즉, Hankel-근사화를 이용하여 최적 제어기를 설계하였으며, 이를 예제로 나타내었다.

이 논문과 관련하여 계속 연구되어야 할 과제는 알고리즘의 반복성을 없앴으로써 간단한 계산절차를 얻는 것이며, 다변수 시스템에서 혼합 감도함수의 H^∞ -최적화를 피할 수 있는 소프트웨어 개발등이다.

참 고 문 헌

[1] V.M. Adamjan, D.Z. Arov, and M.G. Krein, "Infinite

Hankel block matrix and related extension problems," *Amer. Math. Soc. Transl.*, vol. 3, pp. 133-156, 1978.

[2] C.A. Desoer, R.W. Liu, J. Murray, and R. Saeks, "Feedback system design: The fractional approach to analysis and synthesis," *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, vol. AC-25, no. 3, pp. 399-412, June 1980.

[3] Y.K. Foo, I. Postlethwaite, "An H^∞ -minimax approach to the design of robust control systems," *Systems & Contr. Letters* 5, pp. 81-88, Nov. 1984.

[4] B.A. Francis, J.W. Helton, and G. Zames, " H^∞ optimal feedback controllers for linear multivariable systems," *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, vol. AC-29, no. 10, pp. 889-899, Oct. 1984.

[5] K. Glover, "All optimal Hankel-norm approximation of linear multivariable systems and their L^∞ error bounds," *Int. J. Contr.*, vol. 39, pp. 1115-1193, June 1984.

[6] K. Glover, "Robust stabilization of linear multivariable systems: relations to approximation," *Int. J. Contr.*, vol. 34, pp. 741-766, March 1986.

[7] H. Kimura, "Robust stabilizability for a class of transfer functions," *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, vol. AC-29, no. 9, pp. 788-793, Sept. 1984.

[8] H. Kwakernaak, "Minimax frequency domain performance and robustness optimization of linear feedback systems," *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, vol. AC-30, no. 10, pp. 994-1004, Oct. 1985.

[9] M.G. Safonov and M.S. Verma, " L^∞ optimization and Hankel approximation," *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, vol. AC-30, no. 3, pp. 279-280, March 1985.

[10] M.S. Verma, "Design of H^∞ -optimal feedback systems," *Proc. 26th CDC*, Los Angeles, CA, pp. 84-89, Dec. 1987.

[11] M. Vidyasagar and H. Kimura, "Robust controllers for uncertain linear multivariable systems," *Automatica*, vol. 22, no. 1, pp. 85-94, Jan. 1986.

[12] D.A. Wilson, "Convolution and Hankel operator norms for linear systems," *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, vol. AC-34, no. 1, pp. 94-97, Jan. 1989.

[13] D.C. Youla, J.J. Bongiorno Jr., and H.A. Jabr, "Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers, Part II: The multivariable case," *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, vol. AC-21, no. 3, pp. 319-338, June 1976.