수정된 최소자승법을 이용한 파라미터 추정

○ 한 영 성*　　김 웅 석*　　한 홍 석**　　양 해 원*
*한양대학교 전기공학과　　**충남전문대학 전기공학과

Parameter Estimation using a Modified Least Squares Method

○ Young-Seong Han*　Eung-Seok Kim*　Hong-Seok Han**　Hai-Won Yang*
*Dept. of Electrical Eng. Han Yang Univ. **Dept. of Electrical Eng. Chung Nam Junior College

ABSTRACT

In a discrete parameter estimation system, the standard least squares method shows slow convergence. On the other hand, the weighted least squares method has relatively fast convergence. However, if the input is not sufficiently rich, then gain matrix grows unboundedly. In order to solve these problems, this paper proposes a modified least squares algorithm which prevents gain matrix from growing unboundedly and has fast convergence.

I. 서론

최소자승법은 연속시간계통([5]-[7])과 이산시간계통([1]-[4]) 모두에서 파라미터를 추정할때 널리 쓰이는 알고리즘이다. 최소자승법은 두가지 식으로 구성된다. 그중 하나는 파라미터 update식이고 또하나는 분산행렬의 update식이다. 분산행렬이 어떻게 update되는가는 알고리즘의 안정성이나 수렴성등에 큰영향을 미친다. 표준형 최소자승법은 파라미터가 시불변일때 최적성을 갖는 것으로 알려져있다. 이 알고리즘에서는 시간이 지남에 따라 이득행렬이 영행렬로 되기 때문에 시변 파라미터의 추정에는 쓰일 수 없다. 그리고 수렴속도가 느린 단점이 있다. 이득행렬이 영행렬이 되지 않도록 하기 위해 많은 연구가 이루어졌는데, 그 대표적인 것이 가중형 최소자승법이다. 그러나, 이 알고리즘은 여기신호가 sufficiently rich하지 않으면 이득행렬이 무한정 커진다[3]. 따라서, 파라미터를 추정하기 위해서는 이득행렬이 singular하게도, 무한정 커지지도 않게 알고리즘을 설계해야 한다. 이러한 문제를 해결하기 위해 몇가지 알고리즘이 제시되었는데, 그 대표적인 것으로 Goodwin이 제안한 covariance resetting이 있고, [3]에서는 분산행렬에 축적된 정보량을 일정하게 유지하려 하였고, [4]에서는 분산행렬의 trace가 초기치의 trace와 같도록 forgetting factor를 설정하였다. [1]에서는 forgetting factor대신 signal level에 따라 변화하는 행렬을 사용하였는데 계산이 상당히 복잡한 문제가 있다.

본 논문에서 제시된 방법에서는 앞에서 제시되었던 방법들과 달리 계산이 간단하고 두 극단적인 상황을 어떻게 피하는지 명확히 알 수 있다.

II. 최소자승법 형태의 적응추정자

$y_t = x_t^T\theta^*$ 에서 y_t, x_t는 측정 가능한 신호이고 θ^*는 미지 파라미터 벡터로 추정할 값이다. 미지 파라미터 벡터를 추정하기 위해 다음의 추정자를 사용한다.

$$R_{t+1} = (I + M_tR_t^{-1})R_t + x_tx_t^T , \quad R_0 = R_0^T > 0 \tag{1}$$

$$r_{t+1} = (I + M_tR_t^{-1})r_t + x_ty_t , \quad r_0 = R_0\theta_0 \tag{2}$$

$$\theta_{t+1} = R_{t+1}^{-1}r_{t+1} \tag{3}$$

R_t, r_t는 축적된 정보이고 M_t는 정보를 축적할 때 영향을 미치는 행렬이다. θ_t는 파라미터의 추정치이다. 위의 추정자는 최소자승법 형태로서, $M_t = 0$ 이면 표준형 최소자승법이고, $M_t = -\rho R_t$ 이면 가중형 최소자승법이다.

$e_t = x_t^T\theta_t - y_t$ 와 $R_{t+1}\theta_t - r_{t+1} = x_te_t$ 를 이용하여 다시 정리하면

$$R_{t+1} = R_t + M_t + x_tx_t^T , \quad R_0 = R_0^T > 0 \tag{4}$$

$$\theta_{t+1} = \theta_t - R_{t+1}^{-1}x_te_t , \quad \theta_0 \tag{5}$$

으로 되고, 해석을 위하여

$$\phi_t = \theta_t - \theta^* \tag{6}$$

$$f_t = r_t - R_t\theta^* \tag{7}$$

을 정의하여 파라미터 오차방정식을 만들면

$$\phi_t = R_t^{-1}f_t \tag{8}$$

$$f_{t+1} = (I + M + R_t^{-1})f_t , \quad f_0 = R_0\phi_0 \tag{9}$$

으로 된다. 다음에는 M_t의 선택에 따른 특성의 변화를 고려하기로 한다.

1. 표준형 최소자승법

$M_t = 0$인 경우로서, R_t의 update식과 파라미터 오차방정식은

$$R_{t+1} = R_t + x_t x_t^T \quad , \quad R_0 = R_0^T > 0 \tag{10}$$
$$\phi_t = R_t^{-1} R_0 \phi_0 \tag{11}$$

으로 된다. 이때, x_t가 Persistently Exciting(PE)하면 시간이 지남에 따라 이득행렬 R_t^{-1}는 영행렬로 되고 ϕ_t도 영벡터로 된다. 그러나, ϕ_t의 수렴속도는 시간이 감에 따라 점점 느려져서 수렴성이 좋지 못하다.

2. 가중형 최소자승법

$M_t = -\rho R_t$인 경우인데, 이때 $0 < \rho < 1$ 이다. R_t의 update식과 파라미터 오차방정식은 다음과 같다.

$$R_{t+1} = (1-\rho) R_t + x_t x_t^T \qquad R_0 = R_0^T > 0 \tag{12}$$
$$\phi_t = (1-\rho)^t R_t^{-1} R_0 \phi_0 \tag{13}$$

x_t가 PE하면 R_t는 positive definite이므로 R_t^{-1}는 유계이고 시간이 지남에 따라 ϕ_t는 영벡터로된다. 그러나, x_t가 PE하지 못하면 R_t는 singular하게 되어 이득행렬 R_t^{-1}가 무한정 커지게 되어 추정자는 적응능력을 상실하게 된다.

3. Covariance Resetting을 이용한 표준형 최소자승법과 가중형 최소자승법

위에서 설명한 단점을 극복하는 방법으로 어떤 순간에 R_t를 재초기화하는 것이 있다.

$$R_{t+1} = R_t + M_t + x_t x_t^T \quad , \quad R_0 = R_0^T > 0 \tag{14}$$

$$M_t = \begin{cases} R_0 - R_t & t = t_i \ (i = 0,1,2,3,\cdots) \\ -\rho R_t & \end{cases} \tag{15}$$

$d = t - t_i$, $t \in (t_i , t_{i+1}]$ 으로 정의하고, 파라미터 오차방정식을 유도하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \phi_t &= R_t^{-1} f_t \\ &= (1-\rho)^{d-1} R_t^{-1} f_{ti+1} \\ &= (1-\rho)^{d-1} R_t^{-1} R_0 R_{ti}^{-1} f_{ti} \\ &= (1-\rho)^{d-1} R_t^{-1} R_0 \phi_{ti} \\ &= (1-\rho)^{d-1} [(1-\rho)^{d-1} R_0 \\ &\quad + \sum_{k=0}^{d-1} (1-\rho)^{d-1-k} x_{ti+k} x_{ti+k}^T]^{-1} R_0 \phi_{ti} \\ &= R_0^{-1/2} [I + \sum_{k=0}^{d-1} (1-\rho)^{-k} R_0^{-1/2} x_{ti+k} x_{ti+k}^T \\ &\quad R_0^{-1/2}]^{-1} R^{1/2} \phi_{ti} \end{aligned} \tag{16}$$

$[\cdot]$에서 I를 뺀 부분이 positive semidefinite 이기 때문에 다음과 같은 부등식을 만족한다.

$R_0^{1/2} \phi_t \le R_0^{1/2} \phi_{ti}$

따라서, 파라미터 오차는 점점 줄어들게 된다. resetting방법은 어느 순간에 과거의 정보를 모두 버리고 급작스러운 변경을 가하기 때문에 자연스럽지 못하다.

4. Kreisselmeier의 알고리즘

⊙ 알고리즘 I

$M_t = -\rho (I - \alpha R_t^{-1})^N R_t$ 인 경우이다. 여기서 $0 < \rho < 1$ 이며 N은 홀수이고 $\alpha > 0$ 이다.

$$R_{t+1} = [I-\rho(I-\alpha R_t^{-1})^N] R_t + x_t x_t^T, R_0=R_0^T>0 \tag{17}$$
$$O_{t+1} = O_t - R_{t+1}^{-1} x_t e_t \ , \ O_0 \tag{18}$$

오차식은 다음과 같다.

$$\phi_t = R_t^{-1} f_t \tag{19}$$
$$f_{t+1} = [I - \rho(I - \alpha R_t^{-1})^N] f_t \ , \ f_0 = R_0 \phi_0 \tag{20}$$

$R_t \gg \alpha I$ 즉, high signal level 인 경우 식의 형태는 가중형 최소자승법이 된다. $R_t \gtrsim \alpha I$ 즉, low signal level인 경우 식은 가중형 최소자승법과 표준형 최소자승법의 중간 형태가 되어 적응속도는 느려지게 된다.

⊙ 알고리즘 II

$M_t = -\sigma (R_t - \alpha I)^N (R_t + \beta I)^{-N} R_t$ 여기서 $0 < \sigma < 1$ 이며, $\alpha > 0$, $\beta \ge 0$ 이고 N은 홀수이다.

$$\begin{aligned} R_{t+1} = [I - \sigma(R_t - \alpha I)^N (R_t + \beta I)^{-N}] R_t \\ + x_t x_t^T \ , \ R_0 = R_0^T > 0 \end{aligned} \tag{21}$$
$$O_{t+1} = O_t - R_{t+1}^{-1} x_t e_t \tag{22}$$

오차식은 다음과 같다.

$$\phi_t = R_t^{-1} f_t \tag{23}$$
$$f_{t+1} = [I-\sigma(R_t-\alpha I)^N (R_t+\beta I)^{-N}] f_t \ , \ f_0=R_0 \phi_0 \tag{24}$$

이 알고리즘에서는 signal level에 따른 적응 속도의 변화 범위가 알고리즘 I보다 훨씬 광범위하다. $R_t \gtrsim \alpha I$ 즉, low signal level에서는 $[\cdot]$부분 $\lesssim I$ 으로 되어 적응속도가 느리지게 되고, high signal level에서는 $[\cdot]$부분이 적어져서 빠른 수렴성을 보일것이다. 위의 알고리즘 I과 II는 다음과 같은 성질을 갖는다.

i) $R_0 \ge \alpha I$ 이면 항상 $R_t \ge \alpha I$ 으로 된다.
ii) $R_0 \ge \alpha I$ 이고 x_t가 유계이면 R_t도 유계이다.

위의 성질에서 R_t는 singular 하게도, 무한대로 커지지도 않게 되는 것을 알 수 있다. 위의 두가지 알고리즘은 signal level에 따라 적응속도가 변화되기는 하지만, 관계식이 복잡하여 어떻게 문제점을 해결했는지 알기 어렵고 역행렬을 구해야 하기 때문에 계산량이 많은 단점이 있다.

III. 수정된 최소자승법

식(12)에서 가중치 ρ를 상수로 하는 대신, signal level에 관한 정보를 R_t의 행렬식으로 부터 얻고, 그 정보를 이용하여 가중치 ρ를 바꾸어 주고자 한다. ρ의 결정식은 다음과 같다.

$$D \geq m \qquad \rho = K \frac{(D - m)}{1 + (D - m)}$$

$$D < m \qquad \rho = 0 \qquad (25)$$

여기서 D는 R_t의 행렬식이고
K는 ρ의 상한치 $0 \leq K < 1$
m은 margin 값이다.

R_t가 점점 singular하게 되는 경우 D도 작아지는데, 이때 D가 m 이하로 되면 ρ를 0으로 하여 가중치를 가하지 않고 정보를 축적한다. 또한 high signal level에서는 가중치를 충분히 가하여 수렴속도를 빠르게 한다. 제시하고자 하는 알고리즘은 이득행렬이 영행렬이 되거나 무한대로 커지지 않도록 동작하게 된다. proposition에 알고리즘의 특성을 보였다. 증명은 부록에 제시되었다.

PROPOSITION

$R_0 = \alpha I$, $\alpha > 0$ 로 한다. 그러면
i) $R_t = R_t^T > 0 \quad \forall t$

ii) $R_t = \tilde{m} I$ 가 unforced system(즉 $x_t \equiv 0$)의 점근적으로 안정한 평형상태이다.
여기서 $\tilde{m}^n = m$ 이고, n은 추정파라미터의 갯수이다.

iii) R_t는 항상 유계이다.

REMARK

m은 R_t의 행렬식 D의 근사적인 하한치로 생각할 수 있다. 실제로 D의 최소값은 m보다 약간 작거나 같으며 0보다는 항상 크다. 그러므로, 설계자가 원하는 R_t의 하한치를 고려해서 m을 결정해야 한다.

IV. 컴퓨터 모의실험

객관성을 유지하기 위해 [1]에서 사용한 모의실험을 그대로 쓰기로 한다. $y_t = x_t^T \theta^*$ 에서 x_t 와 θ^*는 다음과 같다.

$$x_t = r \begin{bmatrix} 0.1(-1)^t \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \theta^* = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

여기서 $r = 10^{(k-1)}$, $k = 0,1,2,3$ 이다.
그림의 세로축은 $\|\phi_t\|$를, 가로축은 시간을 표시한다. $\theta_0 = 0$, $R_0 = I$ 의 초기치로 샘플링시간 0.01초 300스텝 실시하였다.
그림 1보다는 그림 2가 나은 결과를 보이고 있는데, 그것은 가중형 최소자승법의 빠른 수렴성에 기인한 것이다. 그림 1-4 중 그림 4의 경우가 가장 나은 결과를 보이고 있는데, 그러한 결과는 충분히 예상할 수 있을 것이다. 그림 5의 Kreisselmeier의 알고리즘 I은 그림 2의 가중형 최소자승법과 유사한 특성을 보이고 있다. 그림 5와 그림 6에서 Kreisselmeier의 알고리즘 I보다 알고리즘 II가 빠른 수렴성을 보이고 있다. 이것은 알고리즘 II가 signal level에 따라 광범위한 적응속도의 변화를 줄 수 있기 때문이다. 그림7에서 알 수 있듯이, 본 논문의 알고리즘이 가장 좋은 수렴특성을 보이고 있다.

V. 결론

본 논문에서는 이득행렬이 항상 positive definite이고 유계인 최소자승법이 제시되었다. 제안된 알고리즘에서는 계산시간이 적도록 하였으며, 어떻게 문제점을 해결했는지 명확하게 알 수 있다. 즉 low signal level에서는 가중치를 작게하여 R_t가 영행렬이 되지 않도록 하고, high signal level에서는 가중치를 충분히 주어 이득행렬이 영행렬이 되지 않도록 설계되었다.

부록

PROPOSITION 의 증명

i) $R_{t+1} = (1 - \rho) R_t + x_t x_t^T$ 에서, R_0는 symmetric positive definite이고 $x_t x_t^T$는 symmetric positive semidefinite이므로 R_t는 항상 symmetric positive definite이다.

ii) $\lambda(A)$는 행렬 A의 고유치를 표시한다. $x_t \equiv 0$ 이므로 R_t의 고유치는 같게된다. 그러므로, R_t의 update식을 고유치 형태로 바꾸면 $\lambda(R_{t+1}) = (1 - \rho) \lambda(R_t)$ 이고, 이때 ρ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\rho = K \frac{\lambda(R_t)^n - \tilde{m}^n}{1 + \lambda(R_t)^n - \tilde{m}^n}$$

정리하면

$$\lambda(R_{t+1}) = [\, 1 - K \frac{\lambda(R_t)^n - \tilde{m}^n}{1 + \lambda(R_t)^n - \tilde{m}^n} \,] \lambda(R_t)$$

$\lambda(R_t)^n = \tilde{m}^n$ 이 평형 상태이다.
R_t의 고유치는 $\tilde{m}$로 된다.

iii) $()_{ij}$ 는 i행 j열의 요소라 하자.
$R_{t+1} = (1 - \rho) R_t + x_t x_t^T$ 에서 각각의 요소에 대해 생각해 보면 $(R_t)_{ij} = [q-(1-\rho)]^{-1} (x_t x_t^T)_{ij}$ 으로 되고 $0 \leq \rho < K$, $0 \leq K \leq 1$ 이다. 행렬식이 m보다 커지면 각 요소는 단위원 내에 근을 갖게되고 $x_t x_t^T$가 유계이므로 R_t 역시 유계이다. 행렬식이 m보다 작아지면 $\rho=0$으로 되어 단위원에 근을 갖게 된다. 이때 R_t 의 update식은 $R_{t+1} = R_t + x_t x_t^T$ 으로 되어 R_t를 증가시켜 주므로 $R_t \geq cI \ \forall t$, $c > 0$ 으로 된다.

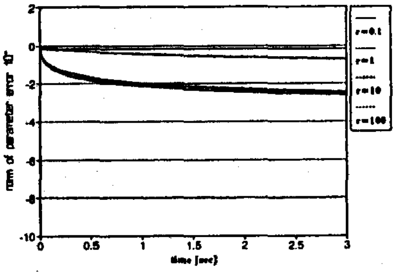

그림 1. 표준형 최소자승법

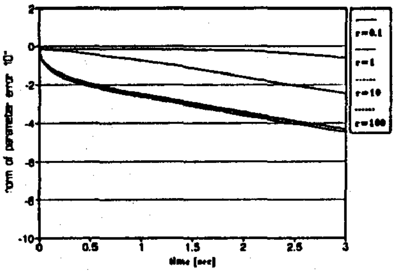

그림 2. 가중형 최소자승법 , ρ = 0.02

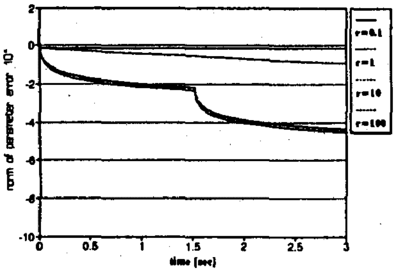

그림 3. covariance resetting 을 이용한 표준형 최소자승법 , T = 150

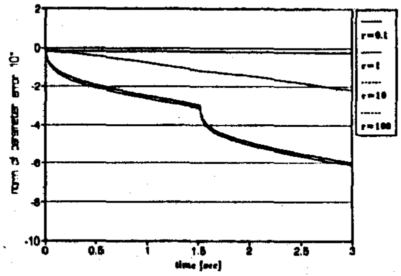

그림 4. covariance resetting 을 이용한 가중형 최소자승법 , ρ = 0.02 , T = 150

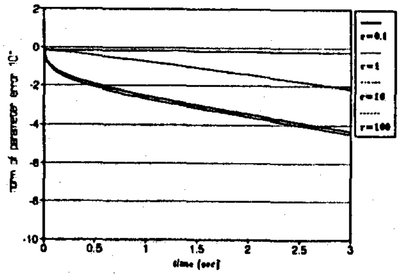

그림 5. Kreisselmeier 의 알고리즘 I
N = 1 , α= 0.1 , ρ = 0.02

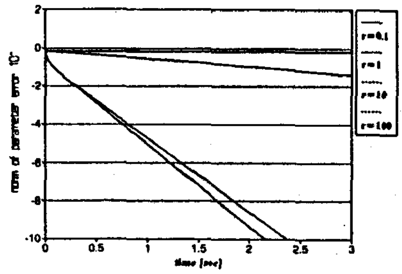

그림 6. Kreisselmeier 의 알고리즘 II
N = 1 , α= 0.01 , β = 100 , σ = 0.98

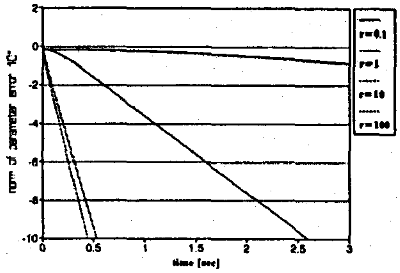

그림 7. 본 논문의 알고리즘
K = 0.4 , m = 1

참고문헌

[1] G., Kreisselmeier , " Stabilized least-squares type adaptive identifiers. " IEEE Trans. Automat. contr. , vol. AC-35 , pp. 306-310. 1990.

[2] M. E. Salgado , G. C. Goodwin and R. H. Middleton . " Modified least squares algorithm incorporating exponential resetting and forgetting ." Int. J. Contr. vol. 47 , pp. 477-491. 1988.

[3] T. R. Fortescue . L. S. Kershenbaum and B. E. Ydstie , " Implementation of self - tuning regulators with variable forgetting factors." Automatica , vol. 17 , pp. 831-835. 1981.

[4] L. R. Lozano and G. C. Goodwin , " A globally convergent adaptive pole placement algorithm without a persistency of excitation requirement." IEEE Trans. Automat. contr. , vol. AC-30 , pp. 795-798. 1985.

[5] J. E. Slotine and W. Li , "Composite adaptive control of robot manipulators. " Automatica , vol. 25 , pp. 509-519. 1989.

[6] G. C. Goodwin and D. Q. Mayne , " A parameter estimation perspective of continuous time model reference adaptive control. " Automatica , vol. 23 , pp. 57-70. 1987.

7] L. C. Fu and S. S. Sastry , " Frequency domain synthesis of optimal inputs for on-line identification and adaptive control." IEEE Trans. Automat. contr. , vol. AC-36 . pp. 353-358. 1991.