

# 다변수 가변구조 제어 시스템에서 시변 스위칭 초평면의 새로운 시도

이 주 장, 김 종 준, 김 은 선<sup>o</sup>  
韓國科學技術院 電氣 및 電子工學科

## New Approach of Time-varying Switching Hyperplane in Multivariable Variable Structure Control Systems

Ju-Jang Lee, Jong-Jun Kim, Eun-Sun Kim

Dept. of Electrical Engineering, Korea Advanced Institute of Science and Technology

Abstract

A new approach of a time-varying switching hyperplane based on the theory of variable structure systems (VSS) is proposed for the control of multivariable systems. While the conventional switching surface can not achieve the robust performance against parameter variations and disturbances before the sliding mode occurs, the proposed switching hyperplane, which is obtained from the eigen-structure assignment theory powerfully used in the linear multivariable systems, ensures the sliding mode from the initial state. And new continuous control input which guarantees the sliding mode is proposed. This new control input does not arise chattering problem which arises with the conventional control input of variable structure control systems. Through numerical examples, the excellent performances of the proposed controller are verified.

1. 서론

내부적 불확실성과 외란에 좌우되는 동적 시스템의 위관제어의 문제는 제어이론과 실제에 있어서 기초가 된다. 시스템 역학의 내부적 불확실성과 외란에 대한 문제를 얻을 수 있다면, 가변 구조 시스템 (VSS) 이론을 유용하게 사용한다.

VSS는 일련의 스위칭 평면에 이르면, 구조를 바꾸는 불연속적 제어가 특징인 비선형 시스템의 특별한 종류이다. VSS의 기초적 성질은 스위칭 평면의 고정, 상태점(state point)에서의 슬라이딩 운동이다. 슬라이딩 모드 동안, 시스템은 시스템 파라미터와 외란에 무관한 불연성을 가지며, 시스템은 선형 시스템처럼 행동한다 [1-5].

기초의 스위칭 평면을 가진 가변 구조 제어기(VSC)의 설계에서, 시스템 상태가 모든 스위칭 평면의 고정에 도달해서 남아있을 때 슬라이딩 모드가 달성된다. 그러므로 슬라이딩 모드가 달성되기 전에는, 제어가 파라미터 변동이나 외란에 민감하다. 나아가서, 스위칭 평면으로의 수렴은 다만 접근적이며, VSS의 이점이 실현되지 않는다 [6].

이 논문에서는 주어진 초기상태로부터 슬라이딩 모드를 보장하도록 새로운 시변 스위칭 평면을 설계하는 법을 제시한다. 제안된 스위칭 평면은 불연성이 초기상태로부터 보장되도록 하기 위하여, 도달 위상(reaching phase)을 갖지 않는다. 그리고, 선형다변수 시스템에 주로 사용되는 특성 구조 지정 이론(eigen-structure assignment theory)으로부터 제안된 스위칭 평면을 얻는다.

2. 다변수 시스템에서의 기존의 VSC 설계법

2-1. VSC설계를 위한 케노니컬형태로의 변환

선형 다변수 시스템

$$\dot{x} = Ax + Bu + Df \tag{1}$$

를 생각하자.  $x \in R^n$ ,  $u \in R^m$ ,  $f \in R^r$ 는 각각 상태, 제어입력, 외란 벡터를 나타낸다. 그리고, 상수 행렬 A, B, D는 적당한 차원이다. 첫 번째로 해야 할 일은 VSC를 설계하기 위하여 제어가능한 canonical form을 만드는 것이다. 이 형식은 Utkin과 Young (1978)이 제안했다. 행렬 B가 전 차수(full rank) m을 가진다면, 직교(orthogonal)하며 유일하지 않은 (non-singular)  $n \times n$  변환행렬(transformation matrix) T가 존재한다.

$$TB = (0 \ B_2^T)^T \tag{2a}$$

$$TD = (0 \ D_2^T)^T \tag{2b}$$

$B_2$ 와  $D_2$ 는  $n \times m$  non-singular matrix 이다. 변환된 상태변수(transformed state variable)  $y = Tx$  라고하면, 시스템 (1)은

$$\dot{y}_1 = A_{11}y_1 + A_{12}y_2$$

$$\dot{y}_2 = A_{21}y_1 + A_{22}y_2 + B_2u + D_2f \tag{3}$$

$y_1$ 과  $y_2$ 는 각각 벡터  $y$ 의 앞쪽  $(n-m)$  성분과 뒤쪽  $m$  성분으로 이루어진 벡터이다. 그리고,  $A_{11}$ 는 행렬  $TAT^{-1}$ 을 구성하는 블록 행렬이다.

2-2. 전환평면 설계

기초의 전환평면  $\sigma(y) = 0$  는  $n(n-1)$  차원 전환평면  $\sigma_1(y) = 0$  의 그라프 결정되는  $R^n$ 에 있는  $(n-m)$ 차원 다기공(manifold)이다. 이 전환평면은 다음과 같이 정의된다.

$$\sigma(y) = Cy = C_1y_1 + C_2y_2 \tag{4}$$

$C_1$ 과  $C_2$ 는 각각  $m \times (n-m)$ ,  $m \times m$  행렬이다. 슬라이딩 모드 동안에, 전환평면은 영이다.

$$y_2 = -C_2^{-1}C_1y_1 = -Fy_1, \quad \forall t > t_0 \tag{5}$$

$t_0$ 는 슬라이딩 모드에 도달하는 시간을 나타낸다. 이것은 슬라이딩 모드에서  $y_2$ 의 전개가  $y_1$ 의 전개와 비례관계에 있다는 것을 가리킨다. 그러므로, 이상적인 슬라이딩 모드는 다음 식에 의해 지배된다.

$$\dot{y}_1 = (A_{11} - A_{12}F) y_1 = A_{eq}y_1 \tag{6}$$

안정된 슬라이딩 모드 설계, 즉,  $t \rightarrow \infty$  때  $y = 0$  는,  $A_{eq}$ 가  $n-m$ 개의 라안면 특성을 갖도록, 이득 행렬 F를 결정하는 것을 필요로 한다. 이것은 선형 동적 시스템에 대한 선형 위상 제어를 설계하는 기본적인 방식을 변형해서 얻을 수 있다 [7]. 그런데, 정해진 F는  $n$ 차의 자유도(degrees of freedom)가 남아있기 때문에, 유일하게 C를 결정하지 못한다.

$$C_1 = C_2 F \quad (7)$$

$C_2 = I_m$ 으로 놓는, F로부터 C를 정하는 가장 간단한 방법은 Utkin과 Young에 의해 사용되었다. 그러면, 다음 식이 얻어진다:

$$C = (F \ I_m) \quad (8)$$

2-3 제어 시스템 설계

일단 스위칭 평면이 얻어지면, 슬라이딩 모드를 보장하는 제어 시스템 설계(control scheme design)를 해야한다. (8)로부터, 스위칭 평면의 미분은 다음과 같다:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(y) &= (d_1(y) \dot{\sigma}_1(y) \dots \dot{\sigma}_m(y))^T = C \dot{y} \\ &= C_1(A_{11}y_1 + A_{12}y_2) + C_2(A_{21}y_1 + A_{22}y_2 + B_2u + D_2f) \end{aligned} \quad (9)$$

$\sigma_i(y)$ 는 i번째 스위칭 평면을 나타낸다. 슬라이딩 운동(sliding motion)이 i번째 스위칭 평면에서 일어날 조건은, i번째 스위칭 평면 근처의 모든 y에 대하여,

$$\sigma_i(y)\dot{\sigma}_i(y) < 0 \quad (10)$$

이다[8]. 이제, 조건 (10)을 만족하는 제어입력 u를 다음과 같이 정의한다:

$$u_i = - \sum_{j=1}^m k_{ij} y_j - \delta_i \text{sgn}(\sigma_i(y)), \quad i=1, 2, \dots, m \quad (11)$$

$$k_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{for } \sigma_{ix} > 0 \\ b_{ij}, & \text{for } \sigma_{ix} < 0 \end{cases} \quad (12)$$

$$\text{sgn}(\sigma_i(y)) = \begin{cases} +1, & \text{for } \sigma_i(y) > 0 \\ -1, & \text{for } \sigma_i(y) < 0 \end{cases} \quad (13)$$

3. 다변수 시스템에서의 새로운 VSC 설계

기존의 VSC는 슬라이딩 모드 이전에는 불변성을 갖지 않는다. 더구나, 스위칭 평면으로의 수렴은 단지 근사적이어서, 슬라이딩 모드의 이점이 실현되지 않을 수 있다. 이러한 단점을 극복하기 위하여, 초기상태로부터, 슬라이딩 모드를 보장하는 새로운 시변 스위칭 평면이 이 논문에서 제시된다. 그리고, 이 새로운 시변 스위칭 평면은 특성 구조 지정 이론(eigen-structure assignment technique)으로부터 얻어진다.

일반적으로, 폐환이득(feedback gain)을 선택하는데 있어서 n차, 입력 m개인 시스템의 특성근 지정(eigenvalue assignment)에는 가능한 mn차의 자유도(mn degrees of freedom) 중에서 단지 n d.o.f 만이 필요하다. 다시말해서, 특성 벡터 지정(eigen-vector assignment)은 폐환이득을 쓰지 않는다. 그래서, 특성근과 특성벡터(특성 구조) 지정기법에 의해 얻어진 폐환이득이 특성근 지정에 의해 얻어진 것보다 더 효과적이다.

그런데, 시스템 파라메터나 외란이 미지이거나 시변이라면, 원하는 시스템 응답이 얻어지지 않는다. 그러므로, 시스템 불확정성(uncertainty)에 관계없이, 원하는 시스템 응답을 보장하는 특성 구조 지정 기법으로부터 얻어진 시변 스위칭 평면을 가진 새로운 VSC가 제시된다.

3-1 시변 스위칭 평면 설계

시스템 (3)을 생각한다. 행렬  $A_{11}$ 과  $A_{12}$ 는 상수행렬이며, 다른것은 미지이거나 시변 행렬이지만 경계(bound)가 알려져 있다고 가정한다. 행렬  $A_{21}(t)$ ,  $A_{22}(t)$ ,  $B_2(t)$ 는 평균행렬  $A_{210}$ ,  $A_{220}$ ,  $B_{20}$ 를 가진다. 외란 벡터와 평균값으로부터의 파라메터 변동(deviation)을 무시한다면 다음 시스템이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= A_{11}y_1 + A_{12}y_2 \\ \dot{y}_2 &= A_{210}y_1 + A_{220}y_2 + B_{20}u \end{aligned} \quad (14)$$

특성 구조 지정 기법으로부터, 제어입력 u는

$$u = Fy = F_1y_1 + F_2y_2 \quad (15)$$

되며,  $F_1$ 과  $F_2$ 는 각각  $m \times (n-m)$ ,  $m \times m$  행렬이다. 그렇다면, 시스템 (14)는 다음과 같이 바뀌어진다:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= A_{11}y_1 + A_{12}y_2 \\ \dot{y}_2 &= C_2y_1 + C_2y_2 \\ C_2 &= A_{210} + B_{20}F_1 \quad C_{22} = A_{220} + B_{20}F_2 \end{aligned} \quad (16)$$

이다. (16)의 시스템 응답은

$$y_1(t) = y_1(0) + \int_0^t (A_{11}y_1 + A_{12}y_2) dt \quad (17a)$$

$$y_2(t) = y_2(0) + \int_0^t (C_2y_1 + C_2y_2) dt \quad (17b)$$

(17)의 시스템응답은 시스템(3)의 원하는 시스템 응답으로 생각된다. (3)의 시스템 응답이 파라메터 변동이나 외란에 관계없이 정확하게 (17)을 따르게 하려면, 새로운 시변 스위칭 평면을 정의해야 한다.

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= (\sigma_1(t) \ \sigma_2(t) \ \dots \ \sigma_m(t))^T \\ &= y_2(t) - y_2(0) - \int_0^t (C_2y_1 + C_2y_2) dt, \quad t > 0 \end{aligned} \quad (18)$$

**정의 1** 장치의 불확정성에 대한 미지의 시변 함수  $DP(t)$ 와 제어 입력  $u(t)$ 가 연속함수이고,  $\Delta u(t) = -K_p \sigma(t)$ , ( $K_p$ 는 양의 실수) 라면, (18)의 새로운 시변 스위칭 평면은 그 스위칭 평면 위에서 슬라이딩 운동이 일어날 조건을 만족한다.

요약

(18)을 시간에 대하여 미분하면,

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(t) &= \dot{y}_2(t) - (C_{21}y_1(t) + C_{22}y_2(t)) \\ &= (A_{21}(t) - C_{21})y_1(t) + (A_{22}(t) - C_{22})y_2(t) + B_2(t)u(t) + f(t) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} A_{21}(t) &= A_{21} + \Delta A_{21}(t) \\ A_{22}(t) &= A_{22} + \Delta A_{22}(t) \\ B_2(t) &= B_2 + \Delta B_2(t) \end{aligned} \quad (20)$$

시변 인자(line varying factor)를 (20)과 같이 쓸 수 있다면, 다음식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} u(t) &= u_{eq}(t) + \Delta u^*(t) \\ \Delta u^*(t) &= - \frac{1}{B_2} (\Delta u(t) - DPu(t)) \\ u_{eq}(t) &= - \frac{1}{B_2} \{ (A_{21} - C_{21})y_1(t) + (A_{22} - C_{22})y_2(t) \} \\ \dot{\sigma}(t) &= \Delta A_{21}(t)y_1(t) + \Delta A_{22}(t)y_2(t) + \Delta B_2(t)u_{eq}(t) + f(t) + B_2(t)\Delta u^*(t) \\ &= DP(t) + B_2(t)\Delta u^*(t) \\ &= DP(t) + \frac{B_2(t)}{B_2} (\Delta u(t) - DPu(t)) \end{aligned} \quad (21)$$

$DP(t)$ 는 미지의 외란이나 모델화되지 않은 역학(unmodeled dynamics)의 영향을 포함한 장치의 불확정성을 나타낸다. 일반적으로,  $DP(t)$ 는 구조를 알 수 없는 미지의 시변 함수이다. 만약, 보조 제어 입력(auxiliary control input)  $DPu(t)$ 가  $DP(t)$ 와 거의 같다면, 스위칭 평면의 미분은,

$$\dot{\sigma}(t) \approx \Delta u(t) \quad (23)$$

제어입력  $\Delta u(t)$ 를 다음과 같이 정의하므로,

$$\Delta u(t) = -K_p \sigma(t), \quad K_p > 0 \quad (24)$$

(23), (24)를 사용하여, (25)를 얻는다.

$$\begin{aligned} \sigma(t)\dot{\sigma}(t) &= \Delta u(t)\sigma(t) \\ &= -K_p \sigma^2(t) < 0 \end{aligned} \quad (25)$$



4-2 제시된 VSC의 설계

시스템 (33)의 평균 모델(average model)은 다음과 같다.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \quad (38)$$

제안 이득 행렬 F는 특성 구조 지정(eigen-structure assignment)기법으로 설계된다.

$$F = \begin{bmatrix} -5 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & -5 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad (39)$$

마지막으로 (38)의 폐시스템(closed system)은

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -5 \end{bmatrix} x \quad (40)$$

시스템 (33)이 같은 초기조건에서 (40)의 원하는 시스템을 정확하게 따라 가게 하려면, 스튀핑 평면이 다음형식으로 정의되어야 한다.

$$\sigma_1(t) = x_3 - x_3(0) + \int_0^t (6x_1 - 5x_3) dt \quad (41a)$$

$$\sigma_2(t) = x_4 - x_4(0) + \int_0^t (6x_2 - 5x_4) dt \quad (41b)$$

(41)을 시간에 관하여 미분하면,

$$\dot{\sigma}_1 = (6-a_{11}(t))x_1 - a_{12}(t)x_2 + 5x_3 + b_1(t)u_1 + f_1(t) \quad (42a)$$

$$\dot{\sigma}_2 = -a_{21}(t)x_1 + (6-a_{22}(t))x_2 + 5x_4 + b_2(t)u_2 + f_2(t) \quad (42b)$$

제어입력  $u_1$ 과  $u_2$ 를 (36)과 같이 정의하고, (36)을 (42)에 대입한 뒤 각각  $\sigma_1(t)$ ,  $\sigma_2(t)$ 를 공하면,

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_1 &= (6-a_{11}(t)-b_1(t)\beta_{11})\sigma_1 x_1 - (a_{12}(t)+b_1(t)\beta_{12})\sigma_1 x_2 \\ &\quad + (5-b_1(t)\beta_{13})\sigma_1 x_3 + (f_1(t)-b_1(t)\beta_{14}\sigma_1)\sigma_1 \end{aligned} \quad (43a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_2 &= -(a_{21}(t)+b_2(t)\beta_{21})\sigma_2 x_1 + (6-a_{22}(t)-b_2(t)\beta_{22})\sigma_2 x_2 \\ &\quad + (5-b_2(t)\beta_{23})\sigma_2 x_4 + (f_2(t)-b_2(t)\beta_{24}\sigma_2)\sigma_2 \end{aligned} \quad (43b)$$

(10)의 조건을 만족하려면, (43)으로부터 다음식이 얻어진다.

$$i) \quad \sigma_1 > \max \frac{f_1(t)}{b_1(t)}, \quad \sigma_1 < \min \frac{f_1(t)}{b_1(t)}, \quad |i|=1, 2$$

$$\frac{f_1(t)}{b_1(t)} \quad \frac{f_1(t)}{b_1(t)}$$

$$ii) \quad \sigma_1 > -\max \frac{f_1(t)}{b_1(t)}, \quad \sigma_1 < -\min \frac{f_1(t)}{b_1(t)}, \quad |i|=1, 2$$

$$\frac{f_1(t)}{b_1(t)} \quad \frac{f_1(t)}{b_1(t)}$$

$$iii) \quad \sigma_1 > \max \frac{f_1(t)}{b_1(t)}, \quad \sigma_1 < \min \frac{f_1(t)}{b_1(t)}$$

$$\frac{f_1(t)}{b_1(t)} \quad \frac{f_1(t)}{b_1(t)}$$

$$iv) \quad \sigma_2 > \max \frac{f_2(t)}{b_2(t)}, \quad \sigma_2 < \min \frac{f_2(t)}{b_2(t)}$$

$$\frac{f_2(t)}{b_2(t)} \quad \frac{f_2(t)}{b_2(t)}$$

$$v) \quad \sigma_2 > -\max \frac{f_2(t)}{b_2(t)}, \quad \sigma_2 < -\min \frac{f_2(t)}{b_2(t)}$$

$$\frac{f_2(t)}{b_2(t)} \quad \frac{f_2(t)}{b_2(t)}$$

4-3 시뮬레이션 결과

MATLAB 프로그램을 사용해서 다음의 시뮬레이션을 수행한다. 주 프로그램은 부록 에 자세히 수록되어 있다. 0.005 초 간격으로 건본 추출(sampling)을 하며, 시뮬레이션 결과가 그림 2부터 그림 9까지에 나타나 있다. 먼저 파라미터 변동이나 외란이 없을 경우에, 기존의 VSC와 제시된 VSC의 상태  $x_1$  은 그림 2에,  $x_2$  는 그림 3에,  $x_1$ 과  $x_2$ 의 상태 궤적(phase trajectory)은 그림 4에,  $x_3$ 와  $x_4$ 의 상태 궤적(phase trajectory)은 그림

5에 각각 나타나 있다. 다음 수치 예에서 제시한 시스템 불확정성과 외란이 있을 때에 대한 시뮬레이션 결과를 나타낸다. 수치 예에서는, 시간에 따른 파라미터 변동  $|\Delta a_{11}(t)| < 0.5$ ,  $|\Delta b_1(t)| < 0.5$  과 외란  $|f_1(t)| < 10$  을 각각 정해진 범위내에서의 랜덤 잡음(random noise)으로 정했다. 그림 6에 기존의 VSC와 제시된 VSC의 상태  $x_1$ 을, 그림 7에  $x_2$ 을, 그림 8에  $x_1$ 과  $x_2$ 의 상태 궤적(phase trajectory)을, 그림 9에  $x_3$ 와  $x_4$ 의 상태 궤적(phase trajectory)을 각각 보인다.

이들 그림에서 알 수 있는 것처럼 기존의 VSC는 슬라이딩 모드에 도달하기 전까지는 불변성이 없는 반면, 제시된 VSC는 파라미터 변동이나 외란에 관계없이 불변성과 강인성(invariance and robustness property)을 갖는다.

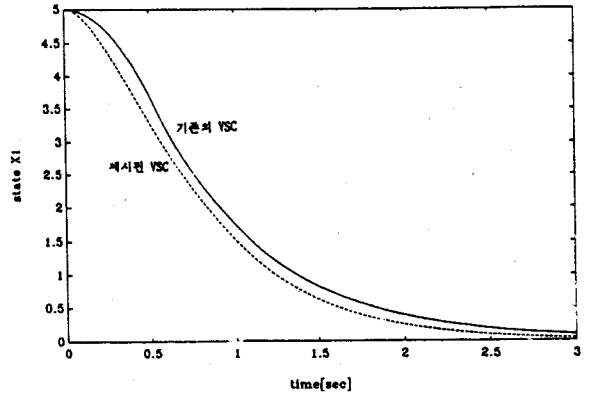


그림 2 파라미터 변동이나 외란이 없을 때 상태  $x_1$ 의 궤적

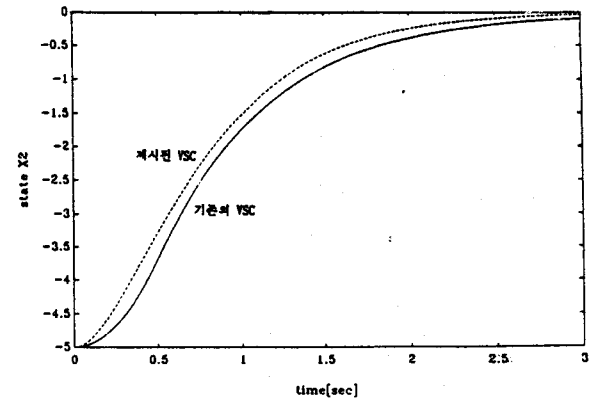


그림 3 파라미터 변동이나 외란이 없을 때 상태  $x_2$ 의 궤적

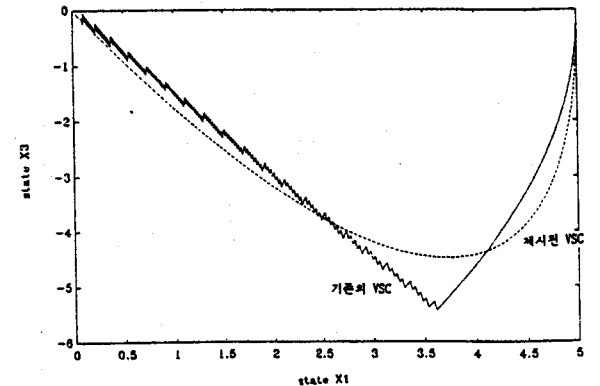


그림 4 파라미터 변동이나 외란이 없을 때 상태  $x_1$ 과  $x_3$ 의 상태 궤적

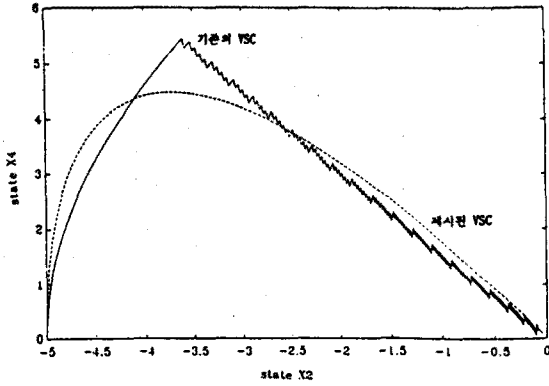


그림 4 파라미터 변동이나 외란이 있을 때 상태  $x_2$ 와  $x_4$ 의 상태 제적

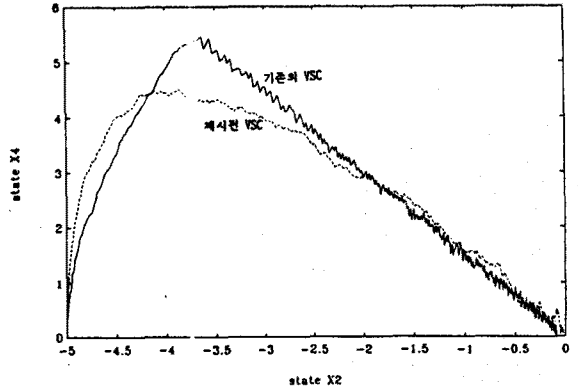


그림 5 파라미터 변동이나 외란이 있을 때 상태  $x_2$ 와  $x_4$ 의 상태 제적

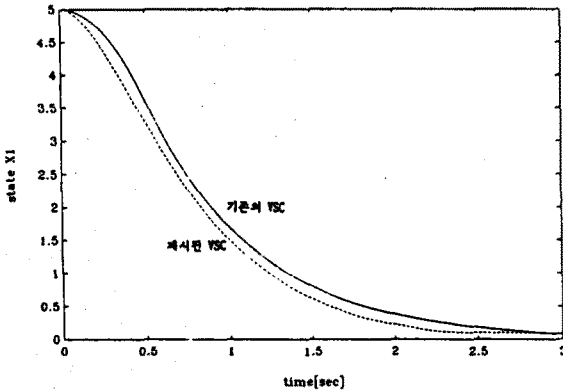


그림 6 파라미터 변동이나 외란이 있을 때 상태  $x_1$ 의 제형

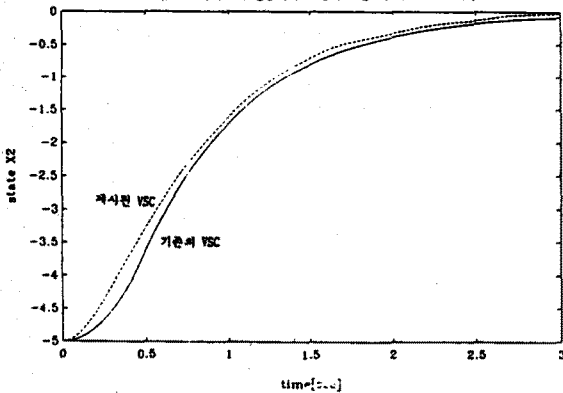


그림 7 파라미터 변동이나 외란이 있을 때 상태  $x_2$ 의 제형

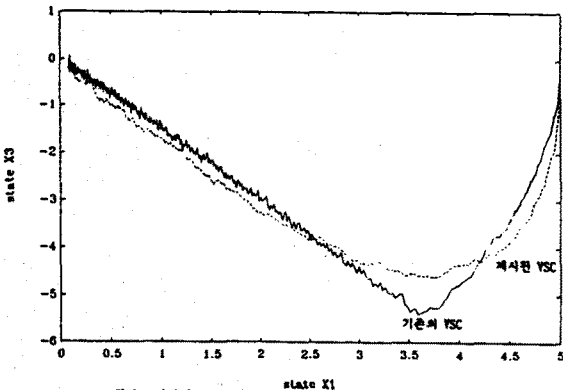


그림 8 파라미터 변동이나 외란이 있을 때 상태  $x_1$ 와  $x_3$ 의 상태 제적

6. 참고문헌

- [1] V.I.Utkin, "Variable Structure Systems: Present and Future", Automation and Remote Control, 44, pp1105-1120, 1984
- [2] A.J.Gilise, K.V.Raman, "A Servo Compensator Design Approach for Variable Structure Systems", Proceedings of IEEE 1982 conference, 1982
- [3] S.J.Garret, "Linear Switching Conditions for a Third Order Positive-negative Feedback Control", IEEE Transaction of Industrial Application, no.54, 1961
- [4] S.C.Lin, S.J.Tsai, "A Microprocessor-based Incremental Servo System with Variable Structure", IEEE Transaction of Industrial Electronics, vol. IE-31, no.4, pp313-316, Nov. 1984
- [5] H.Hashimoto, K.Haruyama, F.Harashino, "A Microprocessor-based Robot Manipulator Control with Sliding Mode", IEEE Transaction of Industrial Electronics, vol. IE-34, no.1, pp11-18, Feb. 1987
- [6] C.M.Dorling, A.S.I.Zineber, "Two Approaches to Hyperplane Design in Multivariable Variable Structure Control Systems", International Journal of Control, vol. 44, no.1, pp65-82, 1986
- [7] R.A.Decario, S.H.Zak, C.P.Matthews, "Variable Structure Control of Non-linear Multivariable Systems", Proceedings of IEEE, vol. 76, no.3, pp212-232, Mar. 1988
- [8] U.Itkin, "Control Systems of Variable Structure", New York: Wiley, 1976