

### 3차원 구조물의 유한요소해석 전처리에 관한 연구 (기하학적 모델링을 중심으로)

A Study on the Preprocessing for Finite Element Analysis of 3-Dimensional Structures.  
(With Focus on Geometric Modelling)

○ 이재영\*, 이진휴\*\*, 한상기\*\*\*  
Jac Young Lee, Jin Hyu Lee, Sang Ki Han

#### ABSTRACT

This paper introduces a geometric modelling system adopted in a newly developed preprocessor for finite element analysis of three dimensional structures. The formulation is characterized by hierarchical construction of structural model which consists of control points, curves, surfaces and solids. Various surface and solid modelling schemes based on blending functions and boundary representation are systematized for finite element mesh generation. The modelling system is integrated with model synthesis and operations which facilitate modelling of complex structures.

#### 1. 서론

유한요소해석의 전처리는 해석에 필요한 데이터 컴퓨터를 이용하여 발생시키는 과정을 의미한다. 초기의 유한요소해석 프로그램들은 전처리의 기능이 없거나 또는 빈약하였으므로 단말 사용자가 방대하고 복잡한 입력 데이터를 일일이 작성해야 하는 어려움이 있었다. 또 작성된 데이터를 검정하고 수정하는 데는 더 큰 노력이 필요했다. 이는 곧 유한요소법의 가장 큰 제한성으로 인식되게 되었으며, 그 결과 이 과정을 자동화하는 전처리에 관한 연구가 활발히 진행되게 되었다. 오늘날의 상업적인 유한요소해석시스템에 있어서 전처리 기능은 필수적인 요소가 되었다. 또한 전처리 전용의 소프트웨어도 다수 개발되기에 이르렀다<sup>(1,2)</sup>. 그러나 전처리에 관한 이론은 아직 체계적으로 정립되어 있지 않으며, 소프트웨어마다 각기 다른 방법과 체계로 이루어지는 경향이 있다.

전처리과정은 대체로 기하학적 모델의 발생, 모델의 표현, 절점 및 요소번호의 최적화, 조건(하중, 경계조건 등) 및 속성(재료 성질 등) 부여 등으로 이루어진다. 이 연구에서는 이러한 일련의 작업을 자동화하고, 또 이를 computer graphics를 활용해서 대화적인 방식으로 실행하는 효과적인 방법들을 연구 검토하여, 새로운 모델링 체계를 정립하였으며, 이를 바탕으로 실용성 있는 전처리 전용 프로그램(preprocessor)을 개발하였다. 이 논문에서는 이와 관련된 내용 중에서 전처리의 핵심이라고 할 수 있는 요소망 발생을 위한 기하학적 모델링 방법과 그 기본 알고리즘을 중심으로 기술하였다.

#### 2. 모델링 체계

유한요소의 기하학적 모델링 과정은 개략적으로 다음과 같이 몇 개의 단계로 요약할 수 있다.

- 조절점의 좌표 입력
- 곡선의 형성과 결합, 분리, 교차 등의 연산
- 유한요소망의 골격이 되는 母線 구성
- 유한요소망의 발생
- 유한요소망의 연산(교차, 재분할 등)

전처리 프로그램에 있어서 위의 모델링 과정이 어떠한 체계와 기능으로 구성되어 있는지는 가장 중요한 요소라고 할 수 있으며, 그에 따라서 모델링의 능력뿐만 아니라 사용상의 편의성과 용이성이 좌우된다.

이 연구에서 고안한 모델링 체계는 그림 1과 같이 조절점, 곡선, 곡면, 입체, 모델의 계층적인 구조로 이루어져 있으며,

\* 정회원, 전북대학교 농공학과 부교수  
 \*\* 정회원, 쌍용건설 대리  
 \*\*\* 학생회원, 전북대학교 대학원

각단계에서 다양한 방법을 구사하여 계산이 실행되도록 하였다. 이와같은 모델링 체계는 1) 사용자가 직관적이며, 자연스러운 방법에 의해 모델을 단계적으로 완성할 수 있도록 하고, 2) 데이터 구조가 조직적이며, 간단하게 되도록 하고, 3) 구조적인 프로그래밍 체계를 유지하는데 주안점을 두고 이루어졌다.

#### 3. 곡선 모델

유한요소법의 사용자가 grid나 keyboard를 이용하여 직접적으로 입력시키는 것은 조절점의 좌표뿐이며, 그 이후의 과정에서는 이들 조절점을 기준으로 한 위상을 정해줌으로써 원하는 유한요소모형을 만들게 된다. 조절점에 의해서 입차적으로 형성되는 것은 곡선이다. 곡선은 요소망 발생의 기준이 되는 母線을 구성한다. 모선은 구조물의 형상뿐만 아니라 요소의 밀도를 정하는 기준이 된다. 곡선의 형상은 곡선의 종류와 조절점의 좌표에 의해서 결정된다. 곡선은 그 특성에 따라서 기하학적인 곡선, 매개변수곡선, 자유곡선으로 분류할 수 있다. 이 중에서 자유곡선은 정밀한 데이터를 나타내기가

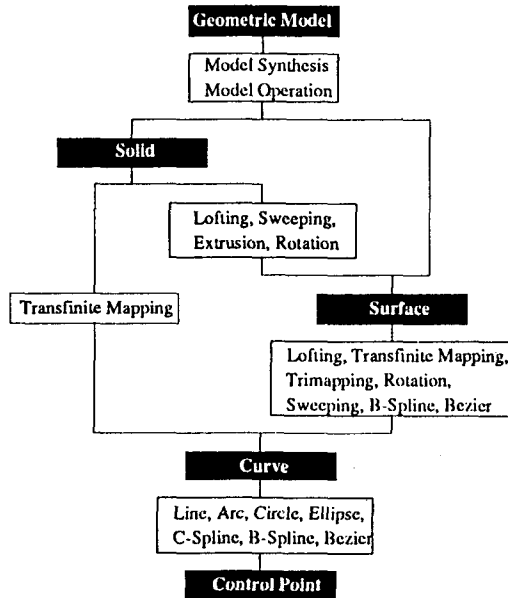


그림 1. 계층적 모델링 체계

근란하여 유한요소 해석의 전처리에는 적합하지 않기 때문에 이 연구에서는 제외하였다.

가. 매개변수곡선

곡선상의 임의점의 좌표가 식(1)과 같이 매개변수 표시법에 의해서 정의되는 곡선을 매개변수곡선이라고 한다.

$$x=g(u), y=f(u), z=h(u) \quad (1)$$

이 연구에서 개발한 preprocessor에 포함된 매개변수곡선은 다항식곡선, Cubic spline곡선, B-Spline곡선 및 Bezier곡선이다. 이들 곡선의 형상은 조절점의 좌표에 의해서 결정된다. 이에 관한 구체적인 내용은 참고문헌(3,4)에 기술되어 있으며, 여기서는 생략한다.

나. 기하학적곡선

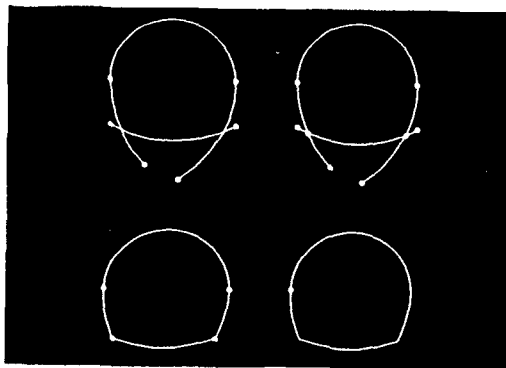
직선, 원, 원호, 타원, 타원호등 같이 몇개의 속성에 의해서 정의될 수 있는 단순한 곡선을 기하학적 곡선으로 분류하였다. 이들 곡선도 곡선상의 임의점의 좌표를 매개변수를 이용하여 표시할 수도 있으나, 매개변수 대신에 곡선의 특성을 이용함으로써 도화의 효율성을 높이고, 수정, 교차, 분할등의 처리가 용이하게 되므로 이들을 별도로 분류하여 취급하였다.

다. 곡선의 연산

곡선의 연산은 조절점을 입력하여 형성된 곡선을 합성하거나 수정, 교차, 절단하여 변형하는 작업을 의미한다. 곡선의 연산이 대화적 방식의 지시에 의해 실행되게함으로써 복잡한 형상의 곡선을 쉽게 만들어낼 수 있다.

- 합성: 선택된 몇개의 곡선을 하나의 연결된 곡선으로 구성한다. 이는 linked list나 tree의 데이터구조를 통해서 구현된다.
- 수정: 곡선을 구성하고 있는 조절점의 위치를 바꾸거나, 또는 곡선의 종류를 변경함으로써 곡선의 형태를 수정할 수 있다. 곡선의 수정은 오류를 정정하기 위해서라기 보다는 사용자가 곡선의 형상을 보다 쉽게 조정할 수 있도록 하기 위한 것이다.
- 교차: 곡선과 곡선의 교차점을 구하여, 곡선을 분리시킨다. 분리된 각각의 곡선은 독립된 곡선을 형성한다. 이때 원래 곡선에 관한 정보는 별도로 유지되며, 분리된 곡선으로부터 이를 추적할 수 있도록 데이터 구조가 이루어진다.
- 절단: 곡선을 지정한 위치에서 절단한다. 절단의 위치는 절대적인 좌표에 의해서 지정하거나 또는 곡선상의 상대적인 좌표에 의해서 정해줄 수 있다.

그림 2는 곡선의 연산을 통해서 모션을 형성하는 과정을 예시한 것이다.



(a) 형성 (b) 교차  
(c) 절기 (d) 합성

그림 2. 곡선의 연산

4. 요소망 모델

요소망 모델은 해석영역을 분할하는 요소의 형상 데이터로 이루어진다. 요소망의 발생이란 지정된 영역내에 소정의 밀도로 절점을 배치하고, 몇개의 절점을 연결하여 요소를 구성하는 일련의 과정을 의미하며, 대체로 다음의 세 단계로 이루어진다.

- 절점좌표의 계산: 곡면 또는 입체 공간내에 소정의 밀도로 배치된 절점의 좌표를 계산한다.
- 요소의 구성: 여러개의 절점을 포함하는 요소를 구성한다.
- Wire frame의 구성: 요소경계선을 이루는 선분을 분류하여, wire frame model을 만든다.

CAD나 solid modelling을 위한 형상 데이터의 발생은 유한 요소망의 발생과 공통되는 점이 많다. 그러나 전자의 경우에는 물체의 형상을 정확하게 모델링하는 것만이 중요시되는데 반해서, 유한요소망의 발생은 유한요소해석의 정확도와 계산상의 효율성이 보장되어야 한다는 까다로운 조건이 수반된다. 또한 절점의 연결성이 요소사이에 적합하여야 하므로 요소망의 연산은 단순한 형상 모델링의 연산보다 훨씬 더 복잡하고 어렵다.

그동안 요소망을 자동으로 발생시키는 automatic mesh generation에 관한 연구가 활발히 진행되어 왔으며, 이를 위한 여러가지 기법이 개발된 바 있다. 요소망 발생 방법은 기하학적인 데이터의 계산 방법에 따라서 等變數補間(isoparametric interpolation) 방법<sup>(5)</sup>, 混成函數(blending function) 방법<sup>(6,7,8)</sup>, 自動三角分割(automatic triangulation) 방법<sup>(9,10)</sup>으로 분류할 수 있으며, 요소망의 연산 및 데이터 구조에 따라서 경계표현법, Constructive Solid Geometry(CSG), 공간점유 모델링등으로 나눌 수도 있다. 또한 요소망을 개선하여 해석상의 효율성을 높이는 적응분할방법<sup>(11)</sup>은 h-version과 p-version의 방법으로 나눌 수 있다. 이 연구에서는 혼성함수방법을 이용한 경계표현법을 중점적으로 다루었다.

구조해석의 영역은 평면(평면변형, 평면응력, 축대칭, 플레이트굽힘), 곡면(Shell) 및 입체(3차원 고체)로 구분할 수 있다. 평면은 곡면의 특수한 경우로 취급할 수 있기 때문에 이 연구에서는 곡면과 입체, 두가지로 나누어서 요소망발생을 다루었다. 곡면의 요소망은 한개 이상의 곡선을 모션으로 하여 발생되며, 입체의 요소망은 주어진 곡선을 기준으로 하거나 또는 앞단계에서 발생된 곡면요소망을 冪面으로 하여 발생된다.

혼성함수를 이용한 요소망의 모델링에서는 절점의 좌표가 결정되기만하면 요소와 wire frame 모델의 구성은 간단하게 이루어진다. 그러므로 여기서는 절점의 좌표계산법에 관해서만 기술하였다.

가. Lofting

Lofting은 두개의 영역에서 서로 대응되는 점들을 선형보간하여 그 사이에 위치한 점들의 좌표를 발생시키는 방법이다. 이와 같은 lofting 연산은 lofting projector에 의해서 간단하게 표현될 수 있다. Projector란 좌표보간을 위한 연산자로서 x, y 및 z의 좌표에 대해서 공통적으로 적용된다. 곡선  $\psi_1(u)$ 과  $\psi_2(u)$ , 2개의 모션을 선형보간하는 lofting projector는

$$P(u,v)=(1-w)\Omega_1(i)+w\Omega_2(i) \quad (i=1,\dots,n, 0 \leq w \leq 1) \quad (2)$$

이다. 여기서 u는 곡선  $\psi_1$ 과  $\psi_2$ 를 따른 자연좌표이며 v는 곡선  $\psi_1$ 상에서 0이고 곡선  $\psi_2$ 상에서 1의 값을 갖는 자연좌표이다. 또한 lofting을 이용하여 두개의 대응되는 곡면 사이에 입체적인 요소망을 발생시킬 수 있다. 두개의 곡면상의 좌표들  $\Omega_1$ 과  $\Omega_2$ 라고하면

$$P(u,v)=(1-v)\psi_1(u)+v\psi_2(u) \quad (0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1) \quad (3)$$

는 입체공간 내의 좌표를 선형보간하는 projector를 나타낸다. 여기서 i는  $\Omega_1$ 과  $\Omega_2$ 의 영역내 절점번호이며, n은 절점의 수이다. w는  $\Omega_1$ 과  $\Omega_2$ 에서 각각 0과 1의 값을 갖는 자연좌표이다.

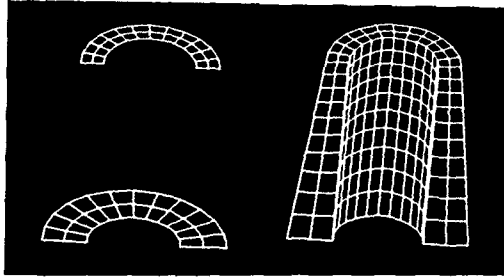


그림 3. Lofting에 의한 입체의 요소망 발생

나. Transfinite Mapping

Transfinite mapping은 곡면이나 입체영역을 각각 單位邊長의 정사각형 및 정육면체와 mapping 함으로써 영역내 임의점의 좌표를결정하는 방법이다<sup>(7)</sup>. Transfinite mapping에 의하면 요소망의 경계선상에 있는 절점의 좌표가 실제의 곡면, 또는 입체영역의 좌표와 일치하는 곡면, 또는 입체모형을 형성할 수 있다. Isoparametric mapping 방법<sup>(5)</sup>과 유사한 점이 있으나, 곡선상의 절점수에 제한을 받지 않으며, 좀더 복잡하고 다양한 형상의 영역에 적용할 수 있다는 점에서 융통성이 크다.

Transfinite mapping은 앞에서 기술한 lofting projector 몇개를 조합한 방법이라고 할수 있다. 즉 그림 4(a)와 같이 서로 마주보는 두곡선  $y_1(u)$ 와  $y_2(u)$ 를 선형보간하는 projector와,  $x_1(v)$ 와  $x_2(v)$ 를 선형보간하는 projector를 각각  $P_1$ 과  $P_2$ 라고하면

$$P_1(uv) = (1-v)\psi_1(u) + v\psi_2(u) \quad (0 \leq u \leq 1) \quad (4)$$

$$P_2(uv) = (1-u)\xi_1(v) + u\xi_2(v) \quad (0 \leq v \leq 1)$$

이다. 이들 두 projector의 곱을 새로운 projector  $P_{12}$ 라고 하면, 이 projector는 곡면의 네 귀퉁이에서 실제의 곡면과 일치하며, 이들 귀퉁이를 직선으로 연결하므로서 얻어지는 영역과 일치한다. 즉

$$P_{12}(uv) = (1-u)(1-v)R(0,0) + (1-u)vR(0,1) + uvR(1,1) + u(1-v)R(1,0) \quad (0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1) \quad (5)$$

이며, 곡면 전체의 영역을 mapping하는 projector는

$$P = P_1 + P_2 - P_{12}$$

이다. 입체에 대해서도 곡면의 경우와 유사한 개념의 transfinite mapping에 의해서 요소망 발생시킬 수 있다. 이는 그림 4(b)와 같이  $u, v, w$ 의 3차원적인 곡선좌표계와 단위변장의 정육면체를 mapping하는 projector  $P(u, v, w)$ 에 의해서 달성된다. 영역의 경계를 project하는 세계의 기본 projector

$$P_{12}(uv,w) = (1-v)(1-w)\psi_1(u) + v(1-w)\psi_2(u) + vw\psi_3(u) + (1-v)w\psi_4(u)$$

$$P_{23}(uv,w) = (1-w)(1-u)\xi_1(v) + w(1-u)\xi_2(v) + wu\xi_3(v) + (1-w)u\xi_4(v) \quad (6)$$

$$P_{31}(uv,w) = (1-u)(1-v)\eta_1(w) + u(1-v)\eta_2(w) + uv\eta_3(w) + (1-u)v\eta_4(w) \quad (0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1, 0 \leq w \leq 1)$$

와 8개의 귀퉁이를 보간하는 projector

$$P_{123}(uv,w) = (1-u)(1-v)(1-w)R(0,0,0) + u(1-v)(1-w)R(1,0,0) + (1-u)v(1-w)R(0,1,0) + uv(1-w)R(1,1,0) + (1-u)(1-v)wR(0,0,1) + u(1-v)wR(1,0,1) + (1-u)vwR(0,1,1) + uvwR(1,1,1) \quad (7)$$

를 조합함으로써 입체영역을 mapping하는 projector를 얻는다. 즉 입체영역의 transfinite mapping projector는

$$P = P_{12} + P_{23} + P_{31} - 2P_{123} \quad (8)$$

이다. 여기서  $u$ 는 그림 4(b)의 곡선  $\psi_1 - \psi_4$ 를 따른 자연좌표이고,  $v$ 는 곡선  $\xi_1 - \xi_4$ 를 따른 자연좌표이며,  $w$ 는 곡선  $\eta_1 - \eta_4$ 를 따른 자연좌표이다.

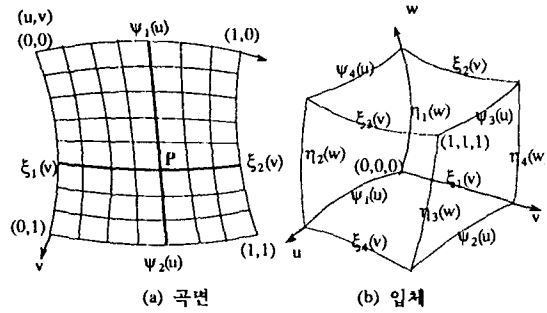
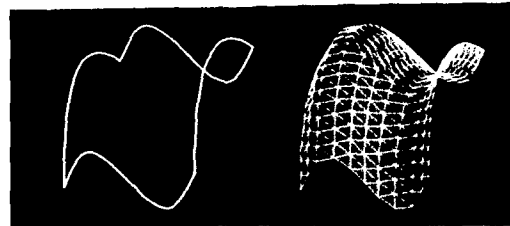
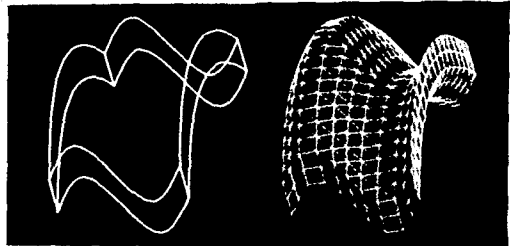


그림 4. Transfinite mapping을 위한 곡선 좌표계



(a) 곡면 요소망 발생



(b) 입체 요소망 발생

그림 5. Transfinite mapping의 예

다. Trimapping

Trimapping은 세계의 경계곡선으로 이루어진 곡면과 단위변장의 정사각형을 mapping 함으로써 곡면상의 임의점의 좌표를결정하는 방법이다. 삼각형의 면적좌표들  $u, v, w$ 라고 하면, 세 경계곡선은 각각  $\xi_1(u), \eta_2(v), \zeta_3(w)$ 에 의해서 나타낼 수 있다. Trimapping은 다음과 같이 정의되는 세계의 기본 projector

$$P_1(uv,w) = \left(\frac{u}{1-v}\right)\eta(v) + \left(\frac{w}{1-v}\right)\zeta(1-v)$$

$$P_2(uv,w) = \left(\frac{v}{1-v}\right)\zeta(v) + \left(\frac{u}{1-v}\right)\xi(1-v) \quad (9)$$

$$P_3(uv,w) = \left(\frac{w}{1-u}\right)\xi(u) + \left(\frac{v}{1-u}\right)\eta(1-u)$$

$$(0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1, 0 \leq w \leq 1, u+v+w \leq 1)$$

와 이들 projector의 곱으로 표시되는 projector

$$P_{123} = w\xi(0) + u\eta(0) + v\zeta(0) \quad (10)$$

에 의해서 나타낼 수 있다. 즉

$$P = \frac{1}{2}(P_1 + P_2 + P_3 - P_{123}) \quad (11)$$

는 곡면전체의 영역을 mapping하는 projector이다.

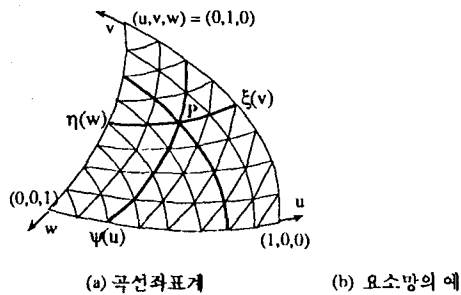


그림 6. Trimapping에 의한 좌표계산

라. 회전에 의한 좌표계산

정해진 회전축을 중심으로 곡선을 회전시킴으로써 회전면을 얻을 수 있다. 또한 회전축을 중심으로 곡면을 회전시키면 입체적이 요소로 구성된 회전체를 얻을 수도 있다(그림 7). 회전체를 구성하는 각 점들의 좌표는 곡면의 경우와 동일한 방법으로 계산된다. 그림 8에서  $\psi(u)$  상의 점 U를 회전면  $\Omega(u)$  위의 O를 중심으로 각  $\alpha$ 만큼 회전시켜서 얻은 점을 P라고 하고 U, O 및 P의 좌표를 각각  $(x_u, y_u, z_u)$ ,  $(x_o, y_o, z_o)$  및  $(x_p, y_p, z_p)$ 로 나타내면

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{pmatrix} + r(u) \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

의 관계가 있다. 여기서  $r(u)$ 는 회전의 반경이다. 위의 식을 이용하여 P의 좌표를 계산하기 위해서는 먼저  $(x_o, y_o, z_o)$ 에 대응되는  $(x_u, y_u, z_u)$ 를 계산하여야 한다. OU가 회전축에 수직하다는 조건으로부터  $A \cdot C = 0, A \times B = 0$ 의 두 방정식을 얻을 수 있으며, 이들 방정식을 연립해서 풀면  $(x_u, y_u, z_u)$ 를 구할 수 있다. 그 구체적인 계산 방법은 참고문헌(4)에 상세히 기술되어 있으며, 여기서는 생략한다. |V|는 회전축을 z'축으로 하는  $(x', y', z')$  좌표계에 대한 변환행렬을 표시한다. x, y 및 z축 방향의 단위벡터를 각각 i, j, k라고 하고, x', y' 및 z'축 방향의 단위벡터를 각각 i', j', k'로 표시하면, 입력되는 회전축상의 두 점의 좌표에 의해서 k'를 결정하고,  $i' = (k' \times i) \times k'$ 와  $j' = k' \times i'$ 를 순차적으로 구하면 이들에 의해 변환행렬 |V|를 구성할 수 있다. 이때 회전축과 x축이 이루는 각도가 작을 경우에는 i'과 j'의 계산순서를 바꾼다. 한편 반경 r(u)는  $(x_u, y_u, z_u)$ 와  $(x_o, y_o, z_o)$ 의 직선거리로 정의된다

또한 이 연구에서는  $(x', y', z')$  좌표계에서 회전체의 좌표계산을 실행한 다음에  $(x, y, z)$  좌표계로 환원하는 방법을 고안하여, 그 효율성을 위의 계산방법과 비교 검토하였다. 좌표변환의 계산방법에 의하여 프로그램을 다소 단순화시킬 수 있었으나, 양자의 계산시간에는 별 차이가 없는 것으로 나타났다.

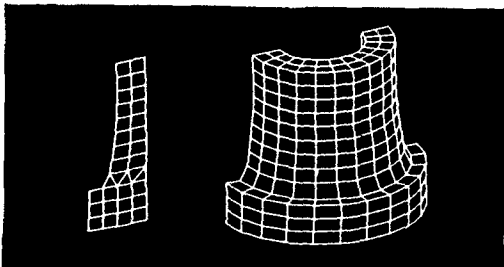


그림 7. 회전을 이용하여 발생된 입체 요소망의 예

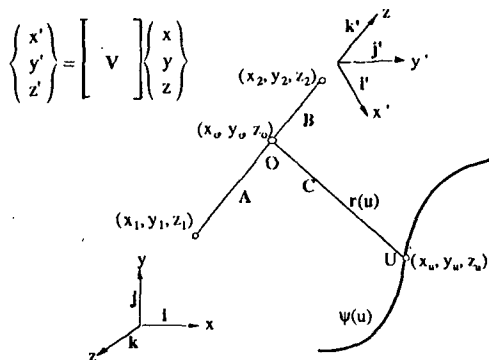


그림 8. 회전을 이용한 좌표계산

마. Extrusion

Extrusion은 선택된 곡면  $\Omega_1$ 의 모든 점에서 수직인 방향으로 일정한 거리 D에 있는 가상의 곡면  $\Omega_2$ 를 설정하여 lofting 기법으로 점들의 좌표를 계산하는 방법이다. Extrusion은 그림 9와 같이 두께가 일정한 곡면을 3차원 고체로 모델링할 경우에 유용하게 이용될 수 있다.  $\Omega_1$ 의 임의의 점 u에서

$$V_n = \begin{pmatrix} \partial x / \partial \xi \\ \partial y / \partial \xi \\ \partial z / \partial \xi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial x / \partial \eta \\ \partial y / \partial \eta \\ \partial z / \partial \eta \end{pmatrix} \quad (13)$$

는  $\Omega_1$ 에 수직인 법선벡터를 나타낸다. 여기서  $\xi$ 와  $\eta$ 는  $\Omega_1$  상에서 u를 대표하는 요소의 자연좌표이다. u점에 대응되는  $\Omega_2$  상의 점 p의 좌표는

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} + D \frac{V_n}{|V_n|} \quad (14)$$

에 의해서 계산한다. 그림 9는 extrusion에 의한 모델링 예이다.

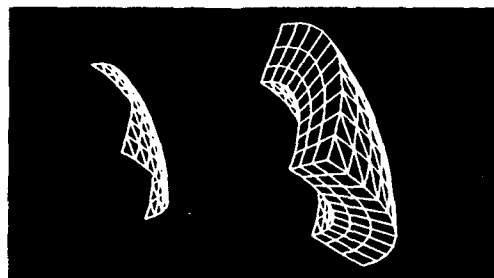


그림 9. Extrusion에 의해 발생된 입체 요소망의 예

바. Sweeping

Sweeping은 곡선  $\psi$ 를 정해진 경로를 따라서 이동시켜서 곡면을 만드는 모델링 방법의 하나이다. 이 연구에서는 곡면 또는 입체의 요소망을 발생시키는 방법으로서 이 sweeping의 방법을 도입하였다. 곡선  $\psi$ 를 sweeping하여 얻어지는 곡면상의 좌표는

$$\{P(u,v)\} = \{T(v)\} \{ \psi(u) \} \quad (0 \leq u \leq 1, v_{min} \leq v \leq v_{max}) \quad (15)$$

에 의해서 계산된다. 여기서  $\{P(u,v)\}^T = [x \ y \ z]$ 는 곡면상의 좌표들

나타내는 위치벡터이고,  $\{\psi(u)\}^T = [\psi_1, \psi_2, \psi_3, 1]$  는 곡선 상의 좌표를 나타내는 벡터이며,  $T(v)$ 는 스위핑 변환을 실행하는 행렬이다. 예를 들어서 스위핑의 경로가  $(x, y, z)$ 에서부터  $(x_2, y_2, z_2)$ 에 이르는 직선일 경우에는

$$[T(v)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & vl \\ 0 & 1 & 0 & vm \\ 0 & 0 & 1 & vn \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

이다. 여기서  $l, m, n$  은 직선경로의 방향여현이고,  $v_{min}=0, v_{max}=1$ 이다. 곡면을 정해진 경로를 따라서 sweeping 함으로써 입체요소망을 발생시킬 수 있으며 그 계산 방법은 곡면의 경우와 동일하다. 그림 11은 sweeping에 의해 발생된 입체요소망을 예시한 것이다.

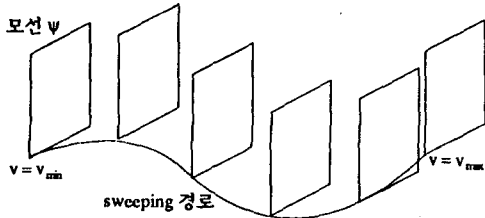


그림 10. Sweeping에 의한 좌표계산

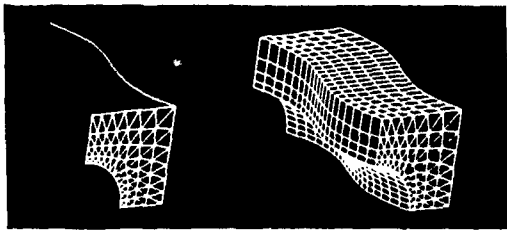


그림 11. Sweeping에 의해 발생된 입체 요소망의 예

#### 사. 매개변수 곡면

Solid modeling에서 흔히 사용되는 매개변수 곡면을 이용하여 요소망을 발생시킬 수 있다. 매개변수 곡면이란 다음과 같은 매개변수방정식에 의해 표현되는 곡면을 의미한다.

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \quad (17)$$

여기서  $u$ 와  $v$ 는 정해진 범위 안에서 변화하는 매개변수이다. 매개변수 곡면은 2차곡면(quadratic surface), Coons곡면, Bezier곡면, B-spline곡면등 여러가지가 있다. 이 중에서 특히 Bezier곡면과 B-spline곡면은 곡률이 완만하게 변화하는 연속적인 곡면을 쉽게 모델링할 수 있는 이점이 있으므로, 이 연구에서는 이들을 유한요소망의 좌표계산 방법으로 활용하였다.

##### 1) Bezier 곡면

Bezier곡면상의 좌표는 정의다각형(defining polygon)의 격자망에 의해서 결정되며,

$$x(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_m(u) C_n(v) x_{ij} \quad (0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1) \quad (18)$$

으로 표현된다. 여기서  $x_{ij}$ 는 격자점  $(i, j)$ 의 좌표이며,  $u$ 와  $v$ 는 매개변수이고,  $B_m$ 와  $C_n$ 는 Bernstein 기저함수이다. 정의다각형의 격자점 수는  $u$ 와  $v$ 방향으로 각각  $(m+1)$ 개와  $(n+1)$ 개이다. 발생되는 요소의 밀도는 격자점의 수와 배치에 따라서 조정된다.

##### 2) B-spline 곡면

B-spline 곡면도 Bezier곡면과 마찬가지로 정의 다각형의 격자점의 좌표에 의해서 결정된다. 곡면상의 임의점의 좌표는

$$x(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n M_m(u) N_n(v) x_{ij}, \quad (u_{min} \leq u \leq u_{max}, v_{min} \leq v \leq v_{max}) \quad (19)$$

으로 표현된다. 여기서  $x_{ij}$ 는 격자점  $(i, j)$ 의 좌표이며,  $u$ 와  $v$ 는 매개변수이고,  $M_m$ 와  $N_n$ 는 B-spline 기저함수이다. 격자점의 수는  $u$ 와  $v$ 방향으로 각각  $(m+1)$ 개와  $(n+1)$ 개이다.  $u_i$ 와  $v_j$ 는 각각  $u$ 와  $v$ 방향의 knot vector이다. B-spline곡면은 knot vector의 설정에 따라서  $u$ 와  $v$ 방향에 대하여 독립적으로 기저함수의 형식을 주기성 또는 비주기성, 그리고 균등 또는 불균등으로 조정할 수 있다. 또한  $k$ 값에 의해 기저함수의 차수를 정할 수 있으며, 중복도에 의해 곡면의 형태를 조정할 수도 있다. 따라서 B-spline곡면에 발생되는 요소의 밀도는 격자점의 좌표와 더불어 knot vector, 차수  $k$  값 및 중복도에 의해 조정가능하다.

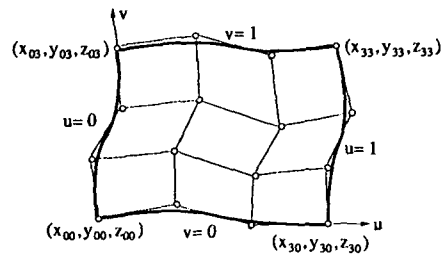
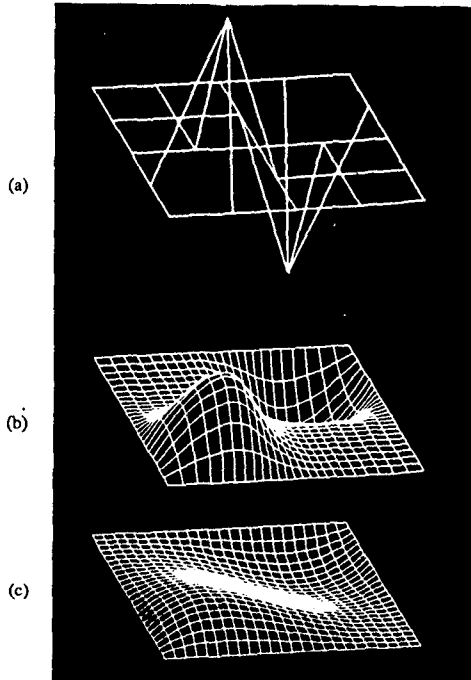


그림 12. 매개변수곡면의 형성을 위한 정의 다각형



(a) 정의 다각형의 격자망  
(b) B-spline 곡면의 유한요소망  
(c) Bezier 곡면

그림 13. 매개변수 곡면을 이용한 요소망 발생

### 5. 요소망 모델의 합성

앞에서 기술한 여러가지 방법으로 만들어진 요소망 모델은 단순한 곡면이나 입체만을 나타내는 단일 모델이다. 이와 같은 단일 모델 여러개를 합성함으로써 복잡한 구조물을 모델링할 수 있다. 단일 모델은 독립적으로 보조기의 장치에 저장하여, library와 할 수도 있다. 단일 모델을 합성하기 위해서는 여러가지의 모델 연산이 필요하다. 모델 연산의 내용은 모델링 방법에 따라서 다르다. 예를 들어서 앞에서 언급한 바 있는 CSG방법의 모델 연산은 주로 집합 연산이다. 이 논문에서는 경계 표현법만을 다루고 있기 때문에 이 방법을 중심으로 한 모델 연산을 다음에 기술하였다.

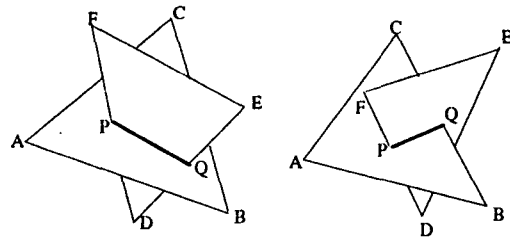


그림 15. 두 삼각형의 교차선

#### 가. 모델 연산의 종류

이 연구에서 개발한 preprocessor에 포함된 모델 연산의 종류는 다음과 같다.

- 변환: 모델의 크기물 축소, 확대하거나, 또는 방향을 회전시킨다.
- 교차: 곡면과 곡면사이의 교차선을 구하고, 교차선을 중심으로 요소망 모델을 재구성한다.
- 집합: 모델을 다른 모델의 지정된 절점에 연결한다.
- 절단: 모델을 지정된 평면으로 절단한다.
- 분리: 모델을 교차선 또는 절단면을 따라서 분리한다.

앞으로의 연구에서는 집합 연산과 모델의 형태를 부분적으로 변화시키는 변형(deformation)의 기능을 개발하여 preprocessor에 추가할 계획이다.

위에 열거한 모델 연산 중에서 변환, 집합, 분리 등은 간단한 계산을 통해서 실행될 수 있으므로 상세한 설명을 생략하고, 곡면의 교차와 그에 따른 곡면의 재구성 방법에 대해서는 좀더 구체적인 설명을 다음에 기술하였다. 절단은 교차와 유사한 내용이므로 여기서는 설명을 생략한다.

#### 나. 곡면의 교차와 재구성

서로 만나는 두 곡면의 교차선은 연속적인 곡선을 이루며, 이 교차선을 중심으로 양쪽의 곡면이 분할된다. 여기서는 곡면의 교차선을 구하는 문제와 관련된 기본적인 algorithm을 기술하고, 이에 의하여 곡면 영역을 분할하는 방법을 간략하게 설명하였다.

##### 1) 요소의 분할

3절점 이외의 요소는 그림 14와 같이 삼각형으로 분할한다. 3절점 3각형 요소는 그 자체를 삼각형으로 한다. 삼각형에 대한 데이터는 꼭지점의 좌표와 삼각형이 속한 요소를 지시하는 pointer를 포함한다.

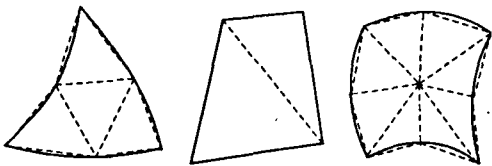


그림 14. 요소의 분할

##### 2) 삼각형의 분류

서로 교차하는 삼각형을 분류한다. 삼각형의 최대 및 최소 좌표값을 비교하여 교차의 범위 밖에 있는 삼각형은 계산에서 제외시킨다.

##### 3) 교차점 계산

삼각형의 변과 상대 삼각형의 교차점을 구한다. 즉 그림 16에서 삼각형 ABC와 변 DE, EF 및 FD의 교차점을 구하고 삼각형

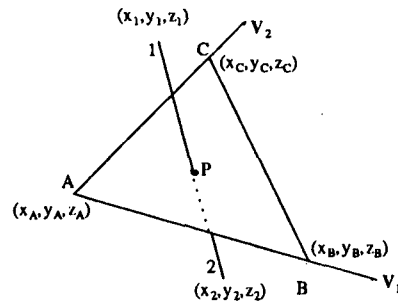


그림 16. 삼각형의 한 변과 다른 삼각형의 교차

DEF와 변 AB, BC 및 CA의 교차점을 차례로 구한다.

그림 16에서 삼각형 ABC의 두 변 AB와 AC방향의 단위 벡터는

$$V_1 = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}, \quad V_2 = \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} \quad (20)$$

이다. AB를  $x'$  축으로 하고, 요소에 수직인 방향으로  $z'$  축을 갖는 극좌표계에 대한 변환 행렬은 위 두 벡터의 연산에 의해 계산되는 세 벡터

$$U_1 = V_1, \quad U_2 = \frac{V_1 \times V_2}{|V_1 \times V_2|}, \quad U_3 = U_2 \times U_1 \quad (21)$$

로 이루어진다. 즉 변환행렬은

$$[U] = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{bmatrix} \quad (22)$$

이다. 이 변환행렬에 의해 좌표 변환된 직선의 시점 1, 종점 2 및 교차점 P의  $y'$  좌표값은

$$[z'_1 \ z'_2 \ z'_p] = [U_{31} \ U_{32} \ U_{33}] \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_A \\ y_1 & y_2 & y_B \\ z_1 & z_2 & z_C \end{bmatrix} \quad (23)$$

이다. 교차점 P의 좌표는

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = \frac{z'_2 - z'_p}{z'_2 - z'_1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \frac{z'_p - z'_1}{z'_2 - z'_1} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (24)$$

이다. 여기서  $z'_1$ 가  $z'_1$ 과  $z'_2$  사이에 있지 않으면 교차점은 직선의 연장선 위에 위치한다. 한편 요소의 세 절점과 P점을 요소의 평면에 투영한 좌표는

$$\begin{bmatrix} x'_A & x'_B & x'_C & x'_P \\ y'_A & y'_B & y'_C & y'_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A & x_B & x_C & x_P \\ y_A & y_B & y_C & y_P \\ z_A & z_B & z_C & z_P \end{bmatrix} \quad (25)$$

이다.

4) 교차점의 삼각형내 포함여부검사

P점의 투영된 좌표가 삼각형 안에 포함되어있는지의 여부는다음의 두가지 방법중의 하나로 판정된다. 여기서 좌표는 평면적으로 취급한다.

- 삼각형 변의 방향에 의하여 판정하는 방법
- 삼각형의 면적좌표에 의해 판정하는 방법

교차점이 삼각형의 내부, 그리고 직선의 시점과종점사이 에 존재할 경우에만 직선 12와 삼각형 ABC의 교차점을 등록한다.

5) 교차선의 구성

등록된 교차점들을 연결하여 두 삼각형의 교차선을 구한다. 모든 삼각형간의 교차선을 구한 다음에 이들 교차선의 시점과 종점의 좌표를 비교해서 일렬로 정렬하여 연속된 곡선을 구한다. 교차선들이 하나의 곡선으로정렬될 수 없는 경우에는 이를 두개 이상의 곡선으로 나누어서 정렬한다. 이와같이 만들어진 곡선은 엄밀한 의미에서는 여러개의 직선으로 구성된 개략적인 곡선이다. 원래의 유한요소망 자체가 개략적인 곡면을 나타내므로 정확한 교차선을 구하는 것은 위의 방법으로는 불가능하다. 그러나 유한요소모델링의 성격상정확한교차선을 구할 필요는 없으며, 위와 같이 구한 교차선으로도 만족할 만한 결과를 얻을 수 있다. 교차선을 좀더 완만한 곡선으로 나타내교차할 경우에는앞에서구한 교차점을 조절점으로 하는 Cubic spline곡선이나 B-spline곡선으로 대체한다. 이 연구에서 시도한 바에 의하면 cubic spline 곡선은 교차점의 배치상태에 따라서 약간의 oscillation을 보였다.

6) 곡면의 재구성

두 곡면을 교차시킨 다음에는 이 교차선주위에 인접한 요소들을 그림17과 같이 재구성한다. 그 순서는 다음과 같다.

- 교차선이 통과하는 요소를 찾아서, 통과하는 순서대로 기억시킨다.
- 교차선이 통과하는 요소수에 따라서 교차선을 소정의 절점으로 분할한다.
- 교차선이 통과하는 요소를 제거한다.
- 교차선상의 절점과 인접요소의 절점과를 연결하여 새로운 요소를 만들어서 제거된요소의 공간을 채운다.
- 서로 연결된 요소들을 합성하여 새로운 곡면영역을 형성한다.

그림18은 교차에 의해 곡면을 분할하고 요소를 재구성한 예를 나타낸 것이다.

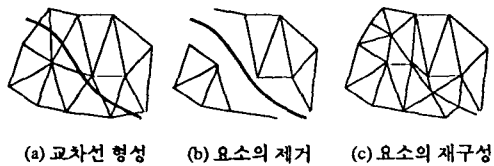


그림 17. 곡면의 교차와 재구성

6. 결론

이 연구에서는 3차원 구조물의 유한요소해석을 위한 새로운 모델링 체계를 정립하였으며, 이를 바탕으로 전처리프로그램을 개발하였다. 지금까지 산발적으로 활용되던 여러가지의 곡면, 또는 입체 모델링방법을 종합하여 유한요소 mesh generation 수단으로 체계화하였다. 또한 독자적인 모델링방법을 추가적으로 제시하였다. 특히 모델의 합성과 연산을 통해서 복잡한 구조물을 쉽게 모델링할 수 있는 방법을 구현하였다. 이 연구의 모델링 체계는 앞으로의 전처리 연구와 개발에 있어서 좋은 표본이 될 수 있을 것으로 사료된다.

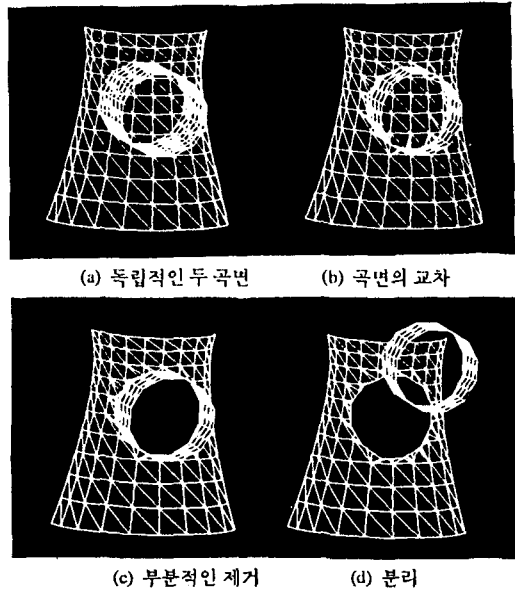


그림 18. 모델 연산의 예

참고문헌

1. Kamel, H. A., and M. W. Macabc, GIFTS: Graphic Oriented Interactive Finite Element Time Sharing System, *Structural Mechanics Software Series*, University Press of Virginia, Charlottesville, pp145-226, 1977.
2. Hamilton, C. H., and R. S. Gallagher, PATRAN: The computational Laboratory, pp577-594, *Finite Element Systems*, 3rd rev., Springer-Verlag, New York, 1985.
3. 이재영, 형상표현을 위한 모델러개발에 관한 연구, VIP 공동연구 환경기반구축(I), 과학기술처, 1990.
4. 이재영, 농업토목설계를 위한 유한요소해석시스템 개발(III), 농업진흥공사 연구보고서, 농업수산부, 1989.
5. Hermann, L. R., Laplacian-isoparametric grid generation scheme, *Journal of Engineering Mechanics Div.*, ASCE, Vol.102, pp749-756, 1976.
6. Imafuku, I., Y. Kodera, M. Sayawaki and M. Kono, A generalized automatic mesh generation scheme for finite element method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 15, pp713-731, 1980.
7. Haber, R. and J. F. Abel, Discrete transfinite mapping for the description and meshing of three-dimensional surfaces using interactive computer graphics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 18, pp41-66, 1982.
8. Perucchio, R., A. J. Ingrassia, and J. F. Abel, Interactive computer graphic preprocessing for three-dimensional finite element analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.18, pp909-926, 1982.
9. Cavendish, J. C., Automatic triangulation of arbitrary planar domains for the finite element method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 8, pp679-697, 1974.
10. Sadck, E. A., A scheme for the automatic generation of triangular finite elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 15, pp1813-1822, 1980.
11. Dwyer, H. A. The use of adaptive gridding, *Adaptive Computational Methods for Partial Differential Equations*, SIAM, 1983.