

민감도해석에 의한 전극의 형상설계

이범택, 박일한, 한송엽
서울대학교 전기공학과

Shape Design of Electrode by Sensitivity Analysis

Lee Beom-taek, Park Il-han, Hahn Song-yop
Seoul National University

Abstract - In this paper, in order to optimize the shape of electrode to achieve prescribed electric field intensity distribution along the surface of electrode, sensitivity analysis based on finite element method is proposed. The objective function of this problem is the difference of calculated electric field intensity at given design and prescribed electric field intensity. So, the problem is to find the shape of electrode to minimize the objective function defined above. The result of numerical example shows that maximum electric field error is about 0.1% and the usefulness of this shape optimal design procedure.

1. 서론

전자소자 (electromagnetic device) 의 최적설계를 위하여, 기존의 최적설계과정으로 퍼어미언스법 또는 실험식을 이용하여 기본적인 설계를 한 후 유한요소법 등 각종 해석법을 통하여 성능을 평가하고 이것이 설계사양에 미치지 못하면 경험에 의한 시행착오를 거쳐 설계를 변경하는 방법 대신에, 수치해석과 최적화알고리즘 그리고 민감도계산을 이용한 반복적으로 최적설계를 얻는 방법이 제시되었다.^{1)~4)}

즉, 이 방법은 최적설계조건일 때 극치를 갖게되는 함수인 목적함수를 정의하고 시스템에서 정의된 설계변수의 변화에 따른 목적함수의 변화비 즉, 설계민감도를 기존의 유한요소법을 이용하여 도출하고 얻어진 설계민감도계수 및 목적함수치를 최적화 알고리즘에 도입하여 개선된 설계변수를 반복적으로 찾아내는 것을 의미한다. 전극에서 전극표면을 따라 전계의 세기를 원하는 특성의 분포가 되도록하는 최적의 전극 형상을 얻는 문제에 위의 방법을 적용하였다. 이 때 목적함수는 주어진 목표 전계의 세기와 계산된 전계의 세기의 차이를 이용하여 정의하였다. 따라서, 목적함수를 최소화하는 전극형상을 얻는 문제로 간략화 된다. 이러한 최적형상설계의 과정은 그림 1의 흐름도에서 볼 수 있다.

2. 정전계 문제에서의 민감도해석

지배방정식이 $\nabla \cdot \epsilon \nabla V = \rho$ 인 정전계에서의 민감도 계산은 정자계의 경우와 거의 유사하다. 먼저 최적화 대상의 초기설

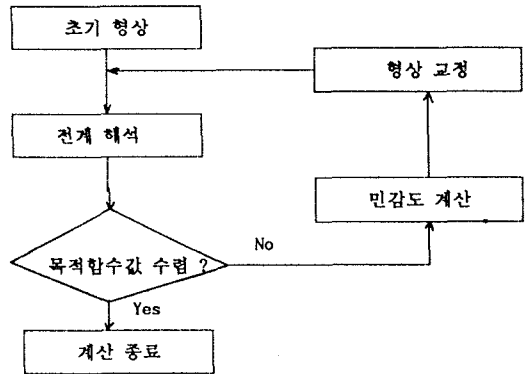


그림 1. 형상최적화의 흐름도

계치가 주어졌을 때 유한요소법에 의해서 다음의 유한차원화된 상태방정식을 얻는다.

$$[K(p)][V] = [f(p)] \quad (1)$$

여기서 [V] : 절점에서의 전위

이 때 첫 식은 주어진 경계조건을 만족한다.

다음은 소자가 최적의 특성을 갖을 때 최소값을 갖는 목적함수를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$F = F [p, V(p)] \quad (2)$$

여기서 [p] : 설계변수 벡터 (np × 1)

[V(p)] : 상태변수 (n × 1)

np : 설계변수의 수

식(2)가 최소값을 갖는 설계변수를 찾는 것이 목적이므로 설계변수에 대한 목적함수의 변화를 즉 민감도는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{dF}{d[p]^T} = \frac{\partial F}{\partial [p]^T} + \frac{\partial F}{\partial [V]^T} \frac{d[V]}{d[p]^T} \quad (3)$$

(1×np) (1×np) (1×n) (n×np)

첫 식 (3) 우변의 첫 항은 상태변수를 일정하게 놓은 상태에서의 목적함수의 변화율이고 둘째 항은 상태변수의 변화

에 의한 목적함수의 변화율이다.

식 (3) 우변 둘째항의 뒷항을 계산하기 위해서는 식 (1) 을 이용해야 한다. 이는 설계변수에 대한 상태변수의 변화율은 식 (1)에 의하여 결정되기 때문이다. 즉 식 (1)의 양변을 설계변수에 대하여 미분하고 정리하면 다음식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d[V]}{d[p]} = [K]^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial [p]} \left[[f] - [K] \cdot [V] \right] \quad (4)$$

(n×np) (n×np)

따라서 식(4)를 식 (3)에 대입하면 다음의 관계식을 얻는다.

$$\frac{dF}{d[p]^T} = \frac{\partial F}{\partial [p]^T} + \frac{\partial F}{\partial [V]^T} [K]^{-1} \frac{\partial}{\partial [p]^T} \left[[f] - [K] \cdot [V] \right] \quad (5)$$

실제 계산상에서 설계변수에 대한 상태변수의 변화율은 식 (4)를 직접 이용하여 계산한 후 식(3)에 대입하면 설계변수 벡터의 크기(np)만큼의 시스템 방정식을 풀어야 하기 때문에 계산시간이 길어지게 된다. 따라서 여기서는 식(5)를 이용하여 상태방정식을 한번 만 풀어도 되는 방법인 보조변수법(adjoint variable method)를 도입한다. 즉 식(5)우변의 둘째 항에서 [K]의 대칭성을 이용하여 다음과 같은 보조변수식(adjoint variable method) 을 정의한다.

$$[K] [\lambda] = \frac{\partial F}{\partial [V]} \quad (6)$$

즉 식 (6)의 보조변수식을 풀어서 보조변수 $[\lambda]$ 를 식 (5)에 대입하면 설계변수에 대한 목적함수의 변화율 (민감도)은 다음과 같다.

$$\frac{dF}{d[p]^T} = \frac{\partial F}{\partial [p]^T} + [\lambda]^T \frac{\partial}{\partial [p]^T} \left[[f] - [K] [V] \right] \quad (7)$$

식 (7) 둘째항의 뒷항은 다음 식들에서 조립된다.

$$\frac{\partial [f]}{\partial [p]^T} = \sum \int_{\Omega_0} \left[\frac{\partial \rho}{\partial [p]^T} \frac{\partial v}{\partial [V]^T} |G|^{*+\rho} \frac{\partial v}{\partial [V]^T} \frac{\partial |G|}{\partial [p]^T} \right] dudv \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial [p]^T} \left[[K] [V] \right] = \sum \int_{\Omega_0} \left[\epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial [V]^T \partial [p]^T} |G|^{*+\epsilon} \frac{\partial E}{\partial [V]^T} \frac{\partial E}{\partial [p]^T} |G|^{*} + E \frac{\partial E}{\partial [V]^T} \frac{\partial \epsilon}{\partial [p]^T} |G|^{*+\epsilon E} \frac{\partial E}{\partial [V]^T} \frac{\partial |G|}{\partial [p]^T} \right] dudv \quad (9)$$

여기서는 형상설계변수에 대해서만 고려하므로 식 (8), (9)에서의 설계변수에 대한 전하밀도의 변화율과 유전율의 변화율은 영이 된다. 따라서 식 (8), (9)는 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial [f]}{\partial [p]^T} = \sum \int_{\Omega_0} \left[\rho \frac{\partial v}{\partial [V]^T} \frac{\partial |G|}{\partial [p]^T} \right] dudv \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial [p]^T} \left[[K] [V] \right] = \sum \int_{\Omega_0} \left[\epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial [V]^T \partial [p]^T} |G|^{*+\epsilon} \frac{\partial E}{\partial [V]^T} \frac{\partial E}{\partial [p]^T} |G|^{*} + E \frac{\partial E}{\partial [V]^T} \frac{\partial \epsilon}{\partial [p]^T} |G|^{*+\epsilon E} \frac{\partial E}{\partial [V]^T} \frac{\partial |G|}{\partial [p]^T} \right] dudv \quad (11)$$

3. 적용 사례

전극설계문제는 전극표면에서의 전계세기가 주어진 값이 되도록 전극의 형상을 최적화하는 것이다. 따라서 전극표면의 위치를 설계변수로 놓고 이 설계변수에 대한 전극표면에서 전계분포의 민감도를 계산하여 우리가 원하는 전계분포를 얻기 위한 최적화 과정을 수행한다.

전극문제에서의 지배방정식은 Laplace 방정식으로 다음과 같다.

$$\nabla^2 V = 0 \quad (12)$$

위 방정식에 유한요소법을 적용하고 주어진 경계조건을 대입하여 다음의 상태변수방정식을 얻는다.

$$[K] [V] = [f] \quad (13)$$

(nxn)(nx1) (nx1)

따라서 위 식을 계산하여 상태변수 V를 얻는다.

먼저 전극설계의 경우 최적설계 상태에서 최소값을 갖는 목적함수를 정의하면 다음과 같다.

$$F = \sum_{i=1}^{np} \left[|\vec{E}_i| - E_{o1} \right]^2 \quad (14)$$

여기서 E_{o1} : 전극표면 i번째 절점에서 목표전계세기

$|\vec{E}_i|$: 각 반복계산 후 i번째 절점에서의 전계세기

np : 전극표면에서 움직일 수 있는 절점의 수

위 식 (14)에서 목적함수를 전극의 표면에 있는 움직일 수 있는 절점에서의 전계세기만으로 정의하였는데, 이는 2차 형상함수를 사용하였을 경우 한 절점과 인접 절점사이에서 전계세기의 분포는 선형적 (1차함수) 이므로 절점에서의 전계세기만으로도 충분하다. 따라서 전극표면에 관한 적분식으로 목적함수를 정의하는 것은 불필요하다. 또한 적분식으로 정의할 경우 수렴특성이 좋지 않을 수 있다. 그리고 i번째 절점에 걸려있는 요소는 여러개이므로 $|\vec{E}_i|$ 를 그것들의 평균값으로 보면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$|\vec{E}_i| = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |\vec{E}_j| \quad (15)$$

여기서 m : i번째 절점에 걸려있는 총 요소수

따라서 식(7)의 민감도식에서 목적함수의 직접편미분항과 보조변수식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial F}{\partial p_k} = 2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial |\vec{E}_i|}{\partial p_k} (|\vec{E}_i| - E_{o1}) \quad (16)$$

$$[K] [\lambda] = 2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial |\vec{E}_i|}{\partial [V]} (|\vec{E}_i| - E_{o1}) \quad (17)$$

위 식(16), (17) 우변에 나타나는 설계변수 및 상태변수에 대한 전계세기 절대치의 미분은 식 (15)을 이용하여 각각 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial |\vec{E}_i|}{\partial p_k} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{\partial |\vec{E}_j|}{\partial p_k} \quad (18)$$

$$\frac{\partial |\vec{E}_i|}{\partial V_1} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^6 \frac{\partial |\vec{E}_j|}{\partial V_l} \quad (19)$$

여기서 $|\vec{E}_j| = (E_{xj}^2 + E_{yj}^2)^{1/2}$ (20)
그리고

$$\begin{aligned} \frac{\partial |\vec{E}_j|}{\partial p_k} &= \frac{1}{|\vec{E}_j|} \left(E_{xj} \frac{\partial E_{xj}}{\partial p_k} + E_{yj} \frac{\partial E_{yj}}{\partial p_k} \right) \\ &= \frac{\vec{E}_j}{|\vec{E}_j|} \cdot \frac{\partial \vec{E}_j}{\partial p_k} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial |\vec{E}_j|}{\partial V_l} &= \frac{1}{|\vec{E}_j|} \left(E_{xj} \frac{\partial E_{xj}}{\partial V_l} + E_{yj} \frac{\partial E_{yj}}{\partial V_l} \right) \\ &= \frac{\vec{E}_j}{|\vec{E}_j|} \cdot \frac{\partial \vec{E}_j}{\partial V_l} \end{aligned} \quad (22)$$

이렇게 구해진 식 (18~22)를 식 (16), (17) 그리고 식(7)에 대입하면 설계변수에 대한 목적함수의 민감도를 얻을 수 있다.

그림 2, 그림 3은 설계대상인 초기형상과 그때의 전압분포를 보이고 있다. 그림 2에서 전극의 끝이 뾰족한 모양이고 전극의 전압은 100[V]이고 밑은 0 [V]이다. 전극의 밑부분은 10개의 등간격으로 나누고 11개 절점에서의 y값을 설계 변수로 하였다. 즉 x는 고정시키고 y방향으로만 움직일 수 있도록 하였다. 목표 전계세기(전극의 밑부분의 각 절점에서 7000 (V/m), 5000 (V/m) 인 2차함수로 11개 절점에서 지정하였다. 그리고 본 예에서는 최적화 알고리즘으로써 최대경사로 탐색방향을 취하고 진행거리는 목적함수를 민감도의 절대치로 나눈 값으로 고정하여 반복계산하였다.

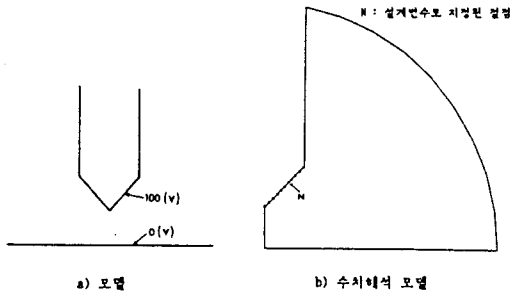


그림 2 전극의 초기형상

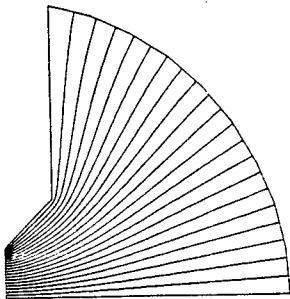


그림 3 초기형상시의 등전위 분포

그림 4는 70번의 반복계산 후에 얻어진 전극형상을 보이고 있다. 그리고 그림 5는 이때의 전계분포이다. 그림 6은 초기형상과 최종형상을 겹쳐 그린 것이다. 최종형상은 초기형상에서 상당히 많이 변형되었음을 볼 수 있다. 그림 7에서는 전계세기의 값을 초기형상, 목표치, 최종형상의 경우 각 경우에 대하여 비교하고 있다. 그림 8은 목표치와 최종형상의 경우 전계세기의 분포를 확대해서 그린 것이다.

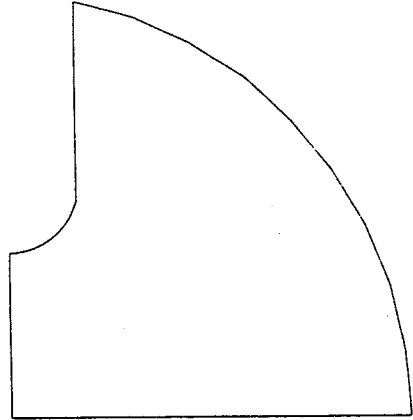


그림 4 최적화 후의 전극의 최종형상

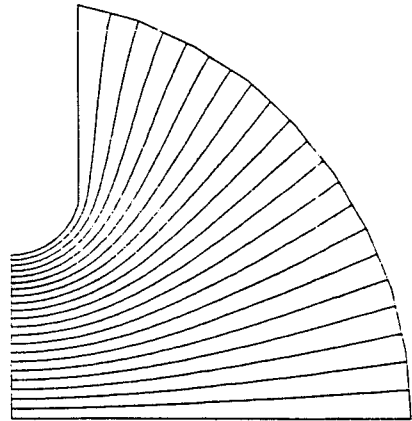


그림 5 최종형상시의 등전위 분포

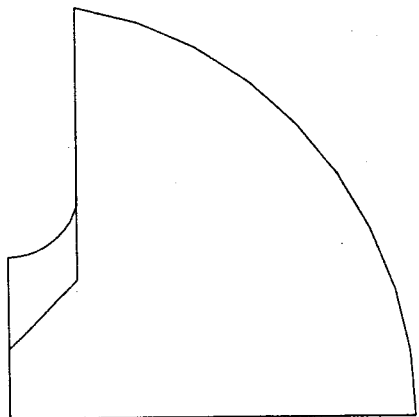


그림 6 초기형상과 최종형상의 비교

표 1에서는 초기형상, 목표치, 최종형상의 경우 각 경우에 대하여 전계세기를 수치로서 볼 수 있다. 여기서 최대 오차가 0.1% 정도 이하의 정확도로 목표와 최적화 결과가 잘 일치함을 알 수 있다.

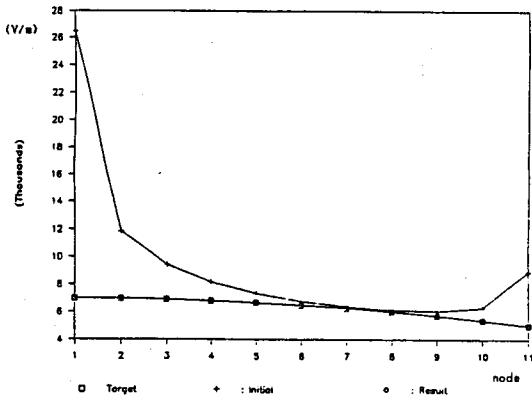


그림 7 초기형상, 목표, 최종형상시의 전계세기 분포 비교

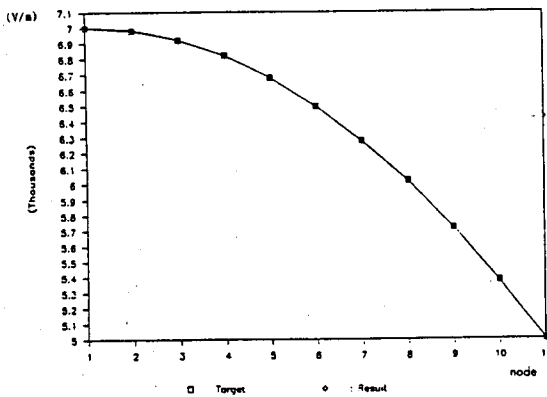


그림 8 목표와 최종형상시의 전계세기 분포 확대 비교

(단위 : V/m)

node	초기형상	target	최종형상
1	26478.5	7000.0	7001.6
2	11847.0	6980.0	6986.6
3	9429.9	6920.0	6921.3
4	8163.6	6820.0	6820.2
5	7357.6	6680.0	6681.1
6	6799.0	6500.0	6498.8
7	6400.6	6280.0	6274.4
8	6145.5	6020.0	6017.2
9	6063.4	5720.0	5717.9
10	6309.2	5380.0	5374.5
11	8943.3	5000.0	5002.8

표 1 초기형상, 목표, 최종형상시의 전계세기 분포의 수치적 비교

4. 결론

본 적용 예에서는 전극에서 전극표면에서의 전계의 세기를 원하는 특성을 만족시키기 위한 전극의 형상을 최적화하는 기법을 다루었다. 이 문제의 경우 한번의 최적화과정에서 시스템방정식과 보조변수식의 계산 즉 두번의 행렬식의 계산이 필요하였다. 문제의 결과로부터 전계의 경우에서도 민감도해석 및 최적화알고리즘을 이용한 최적설계기법의 유용성을 검증하였다.

참고문헌

- 1) H.M. Adelman and R.T. Haftka, "Sensitivity Analysis of Discrete Structural Systems", AIAA Journal, Vol.24, No.5, MAY 1986
- 2) S. Gitisastro, J.L. Coulomb and J.C. Sabonnadiere, "Performance Derivative Calculations and Optimization", IEEE Trans. on Magnetics, Vol.25, No.4, July 1989
- 3) 박일한, "전자소자의 형상최적화를 위한 민감도해석", 공학박사학위논문, 서울대, 전기공학과, 1990
- 4) Il-han Park, Beom-taek Lee and Song-yop Hahn, " Pole Shape Optimization for Reduction of Cogging Torque by Sensitivity Analysis", COMPEL, Vol.9, No.5, 1990
- 5) H.Tsuboi and T.Misaki, " The Optimun Design of Electrode and Insulator Contours by Nonlinear Programming using the Surface Charge Simulation Method", IEEE Trans. on Magnetics, Vol.24, No.5, January 1988