1990년도 봄
한국전산구조공학회 학술발표회 논문집

변형율 공간에서의 탄소성 강도 매트릭스 형성

A Development of Elastoplastic Tangent Modulus in Finite Strain Space

주 관 정(*)
Joo, Kuan Jung

ABSTRACT

The finite plasticity in strain space is viewed by formulating the consistency condition and the thermodynamic condition with respect to proposed state variables. The Naghi-Trapp work assumption is used to obtain a constraint equation, and the normality equation is formulated. Finally, an elastoplastic tangent modulus, which is based on the derived equations in strain space, is proposed.

1. 머 릿 말

변형될 수 있는 연속체(deformable body)가 외력을 받게되면 평형상태를 만족할 때 까지 계속적으로 변형을 하게된다. 변형은 일반적으로 비선형으로 이루어지고, 변형의 정도는 연속체의 각각의 material point 들의 변형상태에 의존하게 된다. 이들 점들의 변형 역시 각점들이 평형 상태에 이를 때까지 계속된다. 각각의 material point 의 평형상태는 상태 변수들(state variables)의 함수가 된다. 상태 변수들은 외부 변수들과 내부 변수들로 이루어 지는데 본 논문에서는 외부 변수들로서 right Cauchy-Green tensor C 와 온도 θ 를 고려하기로 한다. 따라서, material point 에서의 내적 상태변수들의 변화는 변형과 온도에 의해서만 결정되어 진다고 가정된다. 또한, material point 에서 온도와 specific entropy 간의 평형은 spicific internal energy 와 right Cauchy tensor C 와 내적 상태변수들 $q = (q_1, q_2, \cdots)$ 에 의해서 결정된다고 가정된다. 그러므로, thermomechanical state는 각점들의 (C , θ, q) 로 나타내어 질수 있다. 각 material point 들은 각각의 평형상태를 이루는 (C , θ, q)를 지니게 되므로, 연속체는 결국 일련의 material point 들로 이루는 면(surface 또는 hyper plane) 를 형성하게 된다고 볼수 있다. 이렇게 형성된 연속 평형면 (equilibrium surface)은 항복면 (yield surface) 또는 재하면(loading surface) 이라 부른다.[1,2]

응력 공간(stress space)에서의 탄소성 거동에관한 formulation 에 비하여, 변형율 공간 (strain space) 과 (또는) 온도 공간(temperature space)에서는 탄소성 거동을 보다 더 세분하여 분석 할수 가 있다. 예를들면,strain hardening 과 strain softening 을 구분할수 있다.

본 논문에서는, 일관성 조건(consistency condition),열역학적 제한 조건,work assumption, normality condition등을 변형율 공간에서 고찰해보고, 이들 조건들을 만족하는 탄소성 강도 매트릭스를 유도하기로 한다.

2. 일관성 조건 (Consistency Condition)

항복면 또는 재하면을 상태변수들 C, θ, q 의 함수로 표현하면,

$$g = g(\Lambda, q) \tag{2.1}$$

윗식에서, $\Lambda = (C, \theta)$

(*)정회원 三星電機 종합연구소 CAD/CAM실장

변형과 온도 공간에서의 재하함수(loading function)은 다음과 같이 정의 한다.

$$\hat{g} = \frac{\partial g}{\partial \Lambda} : \dot{\Lambda} \quad (= \frac{\partial g}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial g}{\partial C} : \dot{C}) \qquad (2.2)$$

윗식에서, 문자위에 있는 점은 시간미분(material time derivative)을 의미한다.

이렇게 정의할 경우, 탄소성 거동을 아래와 판별할수 있게된다.[3]

(i) $g = 0$, $\hat{g} > 0$: loading (2.3a)

(ii) $g = 0$, $\hat{g} = 0$: neutral loading(2.3b)

(iii) $g = 0$, $\hat{g} < 0$: unloading (2.3c)

Loading은 변형율이 증가하는 상태를 의미하므로 strain hardening, ideal behaving, softening이 이 경우에 해당한다. 변형율 공간에서는 strain softening의 경우에도 loading surface의 크기가 증가 하게된다.

q 를 연속함수라고 가정할수 있으므로, 식(2.1)로 부터 q 는 다음과 같이 표현될수 있다.

$$\dot{q} = f(\Lambda, q, \dot{\Lambda}) \langle \hat{g} \rangle \qquad (2.4)$$

여기서 $\langle\cdot\rangle$ 는 MacCauley bracket를 나타낸다.

내부 변수들이 시간 무관성(rate independence)하게 되려면, 함수 f 는 $\dot{\Lambda}$ 에 대해서 homogeneous 해야 하므로 식(2.4)는 $\dot{\Lambda}$ 에 대해 1차 식으로 표현된다.

$$\dot{q} = A:\dot{C} + b\dot{\theta} \qquad (2.5)$$

$\hat{g} = 0$ 일때 $\dot{q} = 0$이므로, Lagrangian multiplier α 를 이용하여 다음과 같이 된다.(α 는 C, θ, q 의 함수)

$$\dot{q} - \alpha \hat{g} = 0 \qquad (2.6a)$$

또는

$$(A - \alpha \otimes \frac{\partial g}{\partial C}):\dot{C} + (b - \alpha \frac{\partial g}{\partial \theta})\dot{\theta} = 0$$

(2.6b)

식(2.6b)의 괄호에 있는 함수들은 rate independent 하므로,

$$A = \alpha \otimes \frac{\partial g}{\partial C} \qquad (2.7a)$$

$$b = \alpha \frac{\partial g}{\partial \theta} \qquad (2.7b)$$

따라서, 식(2.5)로 부터, $\dot{q}$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{q} \; (= \alpha(\frac{\partial g}{\partial C}:\dot{C} + \frac{\partial g}{\partial \theta}\dot{\theta}))$$

$$= \alpha(\Lambda, q) \langle \hat{g} \rangle \qquad (2.8)$$

식(2.8) 과 consistency eq.($\hat{g} = 0$) 으로부터, 다음의 consistency condition을 얻는다.

$$1 + \frac{\partial g}{\partial q} \cdot \alpha = 0 \qquad (2.9)$$

3. 열역학적인 제한 조건

에너지 평형방정식의 local form [5,6] 은,

$$\rho \dot{\varepsilon} = \rho r - \nabla\cdot h + \tfrac{1}{2} S:\dot{C} \qquad (3.1)$$

여기서, ρ 는 질량밀도, ε 는 내부에너지, h 는 heat flux, r 은 열제공과 같은 source supply, S 는 2nd Piola-Kirichhoff stress, C 는 right Cauchy-Green tensor, ∇ 는 gradient vector를 각각 의미한다.

Clausius-Duhem 부등식의 local form은,

$$\rho\gamma = \rho\dot{\eta} - \frac{\rho r}{\theta} + \nabla\cdot(\frac{h}{\theta}) \geq 0 \qquad (3.2)$$

여기서, η 는 entropy, γ 는 내부 에너지 발생을 각각 나타낸다.

Helmholtz free energy 의 local form은 다음과 같다.

$$\psi = \varepsilon - \eta\theta \tag{3.3}$$

식(3.1)을 (3.2)에 대입하면,

$$\rho\theta\dot{\eta} + \tfrac{1}{2}\,S:\dot{C} - \rho\dot{\varepsilon} - h\cdot\nabla\theta/\theta \geq 0 \tag{3.4}$$

식(3.3) 과 (3.4)로 부터,

$$\rho\dot{\psi} + \rho\eta\dot{\theta} - \tfrac{1}{2}\,S:\dot{C} + h\cdot\nabla\theta/\theta \leq 0 \tag{3.5}$$

$\psi = \psi(\Lambda\,;\,q)$ 로 가정하면, 식(3.5)는 아래 식으로 된다.

$$\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial C} - \tfrac{1}{2}\,S\right):\dot{C} + \rho\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \eta\right)\dot{\theta} + \rho\frac{\partial\psi}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} + h\cdot\nabla\theta/\theta \leq 0 \tag{3.6}$$

$\dot{C}$ 와 $\dot{\theta}$ 는 상태변수(state variable) 가 아니므로, 이들은 임의의 값을 취할수 있다. 그러므로, 윗 식으로 부터 다음의 관계식을 얻는다.

$$S = 2\rho\frac{\partial\psi}{\partial C} \tag{3.7}$$

$2\rho\psi$ 를 Ψ 로 치환하면, 다음과 같이 정의할 수 있다.

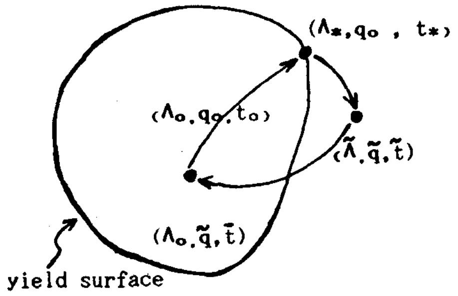
$$S = \frac{\partial\Psi}{\partial C} \tag{3.8}$$

$$C = \frac{\partial\Phi}{\partial S} \tag{3.9}$$

여기서, $\Psi + \Phi = S:C$ (3.10)

4. Work assumption

일련의 변형에 의한 한 싸이클에 의해 행하여지는 일에 의한 Λ, Ψ, q 의 관계 조건이 Naghdi - Trapp 이 제안한 '일에 대한 가정 ' [3] 에 근거해서 얻어 낼수 있다. Naghdi-Trapp 의 '일에 대한 가정' ,즉 "탄소성체에 일련의 변형 싸이클 동안에 행해진 외부 일은 zero 보다 같거나 크다." 를 이용해서 그림 1 에 예시된 일련의 변형 싸이클에 적용하면



그 림 1

$$\oint S:\dot{C}\,dt \geq 0 \tag{4.1}$$

그림 1 에서 $\tilde{\Lambda} = \Lambda_* + \Delta\Lambda_*$ 이고 $\tilde{q} = q_o + \Delta q$ 이므로, 온도(θ field)의 영향을 고려치 않으면 식(4.1) 은 다음과 같이 표현될수 있다.

$$\int_{C_o}^{C_*} S(\Lambda, q_o)\,dC + \int_{C_*}^{C_*+\Delta C_*} S(\Lambda, \bar{q})\,dC + \int_{C_*+\Delta C}^{C_o} S(\Lambda\,,\, q_o + \Delta q)\,dC \leq 0 \tag{4.2}$$

여기서, $q_o < \bar{q} < \tilde{q}$.

식(4.2)에 Δq 의 1차 까지의 근사치를 적용하면, 식(4.2)는 아래와 같이 전개된다.

$$\int_{C_o}^{C_*} S(\Lambda, q_o)\,dC + \int_{C_*}^{C_o} S(\Lambda, q_o + \Delta q)\,dC + O(\Delta q) \tag{4.3a}$$

$$= \int_{C_o}^{C_*}\left[\frac{\partial\Psi(\Lambda, q_o)}{\partial C} - \frac{\partial\Psi(\Lambda, q_o + \Delta q)}{\partial C}\right]dC \tag{4.3b}$$

$$= -\int_{C_o}^{C_*}\left[\frac{\partial^2\Psi(\Lambda, q_o)}{\partial C\,\partial q}\,\Delta q\right]dC \geq 0 \tag{4.3c}$$

따라서, 식(4.3c)로 부터,

$$-\frac{\partial}{\partial q}\left[\Psi(\Lambda^*,q_0)-\Psi(\Lambda_0,q_0)\right]\Delta q \ge 0 \qquad (4.4)$$

$\Lambda_* = \Lambda_0 + \Delta\Lambda$ 로 놓으면, 식(4.4)로 부터 다음과 같은 변수들간의 제한조건식을 얻는다.

$$\dot{\Lambda}\,\Phi\,\dot{q} \le 0 \qquad (4.5)$$

여기서,

$$\Phi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial\Lambda\,\partial q} \qquad (4.6)$$

5. Normality 조건

설명의 복잡성을 피하기 위해 편의상 $\dot{\theta} = 0$ 인 경우를 생각하기로 한다.
식(4.5)으로 부터, loading 또는 netural loading (식(2.3a) 또는 식(2.3b)) 일때 아래의 관계식을 얻을수 있다.

$$\dot{\Lambda}\,\Phi\,\dot{q} = -\gamma\,\hat{g} \quad (g = 0, \hat{g} \ge 0 \text{일때}) \qquad (5.1)$$

여기서, γ 는 양의(positive) 스칼라 함수이다.
윗식을 다시 쓰면,

$$\Phi\,\dot{q} = -\gamma\frac{\partial g}{\partial C} \qquad (5.2)$$

식(4.5) 와 식(5.2)로 부터, $\dot{\Lambda}$ 와 $-\gamma\hat{g}$ 이 이루는 각도가 90° 보다 크다는 것을 알수 있다.

6. 탄소성 강도 매트릭스 형성

앞절에서 처럼 $\dot{\theta} = 0$ 인 경우를 고려하면,

$$\dot{S} = \frac{\partial S}{\partial C}\dot{C} + \frac{\partial S}{\partial q}\dot{q} \qquad (6.1a)$$

$$= \frac{\partial^2\Psi}{\partial C\,\partial C}\dot{C} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial q\,\partial C}\dot{q} \qquad (6.1b)$$

식(6.1b) 에서 첫번째 항은 $\dot{S}$ 에 대한 탄성의 영향을 나타내고, 두번째 항은 소성적인 영향을 나타낸다.

식 (2.8),(2.9),(5.1),(5.2) 로 부터

$$\dot{q} = -\langle \hat{g} \rangle \frac{\Phi^{-1}\dfrac{\partial g}{\partial C}}{\dfrac{\partial g}{\partial q}\,\Phi^{-1}\,\dfrac{\partial g}{\partial C}} \qquad (6.2)$$

식 (6.1b)와 식(6.2)로부터,

$$\dot{S} = \left[\frac{\partial\Psi}{\partial C\,\partial C} - \left(\frac{\partial g}{\partial C}\otimes\frac{\partial g}{\partial C}\right)\Big/\left(\frac{\partial g}{\partial q}\,\Phi^{-1}\frac{\partial g}{\partial C}\right)\right]\dot{C} \qquad (6.3)$$

또는,

$$\dot{S} = C^{ep}\,\dot{E} \qquad (6.4)$$

윗식에서 C^{ep} 는 탄소성 강도 매트릭스(Elasto-Plastic Tangent Moduli)를 의미한다. 매트릭스 C^{ep} 를 첨자 형태로 다시 쓰면,

$$C^{ep}_{ABCD} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial C_{AB}\,\partial C_{CD}} - \left(\frac{\partial g}{\partial C_{AB}}\,\frac{\partial g}{\partial C_{CD}}\right)\Big/\Phi^{-1}_{PQRS}\,\frac{\partial g}{\partial q_{PQ}}\,\frac{\partial g}{\partial C_{RS}} \qquad (6.5)$$

7. 맺는 말

이상에서 유한요소법에 의한 탄소성 문제를 해결하기 위해 중요한 요소인 변형율과 응력의 관계(constitutive relationship)에 대한 식을 변형율 공간(Finite Strain Space)에서 유도하였다. 항복면을 나타내는 함수 g 는 Helmholtz free energy ψ 를 일반적으로 사용하므로, 기지의 ψ 에 대한 탄소성 강도 매트릭스를

결정할 수 있다. 식 (6.3) 또는 식 (6.5)에서 제안한 탄소성 강도 매트릭스는 변형율 공간에서 consistency condition, Naghdi-Trapp의 work assumption, 열역학적인 제한조건, Normality조건을 만족한다.

참고 문헌

1. A. Phillips and P.L. Sierakowski,'On the concept of the yield surface',Acta Mech.,1 (1965)
2. M.A. Eisenberg and A. Phillips, 'A theory of plasticity with non-coincident yield and loading surfaces,Acta Mech.,11,247-260(1971)
3. J.Casey and P.M. Naghdi,'Further constitutive results ind finite plasticity', Q.J. Mech. Appl.Math.37,231-259(1984)
4. A.E.Green and P.M. Naghdi,'A thermodynamics of elastic plastic continua',proceeding IUTAM symp. on Irreversible Aspects of Continuum Mechanics and Transfer of Physical Characteristic in Moving Fluids (Eds. H. Parkus and L. I. Sedov),Spring-Verlag,117 -131 (1966)
5. B.D.Coleman and W.Noll, 'The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity', Arch. Rat. Mech. Anal.,13,167-178 (1963)