안정도 여유를 증가시킨 H_2 설계 기법

박 기 헌
성균관대학교 전기공학과

On the Design of H_2 Controllers for Improved Stability Margin

Park Kiheon
Dept. of Electrical Engineering, Sung-Kyun-Kwan University

Abstract

A mixed H_2 / H_∞ design methodology is proposed for a single-input-single-output system. The reciprocal stability margin (RSM) function is defined for the perturbed plant with additive uncertainties. A sub-optimal H_2 controller is sought to minimize the RSM function.

1. 서 론

70년대 말부터 개발되기 시작한 H_2 설계[11-14]와 H_∞ 설계 기법[1,2]은 선형제어 이론에 많은 기여를 하고 있다. H_∞ 설계의 장점은 기존의 제어 이론에서 경험적으로 설명하던 부분을 수학적인 모델로 정리할 수 있다는 점에 있다. 그러나 H_∞ 기법만으로는 제어시스템의 다양한 사양요구를 충족시키기는 어려우며 기존의 H_2 기법과의 결합이 필요하게 된다. 이 분야에서 많은 연구가 진행중이지만 [3,4] 아직 뚜렷한 결과는 없는 편이다.

일반적인 H_∞ 문제가 Nevanlinna-Pick 문제와 밀접한 관련이 있다는 것은 잘 알려진 사실이다[1-5]. Bongiorno 와 Youla[6]는 H_2 / H_∞ 결합문제를 풀기 위해서는 strictly proper 유리함수들 중에서 H_∞ 문제의 해를 구하는 것이 필요함을 밝혔다. 이 논문에서는 이와 같은 접근방식으로 단입력 단출력 시스템에 대한 H_2 / H_∞ 결합문제를 다루고 있다.

모든 함수들은 복소수 인수(argument) s 를 갖는 유리함수로 제한하기로 하며 혼동의 우려가 없는 한 함수의 인수들은 생략하기로한다. 기호 "Re s"는 "복소수 인수 s 의 실수부"를 의미하며 기호 " =: "는 " 정의에 의해 "의 의미 이다. 이 논문의 Blaschke product $B_p(s)$는

$$B_p(s)=\prod_{i=1}^{N}\frac{s-\bar{a}_i}{s+a_i}$$

의 형태로 주어지는 유리함수로 정의한다. 또한 M이 유한한 양의 실수라 할때 집합 H^M 은

$$H^M = \{\, u(s) \mid u(s)\text{는 폐우평면}(\ \mathrm{Re}\ s \ge 0\ )\text{에서 해석적(analytic) 이고 } |u(s)| \le M \,\}$$

으로 정의한다. 특별히, H_∞ 는 폐우평면에서 해석적이고 크기(modulus)가 유한한 함수들의 집합이다. H_∞ 에 속하는 함수 u(s)의 H_∞ norm 값 $\|u(s)\|_\infty$ 는

$$\|u(s)\|_\infty = \sup_s\{\ |u(s)| \ :\ \mathrm{Re}\ s \ge 0\ \}$$

으로 정의한다. $\bar{a}$ 는 복소수 a 의 공액복소수를 표시한다. 또한 $G_*(s)$는 $G(-s)$를 나타내며 $G(s)$의 부분분수 표시에서 $\{G\}_+$, $\{G\}_-$ 는 각기 폐좌평면과 우평면의 극점을 포함하는 부분을 나타낸다.

2. H_2/H_∞ 혼합 문제의 설정

이 장에서는 그림 1 의 제어 시스템에 대하여 성능 최적화 (H_2 설계) 문제와 안정도 여유 (H_∞ 설계) 문제를 결합시키는 방법을 제시하겠다.

2.1 H_2 설계 문제

그림에서 $\xi_d(t)$ 와 $\xi_m(t)$는 백색 잡음이며 파워 주파수 밀도 함수 (power spectral density function) 는 각기 G_d 와 G_m으로 표시한다. G_m은 양의 실수값이며 G_d는 일반성을 잃지 않고 1 로 하겠다. 전달함수 $\tilde{P}(s)$와 $P_o(s)$는 strictly proper이고, 그림의 부시스템 부분은

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + G_1 r(t) + G_2 \xi_d(t) \tag{1}$$
$$y(t) = Hx(t) \tag{2}$$

의 상태공간 모델을 갖는다고 하자. 여기서 F, G_1, G_2, H 는 각기 qxq, qx1, qx1, 1xq 의 상수 행렬이고 (F, G_1) 과 (F, G_2) 는 제어 가능이고 (F, H)는 관측가능으로 가정한다. 식(1), (2)에 의해

$$y(s) = \tilde{P}(s)r(s) + P_o(s)\xi_d(s) \tag{3}$$

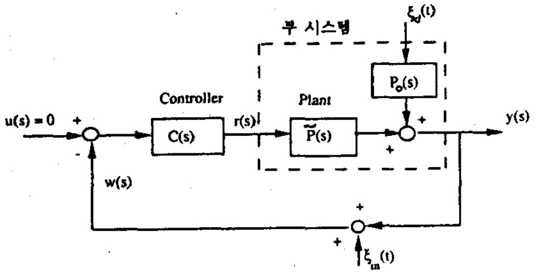

그림 1. 기본적인 궤환제어 시스템

의 표현을 얻게 되는데 이때

$$\tilde{P}(s) = H(sI-F)^{-1}G_1,\quad P_o(s) = H(sI-F)^{-1}G_2 \qquad (4)$$

이다. 그림에서 플랜트 입력 r(s)를 외부 입력들로써 표시하면

$$r(s) = P(s)u(s) - R(s)(\xi_m(s) - P_o(s)\xi_d(s)) \qquad (5)$$

으로 되는데 이때 루프전달함수 R(s)는

$$R(s) = (1 + C(s)\tilde{P}(s))^{-1}C(s) \qquad (6)$$

로 정의되는 양이다. 식 (6)을 C(s)에 대하여 다시 풀면

$$C(s) = (1 - R(s)\tilde{P}(s))^{-1}R(s) \qquad (7)$$

가 되는데 식 (6),(7) 은 C 와 R 사이의 1:1 대응 관계를 나타내고 있으며 따라서 제어기 C(s) 를 설계하는 것은 루프전달함수 R(s)를 설계하는 것과 동가이다.

최적 H_2 설계 문제는, 폐루프 시스템을 안정화 시키는 제어기들 중에서 주어진 자승 형태의 평가함수를 최소화시키는 제어기를 찾는 문제이다. $G_e(s)$와 $G_r(s)$를 각기 시스템 오차 e(s) = u(s) - y(s) 와 플랜트 입력 r(s)의 파워 주파수 밀도 함수라고 하면

$$E = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}[G_e(s) + kG_r(s)]\,ds \qquad (8)$$

는 대표적인 자승형태의 평가함수이다. 여기서 k는 가중치 상수로서 항상 양의 실수이다. 공칭플랜트 $\tilde{P}(s)$를

$$\tilde{P}(s) = B(s)/A(s) \qquad (9.1)$$

와 같이 서로 소(coprime)인 다항식 A, B의 비로써 표시하면 항상

$$A(s)X(s) + B(s)Y(s) = 1,\quad X(s) \neq 0 \qquad (9.2)$$

을 만족하는 다항식 X(s), Y(s)가 존재한다.

보조 정리 1 [11,12] : 그림 1 의 폐루프 시스템을 안정화 시키는 루프 전달함수 R(s)는

$$R(s) = A(s)(\,Y(s) + K(s)A(s)) \qquad (10)$$

의 형태이며 (이러한 R(s)를 admissible R(s)라 하자) 이때 K(s)는 폐우평면에서 해석적인 임의의 유리함수이다. 유리함수 Λ(s), Ω(s)를

$$A_*(\tilde{P}_*\tilde{P} + kQ)A = \Lambda_*\Lambda \qquad (11)$$

$$A(P_oP_{o*} + G_m)A_* = \Omega\Omega_* \qquad (12)$$

의 두식의 Wiener - Hopf spectral factor 라고 하자.

보조 정리 2 [12-14]

a) 그림 1의 폐루프 시스템을 안정화시키고 (8) 식의 평가함수가 유한한 값을 갖게하는 모든 제어기 (이러한 제어기를 유한 H_2 제어기라 하자)의 형태는

$$R(s) = A\Lambda^{-1}(\{\Lambda A^{-1}Y\Omega\}_- + \{\Gamma\}_+ + Z)\,\Omega^{-1}A \qquad (13)$$

으로 주어지는데 이때

$$\Gamma = \Lambda_*^{-1}B_*P_oP_{o*}A_*\Omega_*^{-1} \qquad (14)$$

이고 Z(s) 는 폐우평면에서 해석적 (analytic) 이고 strictly proper인 임의의 유리함수(rational function) 이다.

b) 유한 H_2 제어기중, (8)식의 평가함수를 최소화 시키는 최적 H_2 제어기 $\tilde{R}(s)$는 Z(s)=0 인 경우이다. 즉

$$\tilde{R}(s) = A\Lambda^{-1}(\{\Lambda A^{-1}Y\Omega\}_- + \{\Gamma\}_+)\Omega^{-1}A \qquad (15)$$

c) 최적 제어기 경우와 유한 H_2 제어기 경우의 평가함수를 각기 $\tilde{E}$ 와 E 로써 표시하면

$$E = \tilde{E} + \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} Z(s)Z_*(s)\,ds \qquad (16)$$

이 성립한다.

식(16) 은 최적제어기 $\tilde{R}$ 대신 (13) 식의 준 최적 제어기 R(s)를 사용할 때의 평가함수의 증가량을 표현하고 있다.

2.2 안정도 여유 문제

그림 1 에서 실제 플랜트 P(s)는 공칭 플랜트 전달함수 $\tilde{P}(s)$와

$$P(s) = \tilde{P}(s) + \theta(s) \qquad (17)$$

의 관계가 있다 하자. 여기서 θ(s)는 안정함수(즉 폐우평면에 극점이 없는 함수)로 가정 한다. 이 경우 전체 시스템의 안정도를 판별 하는 특성 다항식 Δ(s)는[11]

$$\Delta(s) = \Delta_c\Delta_{\tilde{p}}\Delta_\theta(\,1 + C(\tilde{P}+\theta)\,) \qquad (18)$$

$$= \Delta_c\Delta_{\tilde{p}}\Delta_\theta(\,1 + C\tilde{P}\,)(\,1 + (1+C\tilde{P})^{-1}C\theta) \qquad (19)$$

$$= \Delta_c\Delta_{\tilde{p}}(1 + C\tilde{P})\Delta_\theta(1 + R\theta) \qquad (20)$$

으로 주어진다. 이때 $\Delta_c, \Delta_{\tilde{p}}, \Delta_\theta$ 는 각기 부 시스템 C(s), $\tilde{P}(s)$, θ(s) 의 특성 다항식 이고 $\Delta_c\Delta_{\tilde{p}}(1+C\tilde{P})$ 는 공칭 모델 $\tilde{P}(s)$에 대한 폐루프 시스템의 특성 다항식 이다. 식(20)에서 θ(s)가 안정함수이므로 Δ_θ 는 Strict Hurwitz 다항식이고 따라서 공칭모델 $\tilde{P}$ 에 대하여 시스템이 안정화 되어 있다면 Δ(s)가 S.Hurwitz 다항식이 되기위한 필요충분조건은

$$1 + R(s)\theta(s) \neq 0\ ,\ \mathrm{Re}\ s \geq 0 \qquad (21)$$

이 된다(이 때 $\Delta_c\Delta_{\tilde{p}}(1+C\tilde{P})\Delta_\theta$가 다항식이라는 사실이 이용된다). 식(21)은 플랜트에 불확정성 요소 θ(s)가 있을 때 전체 시스템의 안정도가 유지되는 지의 여부를 판단해주는 식이며 따라서 안정도 여유 문제와 직접 관련되는 식이다.

가 정 1 : 플랜트 섭동항 θ(s)는

$$0 < |\theta(j\omega)| < |\upsilon(j\omega)|\ ,\ \forall\omega \qquad (22)$$

의 범위에 있으며 함수 $\upsilon(s)$는 안정하고 최소위상이다. 식(22)에서 $\theta(s)$의 범위를 제한하는 함수 $\upsilon(s)$를 외곽함수라 부르자.

이제 식(21)의 내용과 가정 1의 내용을 함께 생각하면 다음의 정리를 얻을 수 있다.

보조 정리 3 : 그림 1의 폐루프 시스템이 (22)식을 만족하는 모든 $\theta(s)$에 대하여 안정되기 위한 필요충분 조건은 루프전달함수 R(s)가 공칭모델 $\tilde{P}(s)$에 대하여 전체 시스템을 안정시키고 모든 ω값에 대하여

$$|R(j\omega)\upsilon(j\omega)| < 1 , \tag{23}$$

$$(\text{혹은 동가적으로 } \| R(s)\upsilon(s) \|_\infty < 1) \tag{24}$$

을 만족시키는 것이다.

보조 정리 3 의 증명은 흔히 Nyquist D-contour 방식을 이용하여 유도하지만 이 논문에서는 특성 다항식(Characteristic polynomial) 개념[11]을 이용하였다.

이상의 분석결과를 통하여 폐루프 시스템의 안정도 여유 문제를 다루는 두 가지 접근방식을 생각할 수 있다. 첫째로 가정 1의 외곽함수 $\upsilon(s)$를 정확히 구할 수 있는 경우를 고려하자. 이 경우는 당연히 식 (23) 혹은 (24)를 만족하는 R(s) 를 구하는 문제로 귀착되는데 흔히 강인 안정기(robust stabilizer) 문제라고 지칭한다. 다음으로는 외곽함수 $\upsilon(s)$를 정확히 구할 수 없을 경우에 (23)식을 새로운 각도로 해석하는 접근방식을 생각할 수 있다. 식 (23)으로부터 폐루프 시스템의 안정화 조건은 모든 ω에 대하여

$$|\upsilon(j\omega)| < \left| \frac{1}{R(j\omega)} \right| \tag{25}$$

으로 표현되는데 이 경우 안정도 여유를 "시스템의 안정도를 깨지 않는 섭동항 $\theta(j\omega)$의 최대크기"로 생각한다면, 식 (25)의 $\upsilon(j\omega)$의 상한값 $1/|R(j\omega)|$이 클수록 시스템의 안정도 여유는 크게 되고 따라서

$$\sup_{\substack{R\\ \text{admissible}}} \inf_{\omega} \left| \frac{1}{R(j\omega)} \right| = \inf_{\substack{R\\ \text{admissible}}} \sup_{\omega} |R(j\omega)| \tag{26}$$

$$= \inf_{\substack{R\\ \text{admissible}}} \| R(s) \|_\infty \tag{27}$$

의 최적화 문제로 귀착된다. 식 (27) 과 같은 형태의 문제를 역 안정도 여유(Reciprocal Stability Margin) 최소화 문제로 부르기로 하자. 일반적으로 폐루프 시스템의 안정화가 보장되는 외곽함수 $\upsilon(s)$의 범위가

$$|\upsilon(j\omega)| < \left| \frac{1}{\Psi(j\omega)} \right| , \quad \forall\omega \tag{28}$$

의 형태로 표현될 때 $\Psi(s)$를 역 안정도 여유 함수로 부르기로 하고

$$M_o =: \inf_{R \text{ admissible}} \| \Psi(s) \|_\infty \tag{29}$$

의 값을 주어진 섭동 모델에 대한 최대 안정도 여유 라고 부르자. 이제까지의 내용으로 보면 식 (17)과 같은 덧셈형 섭동에 대해서는 $\Psi(s)=R(s)=(1 + C(s)\tilde{P}(s))^{-1}C(s)$ 임을 알 수 있다. 일반적으로 플렌트 불확정성의 모델이 바뀌면 Ψ 의 형태도 바뀔 것이므로 M_o 값을 지칭할 때 구체적인 섭동 모델을 표시하는 것은 중요하다.

2.3 안정도 여유를 증가시킨 H_2 설계 문제

이제 2 장의 1절과 2절의 내용을 통합하는 문제를 생각하여 보자. 먼저

$$f(s) = A\Lambda^{-1}(\{\Lambda A^{-1}YQ\}_- + \{\Gamma\}_+)Q^{-1}A \tag{30}$$

$$g(s) = A\Lambda^{-1}Q^{-1}A \tag{31}$$

로 정의하자. 식 (8)의 평가함수 값을 유한하게 하는 제어기중 안정도 여유를 최대화(동가적으로 역 안정도 여유를 최소화)하는 제어기를 골라내는 문제는

$$\inf_{\substack{\text{유한 } H_2 \\ R(s)}} \|R(s)\|_\infty = \inf_{\substack{Z(s) \text{ 폐우평면 해석적} \\ \text{strictly proper}}} \|f(s)+g(s)Z(s)\|_\infty \tag{32}$$

의 최적화 문제로 표현된다. 위의 최적화 문제가 표준 H_∞ 문제[9,10]와 다른 점은 Z(s)의 strictly proper 조건때문에 $s = \infty$ 의 보간조건이 추가된다는 것이다. 식 (32) 에서 얻어진 infimum값을 $\tilde{M}$이라 하자. 식 (32)로 표현되는 최적화 문제의 최적해 $\tilde{R}(s)$ 와 ε - 범위 해 $Re(s)$는 각기

$$\|\tilde{R}(s)\| = \tilde{M} \tag{32.a}$$

$$\|\tilde{R}e(s)\|_\infty \le \tilde{M}+\varepsilon \quad , \ \varepsilon > 0 \tag{32.b}$$

을 만족하는 함수로 정의하자.

3. 주요 결과

H_∞ 문제와 Nevanlinna-pick 문제가 밀접한 관계가 있다는 것은 잘 알려져 있다. 이 장의 1 절에서는 표준 N-P 문제, 2 절에서는 확장된 N-P 문제, 3 절에서는 역 안정도 여유 최소화 문제의 해를 각기 다루겠다.

3.1 Nevanlinna-pick 문제

Nevanlinna-pick (NP)문제: 다음의 복소수 쌍을 생각하자.

$$(\alpha_i, \beta_i), \quad 1 \le i \le n \tag{33}$$

여기서 $Re\ \alpha_i > 0$ 이고 $i \ne j$ 경우에는 $\alpha_i \ne \alpha_j$ 이다. 이제 H^∞에 속하고 다음의 보간 조건을 만족하는 함수 $u(s)$를 찾는 문제를 생각하자:

$$u(\alpha_i) = \beta_i, \quad 1 \le i \le n \tag{34}$$

이 문제의 해의 조건은 잘 알려져있는데[7,8] 결과를 적기 전에 먼저 (33) 식의 복소수값으로 부터 얻어지는 Fenyves 배열 $\beta_{i,j}$ 와 이 배열값에 의해 결정되는, 두 함수 $u_j(s)$와 $u_{j+1}(s)$ 사이의 homographic 변환을 정의하자 :

$$\beta_{i,j+1}(M) = \frac{M^2(\alpha_i+\bar{\alpha}_j)(\beta_{i,j}-\beta_{j,j})}{(\alpha_i-\alpha_j)(M^2-\bar{\beta}_{j,j}\beta_{i,j})} \quad \begin{matrix} 1 \le j \le n-1 \\ j+1 \le i \le n \end{matrix} \tag{35}$$

$$\beta_{i,1} =: \beta_i \qquad 1 \le i \le n$$

$$u_j(s) = M^2 \cdot \frac{(s-\alpha_j)u_{j+1}(s) + \beta_{j,j}(s+\bar{\alpha}_j)}{M^2(s+\bar{\alpha}_j) + \bar{\beta}_{j,j}(s-\alpha_j)u_{j+1}(s)} \tag{36}$$

여기서 식 (35)의 인수 M은 비열값 β가 M의 함수값임을 명시하고 있다. 식(36)에서 u_{j+1}에서 u_j를 얻는 homographic 변환은

$$u_j(s) = L_j(M,s)\, u_{j+1}(s) \qquad (37)$$

의 간략한 식으로 표현할 수 있는데 여기서도 역시 변환식이 M의 함수임이 명시되어있다.

보조정리 4 [8] : NP 문제의 해 u(s) 가 존재하기 위한 필요충분조건은

$$\text{(i)}\ |\beta_{k,k}(M)| < M \qquad 1 \le k \le n \qquad (38)$$

혹은

$$\text{(ii)}\ |\beta_{k,k}(M)| < M \qquad 1 \le k \le m-1 < n-1 \qquad (39)$$

$$|\beta_{m,m}(M)| = M \qquad (40)$$

$$\beta_{i,m}(M) = \beta_{m,m}\ , \quad m+1 \le i \le n \qquad (41)$$

인 경우이다. (i)의 경우 임의의 해 u(s)는

$$u(s) = L_1(M,s)L_2(M,s)\cdots\cdots L_n(M,s)u_{n+1}(s) \qquad (42)$$

로 얻어지는데 $u_{n+1}(s)$는 H^M 에 속하는 임의의 함수이다. 다음의 최소값 문제는 H_∞ 최소화 문제와 밀접한 관계가 있으며 그 해답은 보조정리 5에 정리되어있다.

최소 M값 문제 : H^M에 속하고 식(34)의 보간조건을 만족하는 함수 $\tilde{u}(s)$가 존재 하게하는 최소의 M값을 찾고 이 M값에 대한 $\tilde{u}(s)$를 결정한다 하자.

보조정리 5 [1,8] : 최소 M 문제에서 최소 M 값 (이 값을 M_0라하자)은 항상 존재하고 이 값을 결정하는 필요 충분조건은 보조정리4의 경우(ii)가 일어날 때이다. 즉

$$|\beta_{k,k}(M_0)| < M_0\ , \quad 1 \le k \le m-1 < n-1 \qquad (43)$$

$$|\beta_{m,m}(M_0)| = M_0\ ,\ \beta_{i,m}(M_0)=\beta_{m,m}(M_0),\ m+1 \le i \le n \qquad (44)$$

인 경우이다. 이 때함수 $\tilde{u}(s)$는

$$\tilde{u}(s) = L_1(M_0,s)L_2(M_0,s)\cdots L_{m-1}(M_0,s)\beta_{m,m} \qquad (45)$$

로써 유일하게 결정된다.

3.2 확장된 Nevanlinna-pick 문제

H_2 와 H_∞ 최적화 기법이 결합된 제어기 설계 문제에서는 표준 H_∞ 문제와는 조금 다른 형태의 H_∞ 문제를 풀어야 한다. 이 절에서는 이러한 특수한 형태의 H_∞ 문제를 다루기로 한다. 먼저 확장된 최소 M 값 문제부터 살펴보자.

확장된 최소 M값 문제 : H^M 에 속하고

$$u(a_i) = \beta_i \qquad 1 \le i \le n \qquad (46)$$

$$u(\infty) = \beta_\infty \qquad (47)$$

의 보간조건을 만족하는 함수 u(s)가 존재하게 하는 최소의 M 값을 구해보자. 여기서 a_i 는 (33)식에서와 같다.

이 문제의 답을 서술하기 전에 다음의 정의를 하자.

정의 1 : $\tilde{M}$을 확장 최소 M 문제의 최소값이라 하자. 확장 최소 M 문제의 최적해 $\tilde{u}(s)$ 와 ε-범위 해 $u_e(s)$는 각기

$$\|\tilde{u}(s)\|_\infty = \tilde{M} \qquad (48)$$

$$\|u_e(s)\|_\infty \le \tilde{M} + \varepsilon\ \ ,\ \ \varepsilon > 0 \qquad (49)$$

을 만족하는 함수로서 정의한다.

정리 1 [15]: 확장 최소 M 문제의 최소값 $\tilde{M}$ 은

$$\tilde{M} = \max(\ M_0\ ,\ |\beta_\infty|\ ) \qquad (50)$$

이다. 여기서 M_0는 앞의 최소 M 문제의 최소값이다. 이때 ε-범위 해 $u_e(s)$는

$$u_e(s)=L_1(\tilde{M}+\varepsilon,s)L_2(\tilde{M}+\varepsilon,s)\cdots L_n(\tilde{M}+\varepsilon,s)u_{n+1}(s) \qquad (51)$$

로 구해지는데 $u_{n+1}(s)$는 $H^{\tilde{M}+\varepsilon}$에 속하며 $u_{n+1}(\infty)=\beta_{\infty,n+1}$을 만족하는 임의의 함수이다. 여기서 $\beta_{\infty,n+1}$ 은

$$\beta_{\infty,j+1} = \frac{(\tilde{M}+\varepsilon)^2\ (\ \beta_{\infty,j} - \beta_{j,j}(\tilde{M}+\varepsilon))}{(\tilde{M}+\varepsilon)^2 - \beta_{j,j}(\tilde{M}+\varepsilon)\ \beta_{\infty,j}}\ ,\ 1 \le j \le n \qquad (52)$$

$$\beta_{\infty,1} = \beta_\infty \qquad (53)$$

의 공식에 의해 얻어지는 값이며 $\beta_{j,j}$는 (35)에서 정의된 대로이다. 최적해 $\tilde{u}(s)$는 $|\beta_\infty| \ge M_0$ 인 경우에만 존재하며 $|\beta_\infty| > M_0$경우의 한 최적해는

$$\tilde{u}(s)=L_1(|\beta_\infty|,s)L_2(|\beta_\infty|,s)\cdots L_n(\ |\beta_\infty|,s)\beta_\infty B_p(s) \qquad (54)$$

로 얻어지는데 여기서 $B_p(s)$는 임의의 Blaschke product 이다. $|\beta_\infty|=M_0$ 인 경우는 (45)식의 함수 $\tilde{u}(s)$가 유일한 최적해이다.

다음에는 특수한 H_∞ 최적화 문제를 제시하고 이 문제가 확장된 최소 M문제로써 해결될 수 있음을 보이겠다.

가정 2 : 주어진 함수 f(s), g(s)는 폐우평면 (Re s ≥ 0) 에서 해석적이고 g(s)의 폐우평면 영점(zero) a_i, i=1→n 는 서로 다르고 단순(simple) 하다. 또한 $f(a_i) \neq 0$, i=1→n 이다.

가정 3 : g(s)는 허수축 s = jω 의 유한한 구간에서는 영점을 갖지 않는다.

가정 4 : f(s)와 g(s)는 proper 함수이다.

가정 5 : g(s)의 분모와 분자의 차수는 같다.

특수한 형태의 H_∞ 최적화 문제 : 가정 2 부터 가정 5 까지가 성립한다 하자. 이제 u(s)=: f(s)-g(s)z(s) 의 H_∞ norm 을 최소화시키는 폐우평면 해석함수 z(s)를 strictly proper한 제한조건 하에서 구해보자.

보조정리 6 [15] : 함수 z(s)가 특수 H_∞ 문제의 해가되는 필요충분 조건은 u(s)가

$$u(a_i) = \beta_i =: f(a_i), \qquad 1 \le i \le n \qquad (55)$$

$$u(\infty) = \beta_\infty =: f(\infty) \qquad (56)$$

의 보간조건을 만족하는 확장 최소 M 문제의 해가 되는 것이다.

3.3 안정도 여유를 증가시킨 준최적 H_2 설계

이 절에서는 2 장 3 절에서 제기된 H_2 설계와 H_∞ 설계의 통합 문제에 대한 해를 구해보기로 한다. 일반적으로 유한

H_2 제어기로써 얻을 수 있는 최대 안정도 여유 M_l 과 admissible R(s)로써 얻을 수 있는 최대의 안정도 M_o를 비교하면 항상

$$M_l \le M_o \qquad (57)$$

이다. 다음 정리는 덧셈형의 섭동에 대해서는 윗 식의 등호가 성립함을 보인다.

가 정 6 : P(s)의 분모항 A(s)의 우평면 영점을 $a_i, i=1 \to n \le g$ 라 하자. A(s)는 $j\omega$-축 영점을갖지 않고 우평면 영점들은 서로 다르고 단일 근이다.

정 리 2 : Admissible R(s)로 덧셈형 섭동항에 대하여 얻을 수 있는 최대 안정도 여유를 M_o라고 하자. 유한 H_2 제어기를 사용하는 경우, 덧셈형 섭동항에 대하여 얻을 수 있는 최대 안정도 여유 값은 M_o와 같다. 즉

$$\inf_{\text{유한 } H_2\ R} \| R \| = M_o =: \inf_{R \text{ admissible}} \| R(s) \| \qquad (58)$$

증 명 : 참고 문헌 [16]의 결과에 의하면 (31) 식의 ΛA^{-1}, $\Omega^{-1}A$는 모두 분모 분자의 차수가 같고 따라서 가정 3,4,5, 가 만족된다. 또한 (31)식에서 $\{\Lambda A^{-1}y\Omega\}_-$ 은 A(s)의 우평면 영점들을 극점으로 가지므로 f(s)는 결국 A(s)의 우평면 영점을 단일근으로 갖는다. 이제

$$B_p(s) = \prod_{i=1}^{n} \frac{s - \bar{a}_i}{s + a_i} \qquad (59)$$

로 정의하고 $| B_p(j\omega) | = 1$ 인 것을 이용하면

$$\inf_{z(s)} \| f(s) + g(s)Z(s) \|_\infty = \inf_{z(s)} \| fB_p^{-1} + g(s)B_p^{-1}Z(s) \|_\infty \qquad (60)$$

가 되는데 $fB_p^{-1} =: \tilde{f}$ 는 A(s)의 우평면 영점을 갖고 있지 않으며 $g(s)B_p^{-1} =: \tilde{g}$ 는 A(s)의 우평면 영점을 같은 차수로 갖는다. 따라서 $\tilde{f}$ 와 $\tilde{g}$ 는 가정 2-5를 모두 만족하므로 결국 (60)식의 최소화 문제는,

$$u(a_i) = \tilde{f}(a_i) \quad i=1 \to n$$
$$u(\infty) = \tilde{f}(\infty) = 0 \qquad (61)$$

를 만족하는 최소 H_∞ norm 값의 $u(s) \in H_\infty$ 를 구하는 문제이며 이 해는 3장 2절에서 이미 구해졌다. 약간의 계산 과정을 거치면

$$\tilde{f}(a_i) = (\tilde{P}(s)B_p(s))^{-1} |_{s=a_i} \qquad (62)$$

임을 구할 수 있다. 한편 admissible R(s)에 의한 최대 안정도 여유 문제는

$$\inf_{R \text{ admissible}} \| R(s) \| = \inf_{K(s)} \| AY + AKA \|_\infty \qquad (63)$$

$$= \inf \| B_p^{-1}AY + B_p^{-1}AK \|_\infty \qquad (64)$$

이 되어 [15]의 결과를 이용하면

$$u(a_i) = (B_p^{-1}AY) |_{s=a_i} = (\tilde{P}(s)B_p(s))^{-1} |_{s=a_i} \quad (65)$$

를 만족하는 최소 H_∞ norm 값의 $u(s) \in H_\infty$ 를 구하는 문제와 동가이다. 식(62)와 (65)를 비교하면 우평면 영점의 보간조건이 같으므로 결국 (60)식과 (63)식의 최적화 문제는 표준 H_∞ 문제와 확장된 H_∞ 문제의 관계에 있다. 식 (61)에서 $u(\infty)=0$ 이므로 정리 1의 내용에 따라 (58)식의 결과가 된다. 증명 끝.

증명 내용중 식 (61)에서 $u(\infty) = 0 < M_o$ 이므로 정리 1 의 내용에 따라 식 (32)의 최적화 문제의 최적해는 존재하지 않는다. 다음 정리는 정리 1의 결과에 따라 ε-범위의 해를 구하는 공식이다.

정 리 3 : $M_o + \varepsilon = N$ 으로 표시할 때

a) 식 (32)의 최적화 문제의 ε-범위 해 Re(s)는

$$Re(s) = L_1(N,s)L_2(N,s) \cdots\cdots L_n(N,s)R_{n+1}(s) \quad (66)$$

로 얻어지는데 $R_{n+1}(s)$는 H^N 에 속하며 $R_{n+1}(\infty) = \beta_{\infty,n+1}$ 을 만족하는 임의의 함수이다. 이 때 $\beta_{\infty,n+1}$은 (52),(53)식에서 $\beta_\infty = 0$ 으로 얻어지는 계수이다.

b) 식 (66)의 제어기를 사용할 경우의 평가함수 값은 최적 H_2 제어기의 경우보다

$$\Delta E = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \tilde{Z}(s)\tilde{Z}(-s)\, ds \qquad (67)$$

만큼 더 많은데 이 때

$$\tilde{Z}(s) = A^{-1}\Lambda ReB_p\Omega A^{-1} - \{\Lambda A^{-1}Y\Omega\}_- - \{\Gamma\}_+ \qquad (68)$$

이다.

4. 결 론

H_2 와 H_∞ 설계 기법을 결합시키는 한 방법이 제안 되었다. 덧셈형의 섭동항에 대한 페루프 시스템의 안정도 여유를 임의의 값으로 조정하면서, 주어진 자승 평가 함수의 값을 유한하게 하는 H_2 제어기의 설계 방식이 제시되었다. 앞으로의 연구 과제는 (67)식의 값을 최소화시키는 Re(s)를 찾는 것이다.

참 고 문 헌

[1] G. Zames and B. A. Francis, " Feedback, Minimax Sensitivity, and Optimal Robustness." IEEE Trans. Auto. Contr., Vol. AC-28, pp 585-601, May 1983.

[2] B.A.Francis and G.Zames, "On H∞-optimal sensitivity theory for SISO feedback systems."IEEE Trans.auto. contr., Vol AC-29, pp 9-16, Jan. 1984.

[3] J. C. Doyle, K. Zhou and B. Bodenheimer, " Optimal control with mixed H_2 and H_∞ preformance objectives." Proc. Amer. Contr.conf., June 1989.

[4] K. Zhou, J. C. Doyle, K. Glover and B.Bodenheimer, " Mixed H_2 and H_∞ control." Proc. Amer.contr.cnf., June 1990.

[5] Ph. Delsarte, Y. Genin and Y. Kamp, " On the role of the Nevanlinna-Pick problem in circuit and system theory." Circuit Theory and Appl., Vol.9, pp.177-187, 1981

[6] J.J.Bongiorno,Jr. and D.C. Youla, " On the design of two-degree-of-freedom multivariable feedback control systems." Report 1452-86, WRI, Polytechnic University, Farmingdale, New York, 1986.

[7] G. Pick. " Uber die Beschränkungen analytischer Funktionen, weiche durch vorgegebene Funktionswerte bewirkt werden." Math. Ann. 77, 7-23, 1916.

[8] J. L. Walsh. " Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain."American Math.Society, 1935

[9] B. A. Francis. " A course in H∞ control theory." Springer-Verlag, New York, 1987.

[10] B.A.Francis and J.C.Doyle. "Linear control theory with an H∞ Optimality criterion." SIAM J.contr. and opti.,Vol.25, pp 815-844, 1987.

[11] D.C.Youla, H.Jabr and J.J.Bongiorno, Jr.," Modern Wierner - Hopf Design of Optimal Controllers-PartⅡ: The Multivariable Case," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-21, No. 3, pp.319-338, June 1976.

[12] D.C. Youla and J.J. Bongiorno, Jr., " A Feedback Theory of Two-Degree-of-Freedom Optimal Wierner-Hopf Design," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-30, No. 7, pp.652-665, July 1985.

[13] K.Park, and J.J.Bongiorno, Jr., "A General Theory for the Wiener - Hopf Design of Multivariable Control Systems, " IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-34, pp. 619-626, June 1989.

[14] K.Park, and J.J.Bongiorno,Jr.,"Wiener-Hopf Design of Servo - Regulator - Type Multivariable Control Systems Including Feedforward Compensation," Int. J. Control, Vol. 52, pp. 1189-1216, Nov. 1990

[15] K. Park, " A Study on Special-Type H∞ Problems, " To appear in Sung-Kyun-Kawn Univ. Report.

[16] K. Park and D.C. Youla, "Numerical Calculation of the Optimal Three-Degree-of-Freedom Wiener-Hopf Controller," submitted for publication to Int.J. Control.