

다변수 확률과정의 시뮬레이션

Simulation of Multi-Variate Random Processes

오윤정방*

M. Shinozuka**

Yun, Chung-Bang

ABSTRACT

An improved algorithm for simulation of multi-variate random processes has been presented. It is based on the spectral representation method. The conventional methods give sample time histories which satisfy the target spectral density matrix only in the sense of ensemble average. However, the present method can generate sample functions which satisfy the target spectra in the ergodic sense. Example analysis is given for the simulation of earthquake accelerations with three components.

1. 서론

본 연구에서는 서로 상관관계를 가지는 여러개의 확률과정(Multi-Variate Random Process)의 시뮬레이션에 대하여 연구하였다. 확률과정의 시뮬레이션은 시스템의 비선형성, 입력하중의 비정규성(Non-Gaussian)등으로 인하여, 시스템의 동적거동(응답)을 종래의 주파수영역에서의 랜덤해법을 통하여 해석하기 어려울때, 거동의 확률적 특성을 유추하는 방법에 관련되어 많이 연구되어 왔다(1,2,3,4,5,6,7). 이러한 방법에서는 주어진 확률적 특성을 고려하여 하중의 시계열을 시뮬레이션하고, 이로부터 거동의 시계열을 시간영역에서 직접적분 방법으로 구한후, 이로부터 거동의 확률적 특성을 규명한다.

지금까지 연구개발된 확률과정의 시뮬레이션 기법은 스펙트럼기법(1,2)과 ARMA(Auto-Regressive and Moving Average)모형기법(5,6)의 두가지로 크게 나눌 수 있다. 이들 재래의 방법에 의하면, 상관관계가 있는 확률과정의 경우, 시뮬레이션된 시계열이 여러 다른 Sample 시계열에 대한 Ensemble 평균의 개념으로는 주어진 목표스펙트럼행렬(또는 목표상관함수행렬)을 만족시킬 수 있으나, 각각의 시계열에 대한 시간적평균의 개념으로는 목표스펙트럼행렬을 만족시키지 못한다(1,7).

본 연구에서는 재래의 스펙트럼기법을 개선하여 시간적평균의 개념으로도 목표스펙트럼을 만족시킬 수 있는 방법을 개발하였다. 예제해석은 3성분을 가지는 지진가속도에 대하여 수행하였으며, 결과의 분석을 통하여 제안된 방법의 효율성과 함께 문제점을 토의 검토하였다.

2. 재래의 스펙트럼기법

다변수 확률과정의 시계열 $\{f(t)\}$ 를 시뮬레이션 하기 위한 재래의 기법은 크게 스펙트럼기법(1,2,7)과 ARMA(Auto-Regressive and Moving Average)기법(5,6)으로 나눌 수 있다. 본 연구에서는 스펙트럼기법에 대하여 연구하였는데, Shinozuka등(1)이 개발한 기법에 의하면 M개의 요소를 가지는 벡터 확률과정 $\{f(t)\}$ 의 시계열은 목표스펙트럼행렬 $S^0(\omega)$ 로부터 아래와 같이 시뮬레이션 할 수 있다.

$$f_j(t) = \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^N |H_{jm}(\omega_l)| \sqrt{2\Delta\omega} \times \cos(\omega_l t + \theta_{jm}(\omega_l) + \phi_{ml}) \quad (1)$$

여기서

$$S^0(\omega) = H(\omega) H^*(\omega)^T \quad (2)$$

그리고 $H_{jm}(\omega)$ 는 행렬 $H(\omega)$ 의 j - m 번째 요소물 나타내며; $\omega_l = (l-1)\Delta\omega$; $\Delta\omega =$ Sampling 주파수; $N =$ Sampling 주파수의 갯수; ϕ_{ml} 은 0과 2π 에서 등분포 확률밀도함수를 가지는 랜덤위상각; $\theta_{jm}(\omega)$ 는 $H_{jm}(\omega)$ 의 복소수평면에서의 위상각도이다. 식(2)에서 $H(\omega)$ 는 삼각행분할을 사용하면 저연삼각행렬(Lower Triangular Matrix)로 구해지며, $S^0(\omega)$ 의 복소수고유치행렬 $\Phi(\omega)$ 를 사용하면 아래와 같이 구해질 수 있다.

$$H(\omega) = \Phi(\omega) [\sim \lambda_j^{-1/2} \sim] \quad (3)$$

여기서 λ_j 는 $S^0(\omega)$ 행렬의 j 번째 고유치이다.

식(1)로 구한 $\{f(t)\}$ 의 상관함수행렬 $R(\tau)$ 의 j - k 번째 요소는 아래와 같이 계산할 수 있으며,

$$\begin{aligned} R_{jk}(\tau) &= E[f_j(t+\tau)f_k(t)] \\ &= E \left[\sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^N \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^N |H_{jm}(\omega_l)| |H_{kp}(\omega_q)| \Delta\omega \right. \\ &\quad \times [\cos\{(\omega_l + \omega_q)t + \omega_l\tau + \theta_{jm}(\omega_l) + \theta_{kp}(\omega_q) \\ &\quad + \phi_{ml} + \phi_{pq}\} + \cos\{(\omega_l - \omega_q)t + \omega_l\tau + \theta_{jm}(\omega_l) \\ &\quad \left. + \theta_{kp}(\omega_q) + \phi_{ml} - \phi_{pq}\}] \right] \quad (4) \end{aligned}$$

이는 다시 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} R_{jk}(\tau) &= \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^N |H_{jm}(\omega_l)| |H_{km}(\omega_l)| \\ &\quad \times \cos\{\omega_l\tau + \theta_{jm}(\omega_l) - \theta_{km}(\omega_l)\} \Delta\omega \quad (5) \end{aligned}$$

* 정희원 한국과학기술원 토목공학과 교수

** 미국 Princeton 대학교 토목공학과 교수

식(5)의 결과는 두개의 랜덤위상각 ϕ_{ml} 과 ϕ_{pq} 가 같은 경우(즉, $m=p, l=q$)에 아래와 같은 관계가 있고,

$$E[\cos\{\dots + \phi_{ml} - \phi_{pq}\}] \neq 0 \quad (6)$$

그외의 경우에는 기대값이 0이 되는 것을 이용한 것이다. 식(5)을 $\Delta\omega \rightarrow 0$ 인 조건에서 아래와 같이 고쳐 쓸수 있다.

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} R_{jk}(\tau) &= \text{Re} \left[\int_0^{\omega_n} \sum_{m=1}^M H_{jm}(\omega) H_{km}^*(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \right] \\ &= \text{Re} \left[\int_0^{\omega_n} S_{jk}^0(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \right] \\ &= R_{jk}^0(\tau) \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 $R_{jk}^0(\tau)$ 는 목표상관함수행렬이다. 식(1)에서 구한 랜덤시계열이 여러 Set의 시계열에 대한 Ensemble의 평균의 개념으로 목표스펙트럼행렬을 만족함을 알 수 있다.

반면, 이의 시간적 상관함수행렬 $\Phi_{jk}(\tau)$ 를 구하면, 이의 j - k 번째 요소는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \Phi_{jk}(\tau) &= \langle f_j(t+\tau) f_k(t) \rangle \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f_j(t+\tau) f_k(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^N \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^N |H_{jm}(\omega_l)| |H_{kp}(\omega_q)| \Delta\omega \\ &\quad \times \cos\{(\omega_l - \omega_q)t + \omega_l\tau + \phi_{ml} + \phi_{pq}\} \\ &\quad \times [\cos\{(\omega_l + \omega_q)t + \omega_l\tau + \theta_{jm}(\omega_l) + \theta_{kp}(\omega_q) \\ &\quad + \theta_{jm}(\omega_l) + \theta_{kp}(\omega_q) + \phi_{ml} - \phi_{pq}\}] dt \end{aligned} \quad (8)$$

윗식에서 두주파수 ω_l 과 ω_q 가 같은 경우(즉 $l=q$)에만, 아래와 같이 시간적분항이 0이 아니므로

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos\{(\omega_l - \omega_q)t + \dots\} dt \neq 0 \quad (9)$$

이는 아래와 같이 변형된다.

$$\Phi_{jk}(\tau) = \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^N \sum_{p=1}^M |H_{jm}(\omega_l)| |H_{kp}(\omega_l)| \Delta\omega \quad (10)$$

$$\times \cos\{\omega_l\tau + \theta_{jm}(\omega_l) - \theta_{kp}(\omega_l) + \phi_{ml} - \phi_{pq}\}$$

식(10)은 $\Delta\omega \rightarrow 0$ 이고, $T \rightarrow \infty$ 인 조건에서, 아래와 같이 고쳐쓸수 있다.

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \Phi_{jk}(\tau) &= \text{Re} \left[\int_0^{\omega_n} \sum_{m=1}^j \sum_{p=1}^k H_{jm}(\omega) H_{kp}^*(\omega) \right. \\ &\quad \left. \times e^{i(\phi_{ml} - \phi_{pl})} e^{i\omega\tau} d\omega \right] \\ &= R_{jk}^0(\tau) \end{aligned} \quad (11)$$

식(11)의 결과에 랜덤위상각 ϕ_{ml} 과 ϕ_{pl} 이 식(7)에서처럼 소거되지 않고 남아있어서, 결국 시간평균의 개념으로는 식(1)로 구한 시계열이 목표상관행렬을 만족시키지 못하는 것을 알 수 있다. 즉 $\{f(t)\}$ 는 Ergodic 과정이 아니다.

3. 개선된 스펙트럼기법

전절에서 서술한 재래의 스펙트럼기법에 의한 시계열이 Ergodic 과정이 되지 못하는 이유는 아래와 같다. 식(4)의 Ensemble 평균에서는 랜덤위상각이 2중 첨자이고 $\phi_{ml} = \phi_{pq}$ (즉 $m=p, l=q$)인 경우에 식(6)이 만족되어서 식(4)의 4중 Summation 과정이 식(5)와 같이 2중 Summation 이 되며, 아울러 식(7)에서 랜덤위상각이 소거되는데 반하여, 식(8)의 시간평균에서는 Sampling된 주파수가 단일첨자를 가지고 $\omega_l = \omega_q$ (즉 $l=p$)인 경우에만 식(9)가 만족되어서 최초의 4중 Summation과정이 3중 Summation과 정으로만 단순화되고 마지막 결과인 식(11)에 랜덤위상각도 그대로 남아있게 된 것이다.

위에서 토의한 사항에 착안하여, 본 연구에서는 Sampling 주파수가 랜덤위상각 ϕ_{ml} 과 같이 2중첨자를 가지도록 하여, 아래와 같은 방법으로 $\{f(t)\}$ 를 시물레이션하는 기법을 제안하였다.

$$\begin{aligned} f_j(t) &= \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^N |H_{jm}(\omega_{ml})| \sqrt{2\Delta\omega} \\ &\quad \times \cos\{\omega_{ml}t + \theta_{jm}(\omega_{ml}) + \phi_{ml}\} \end{aligned} \quad (12)$$

여기서

$$\omega_{ml} = \Delta\omega \left\{ (l-1) + \frac{m}{M} \right\} \quad (13)$$

그리고, ϕ_{ml} 과 θ_{jm} 는 식(1)에서 정의된 바와 같다.

식(12)로 구한 시계열의 상관함수행렬을 구하면 식(4)~(7)과 유사한 과정을 거쳐 Ensemble 평균의 개념으로 목표상관함수행렬과 같음을 알 수 있다. 아울러 시간평균에 의한 상관함수행렬은 식(8)~(11)과 유사한 과정을 거칠때, ω 가 2중 첨자이고, $\omega_{ml} = \omega_{pq}$ (즉 $m=p, l=q$)의 조건에서만 아래 조건이 만족하는 것을 이용하면

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos\{(\omega_{ml} - \omega_{pq})t + \dots\} dt \neq 0 \quad (14)$$

쉽게 목적상관함수행렬과 같음을 보일 수 있다. 즉 식(12)에서 시물레이션한 시계열이 2차 모멘트까지 Ergodic한 특성을 가진다는 것을 알 수 있다.

식(1)과 식(12)에 의한 기법의 차이는 $M=3$ 인 경우에 대하여 그림 1에서 보인 바와 같이, 식(1)에 의한 재래방법은 $H_{jm}(\omega_{ml})$ 의 Sampling 주파수점을 모든 성분에 대하여 $\Delta\omega$ 의 간격으로 일률적으로 택한 반면, 식(12)의 새로운 기법에서는 $H_{jm}(\omega_{ml})$ 을 간격은 $\Delta\omega$ 로 하되 m 에 따라 $\Delta\omega/M$ 씩 차이를 두어 다른 Sampling 주파수점에서 취한 것이다. 후자의 경우, FFT(Fast Fourier Transform)기법을 사용하여 식(12)를 계산시, 입력 Data는 각 성분에 대하여 $\Delta\omega/M$ 간격으로 MN 의 점이 포함되게 되며, 구한 시계열의 길이는 $2\pi M/\Delta\omega$ 이 되어서 식(1)의 경우보다 M 배 더 긴 기록을 얻게된다.

4. 예제해석 및 결과분석

예제해석은 그림 2와 같이 2개의 수평성분과 1개의 수직성분으로 구성된 지진기록(일본, Tokachi-Oki 지진, 1968)을 바탕으로 산정한 스펙트럼행렬(그림 3)을 이용하여 수행하였다. 이 지진기록은 그림 2에서 보는 바와 같이 강진지속기간이 약 70초 가량으로 예외적으로 긴 특성을 가지고 있다.

그림 4에서는 새로 제안된 방법(식(12))에 의해 시뮬레이션한 시계열을 보였다. 그림 5에서는 앞의 두가지 방법에서 구한 시계열로부터 구한 목표상관함수행렬의 요소들과 비교한 것이다. 그림 5의 결과는, 재래의 방법이 시간적평균의 개념으로 볼때, 목표상관함수행렬, 특히 교차상관함수요소를 충분히 잘 만족시켜주지 못함을 보여주고 있다. 반면, 새로 제안된 방법은 좋은 결과를 줌을 나타내고 있다.

통상의 FFT기법을 사용하여 식(1)로부터 시계열을 구하면, 시간간격이 $T_0(2\pi/\Delta\omega)$ 인 시계열을 얻게된다. 이로부터 구한 상관함수는 그림 6a에서 처럼 $t=T_0/2$ 를 대칭선으로 대칭을 이루며, 그중 처음의 절반구간($0\sim T_0/2$)에서만 유효한 결과를 얻게된다. 위의 결과는 식(1)의 $f(t)$ 가 $t > T_0$ 조건에서 T_0 의 주기를 가지기 때문이다. 식(12)의 새로운 방법에 의하여 구한 시계열은 길이가 $T(2\pi M/\Delta\omega=MT_0)$ 로 앞의 경우보다 M배 긴 기록을 얻게된다. 그러나 이로부터 구한 상관함수는 그림 6b에서 볼 수 있는 것과 같이 $\tau=0, T_0, 2T_0, \dots, MT_0$ 에서 큰 값을 나타내며, 그중 처음의 $1/2M$ 구간($0\sim T_0/2$)에서만 유효한 결과를 준다. 위의 결과는 새로운 기법에 의한 시계열이 길이가 T이지만, 그내부에 주기가 $T_0(=T/M)$ 인 성분이 포함되어 있다는 것을 의미한다. 이 성분은 목표스펙트럼행렬과는 전혀 무관한 불필요한 것이며, 이 성분의 존재가 엄밀한 의미로 새로운 기법의 문제점이라고 말할 수 있다. 그러나, T_0 가 상당히 큰 값이어서, 실제적인 많은 공학문제에서는 이 성분의 존재가 해석결과에 문제를 야기하지 않는다. 예로, 시뮬레이션한 시계열이 구조체에 작용하는 입력하중이고, 구조체의 고유진동수가 T_0 보다 아주 작을 경우에는 주기가 T_0 인 성분에 의한 동력학적 증폭계수가 매우 작으므로 실질적인 거동해석에 문제를 일으키지 않게된다.

앞의 내용은 아래와 같은 면에서 고찰할 수 있다. 즉, 재래의 방법에서는 길이가 T_0 인 시계열을 얻을 수 있으나, 시뮬레이션을 통한 해석으로부터 Ensemble 평균의 개념으로 합당한 결과를 얻기위하여는 길이가 T_0 인 여러개(보통 15~20)의 다른 경우에 대하여 시뮬레이션을 수행하여 그 평균을 구하여야 한다. 반면, 제안된 방법에서는 길이가 MT_0 인 시계열을 한번만 시뮬레이션하여 해석한후 그 결과에 대하여 시간적평균을 구하여도 적절한 결과를 얻을 수 있다. 이러한 면에서 본연구에서 제안한 방법은 재래의 기법보다 실제문제에 적용시 더 효율적이라고 판단된다.

5. 결론

본 연구에서는 서로의 확률적인 상관관계가 스펙트럼행렬로 주어진 다변수 확률과정의 시뮬레이션 기법에 대하여 연구하였다. 종래의 스펙트럼행렬의 결과가 시간적평균의 개념으로 목표상관함수행렬을 만족시키지 못함을 지적하였고, 이를 해결하기 위하여 새로운 방법을 제안하였다. 예제해석을 통하여 새로운 방법으로 구한 시계열로부터 얻은 상관함수가 시간(τ)이 작은 구간에서 목표상관함수를 잘 만족시킴을 보였다. 아울러 시간이 큰 구간에서의 본 방법의 문제점을 분석하였고, 실제문제에 있어서 본 기법의 유용성도 토의하였다.

참고문헌

1. Shinozuka, M. and Jan, C-M. (1972), "Digital Simulation of Random Processes and Its Applications", J. of Sound and Vibration, Vol.25, No.1
2. Gasparini, D.A. and Vanmacke, E.H. (1976), "Simulated Earthquake Motions Compatible with Prescribed Response Spectra", MIT, Pub.No. R76-4
3. Shinozuka, M. Yun, C-B, and Vaicaitis, R. (1977), "Dynamic Analysis of Fixed Offshore Structures Subjected to Wind Generated Waves", J. of Structural Mechanics
4. Yun, C-B. and Ryu, J-S. (1986), "Fatigue Analysis of Fixed Offshore Structures Subjected to Random Waves", Proc. of ICCM'86
5. Kozin, F. (1988), "Autoregressive Moving Average Models of Earthquake Records", J. of Probabilistic Engineering Mechanics, Vol.3, No.2
6. Shinozuka, M. and Deodatis, G. (1988), "Stochastic process Models for Earthquake Ground Motion", J. of Probabilistic Engineering Mechanics, Vol.3, No.3
7. Shinozuka, M., Yun, C-B. and Seya, H. (1989), "Stochastic Methods in Wind Engineering", Proc. of 6th International Conference on Wind Engineering

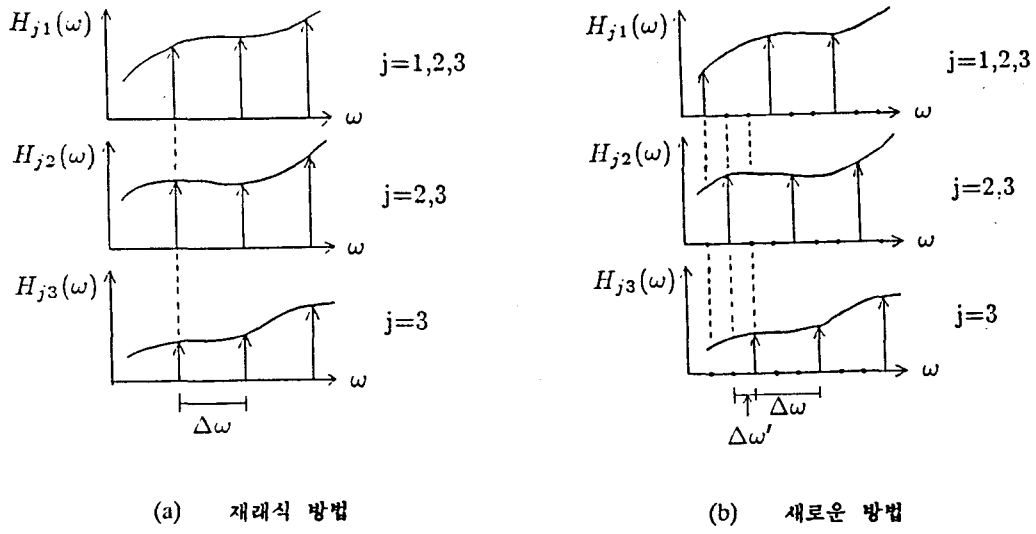


그림 1. 주파수영역에서의 Sampling

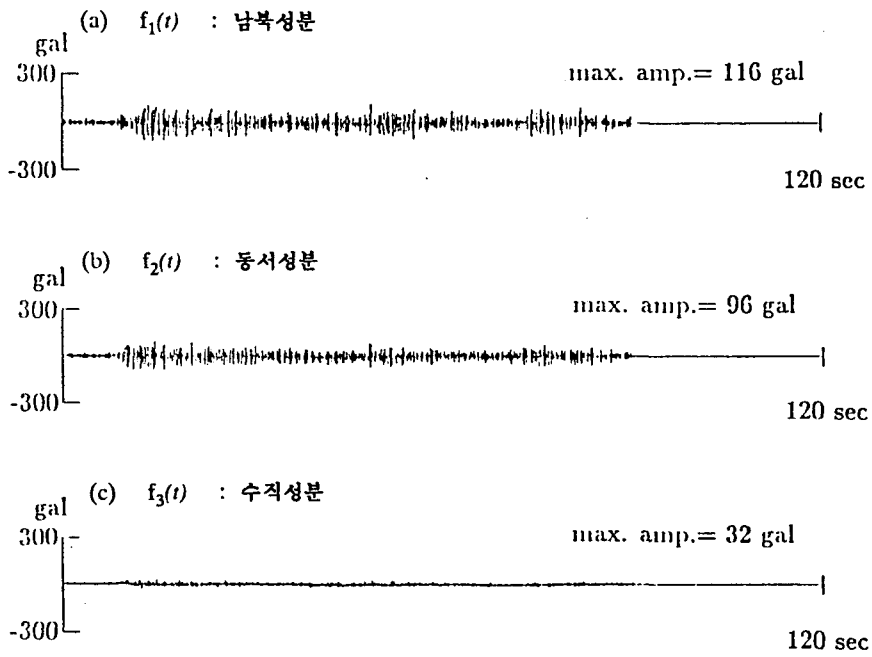


그림 2. 지진기록 (일본, Tokachi-Oki E.Q., 1968)

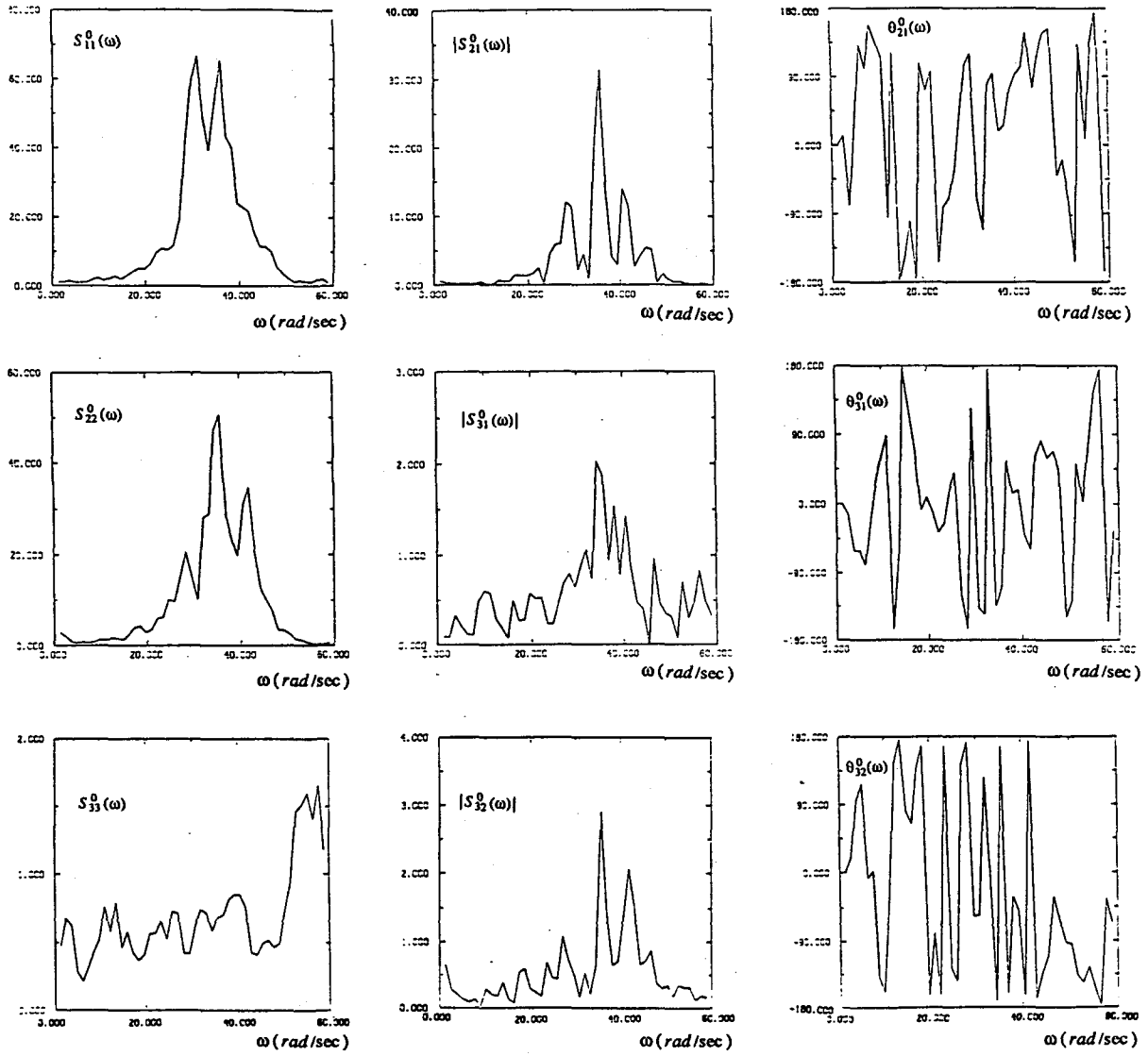


그림 3. 목표스펙트럼행렬요소

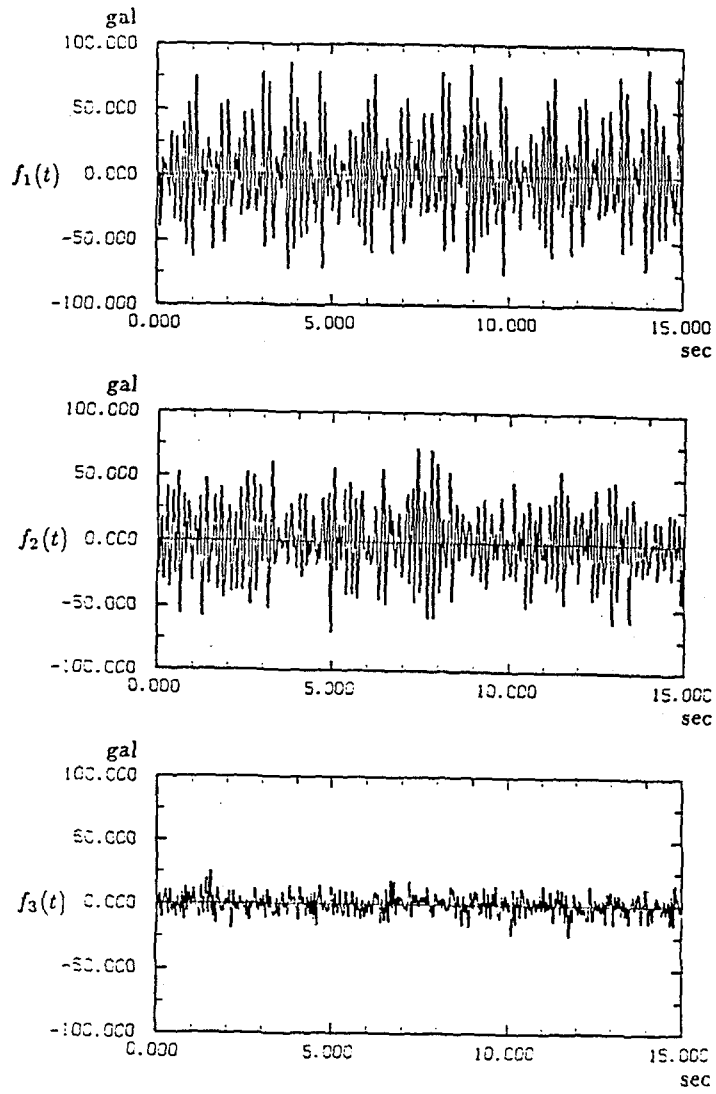


그림 4. 시뮬레이션된 시계열 (새로운 방법)

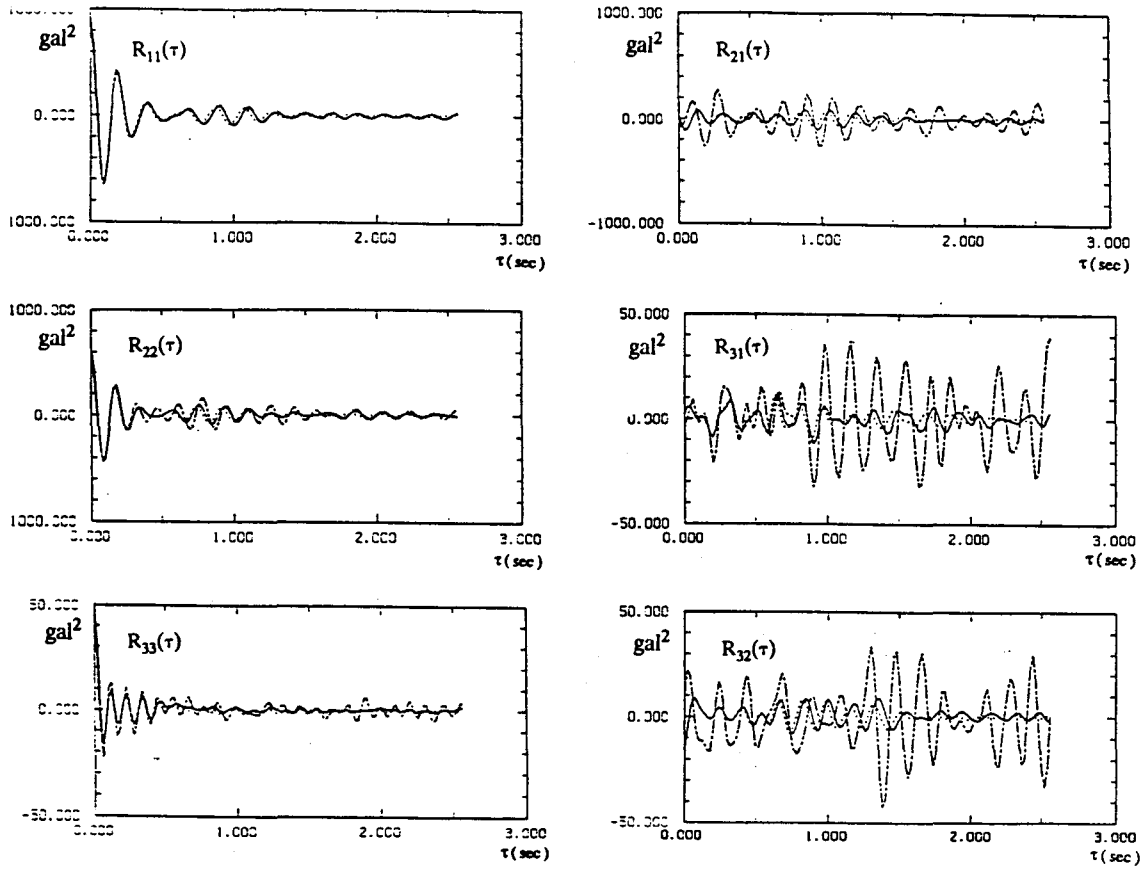


그림 5. 상관함수행렬요소의 비교 (— Target ; - - - By Old Method ; . . . By New Method)

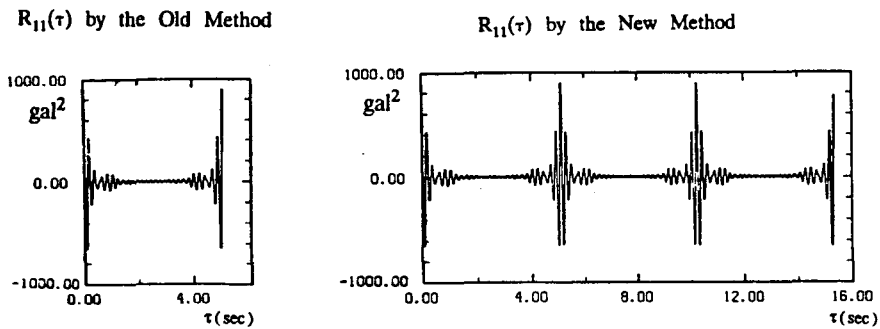


그림 6. 시뮬레이션된 상관함수행렬