

특이성을 갖는 비정형 평판의 p-version 유한요소해석

P-version finite element analysis of the irregular shaped plates with singularities

禹 光 性\*  
Woo, Kwang Sung

ABSTRACT

The elastic analysis of floor slabs using the p-version of finite element method encounters stress singularities at certain types of reentrant corners, openings and cut-outs. Results obtained using the computer code based on C<sup>0</sup>-hierarchical plate element formulated by Reissner-Mindlin theory are compared with theoretical predictions and with computational results reported in the literature. The convergence rate of h-, p- and hp-version can be estimated on the basis of the energy norm in global sense. If accuracy in terms of the number of degrees-of-freedom is used as a criterion, the solutions presented here are the most efficient that have been published up to date. Examples are the rhombic plate with the obtuse angle of 150° and the square plate with cut-outs.

1. 서론

건물의 슬래브는 종종 비정형단면 즉, 일반적으로 쓰이는 사각형 또는 원형이외에 美觀과 設計상의 이유로 슬래브에 開口(openings), 損傷단면(cut-outs), 凹形모서리(reentrant corners) 등을 갖게되어 이로 인한 심한 應力集中을 수반하게된다. 이를 應力特異性(stress singularity)이라 하고 응력특이점이 일어나는 점을 特異點(singular point)이라 한다. 이런 비정형평판을 고전적 평판이론으로 해석하는데는 많은 어려움이 있으므로 많은 유한요소모델이 최근까지 연구개발되었으나 解가 수렴하지 않거나 수렴속도가 느린 결점을 보여왔다. 그 이유는 수렴속도는 특이점 근처에서의 해의 정확도에 지배되는데 종래의 유한요소모델은 특이거동을 표현하는데 적합하지 않기 때문이다. 본 연구에서는 90° 凹形모서리(reentrant corner)를 갖는 정방형평판의 사각형開口 모서리점과 150° 마름모꼴평판의 둔각꼭지점(obtuse vertex)에서 특히 발생하는 특이거동의 이론적규명과 새로 제안되는 p-version 유한요소법이 종래의 유한요소 접근방법에 비해 꼭지각이 예각에서 둔각으로, 혹은 원활영역(smooth domain)에서 특이점으로 전이함에 따라 응력함수가 원활함수(smooth function)에서 특이함수(singular function)로 변하는 현상을 더욱 효율적으로 정식화할 수 있는가를 국부적차원(local sense)으로 임의의 점에서의 처짐량과 모멘트값의 비교로 알아봄과 동시에 전체적차원(global sense)으로 자유도증가에 따른 포텐셜에너지의 近似解와 正解에 대한 상대오차개념인 에너지노름으로 종래의 유한요소법(h-version)과 p-version과의 수렴성 비교를 수행하여 그 우월성을 입증해 보이는 것이 본 연구의 목적이라 하겠다.

2. 모서리 특이성(Corner Singularity)

모서리각  $\alpha$ 를 갖는 비원활경계(non-smooth boundary)의 영역  $\Omega$ 가 Fig.1에 나타나 있다. 특이점 P를 포함하는 평면응력이나 평판힘문제의 경우 支配방정식(governing equation)의 일반해는 아래식과 같다.

$$u(r,\theta) = r^{1/\alpha}F(\theta) + G(r,\theta) \quad \alpha > 0 \quad (1)$$

특이점 P를 포함하는  $u(r,\theta)$ 는 변위벡터이고,  $r$ 과  $\theta$ 는 P점을 중심으로 하는 극좌표이고  $G(r,\theta)$ 는 해의 원활함수(smooth function)이고  $F(\theta)$ 는 특이함수(singular function)를 나타낸다. 만약  $\alpha$ 가 凸형(convex)이 아니면 즉,  $\alpha > 1$  (혹은  $1/\alpha$ 이 분수)일때 변위벡터의 1차미분값은  $r$ 이 0에 접근함에 따라 무한대로 된다. 내부모서리각이  $2\pi$ 일 경우는 균열문제가 되며 P점은 龜裂先端(crack tip)을 나타내며 變으로 균열문제는  $r^{1/2}F(\theta)$ 형의 특이함수를 갖게된다. 平板문제의 경우는 Williams에 의해 기하형상과 경계조건에 따른 특이성연구가 수행되었다. 즉, 모서리각을 갖는 부채꼴형상의 평판을 독립적으로 떼어내서 다양한 경계조건을 적용시켜 그 組合에 따른 응력특이성문제가 연구되었고 최근에 Hruday에 이르기까지 많은 연구가 되어 기하형상으로는  $\theta$ 가  $\pi/2$ 보다 클 경우 경계조건으로는 반경방향(radial edges)이 자유단-자유단의 경우와 고정단-고정단을 제외한 경계조건의 組合에는 강한 모멘트특이성이 발생한다는 결론을 내렸다. 이로부터  $\theta$ 가  $\pi/2$ 보다 큰 경우인 마름모꼴평판( $\theta=5\pi/6$ )과 開口를 갖는 평판( $\theta=3\pi/2$ )은 각각 모서리점에서 모멘트특이성(moment singularities)이 발생됨을 예측할 수 있다.

\*정회원, 전남대학교 토목공학과, 전임강사

### 3. 에너지노름에 의한 수렴성 (Convergence in Energy Norm)

수학적인 오차해석은 에너지노름을 사용하여 正解와 近似解사이의 상대오차의 제곱근으로 아래와 같이 표현된다.

$$\|e\|_E = \sqrt{\frac{U_{\text{exact}} - U_{\text{approx}}}{U_{\text{exact}}}} \quad (2)$$

한편 h-extension의 경우 자유도 N이 均等(혹은 類似均等)要素分割(uniform or quasi-uniform mesh refinement)을 통해 正解에 수렴할 때  $\|e\|_E$ 는 아래와 같이 표현된다.

$$\|e\|_E < \frac{K_1}{N^{1/2 \min(\alpha, p)}} \quad (3)$$

여기서  $K_1$ 은 상수값이고 매개변수  $\alpha$ 는 식(1)에서 사용된 것처럼 해석하고자 하는 문제의 특이성 정도에 비례한다. 일반적으로  $\alpha$ 는 1/2에서 1 사이로 변한다.  $p$ 는 형상함수의 次數를 나타낸다. p-extension의 경우 要素가 고정되고  $p$ 의 次數가 점진적으로 증가될 때 특이점이 요소절점에 위치하면  $\|e\|_E$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\|e\|_E < \frac{K_2}{N^{\alpha - \epsilon}} \quad \epsilon > 0 \quad (4)$$

여기서  $K_2$ 는 상수이다. 수치해석과 이론적 결과는 극심한 특이성이 발생할 경우 자유도증가에 따른 解의 수렴속도는 p-extension이 h-extension의 2배가량 빠름을 보이고 있다. 더우기 적절한 요소분할과  $p$ 次數의 분배를 통하여 훨씬 빠른 수렴속도를 얻을 수 있는데 이와 같은 접근방법이 h-p extension 유한요소법이며 에너지노름의 오차한계는 다음과 같다.

$$\|e\|_E < \frac{K_3}{N^\beta} \quad (5)$$

여기서  $K_3$ 는 상수이고  $\beta$ 는 임의의 큰 값으로 여러 因子에 의해 결정된다. 이와 같이 서로 다른 3가지 방법을 공학문제에 적용한 例가 Fig. 2에 나타나 있으며 각각의 수렴속도의 비교를 쉽게 할 수 있는데 h-p extension의 경우가 가장 빠른 속도로 수렴하고 있다.

## 4. 解析例

### 4.1 마름모꼴 평판 (Rhombic Plate)

Fig. 3과 같이 150° 둔각을 갖는 마름모꼴 평판이 단순지지되었고 등분포하중  $q$ 가 작용하고 있다. 이 문제의 正解(exact solution)는 알 수 없으나 비교목적으로 충분한 정확도를 갖는 Morely의 해는 다음과 같다.

$$w = w_0 + w_1 \quad (6)$$

여기서,

$$w_0 = \frac{qr^4}{64D} \left\{ 1 - \frac{4}{3} \frac{\cos 2\theta}{\cos 5\pi/6} + \frac{1}{3} \frac{\cos 4\theta}{\cos 5\pi/3} \right\} \quad (7)$$

$$w_1 = \frac{q}{D} \sum_m (a_m + b_m r^2) r^{6(2m-1)/5} \cos \frac{\pi}{5}(2m-1)\theta \quad (8)$$

이 식에 의하면 마름모꼴 평판의 중앙에서의 최대처짐은 다음과 같다.

$$w_c = 0.408 \times 10^{-3} \frac{qa^4}{D} \quad (9)$$

한편, 종래의 h-version 유한요소해석은 Conforming 요소를 사용한 Sander의 해는 최대처짐이 Morley의 해보다 17.5%나 작은 값을 보였고 Argyris와 Lochner 128개 TUBAC6(fifth-order) 요소를 사용하여 Morley 해의 2% 오차를 보았다. 그러나 p-version 모델( $p=10$ , 3개 요소)은 Morely와 비교하여 1%이내의 오차한계를 보임을 Fig. 6에서 알 수 있다. 그리고 둔각꼭지점(obtuse vertex)에서 평판중앙까지의 주모멘트(principal moment)의 변화가 Hughes와 Morley의 결과치와 비교되어 Figs. 4, 5에 도시되어 있다. p-version 모델의  $p$ 가 증가함에 따른 수렴성이 Figs. 6에 나타나 있다.

### 4.2 손상단면을 갖는 정방형 평판 (Square Plate with Cut-outs)

사각형 開口가 있는 정사각형 평판이 아래와 같이 서로 다른 조합의 경계조건을 갖고 있으며 Fig. 7에 본 연구에서 사용되는 유한요소모델과 더불어 그 형상이 나타나 있다.

- 1) 내측 자유단, 외측 단순지지
- 2) 내측 고정단, 외측 자유단
- 3) 내측 단순지지, 외측 자유단

등분포하중이 재하되고 있으며 각각의 경우마다 평판의 대칭성으로 1/4평판을 고려하고 있으며 2개 요소와 3개 요소로 나누어 각각의 결과를 비교하고자 한다. Hruday에 의한 수치해석 결과가 첫째 문제의 경우 내측자유단의 중점과 꼭지점, 둘째 문제의 경우 외측자유단의 중점과 꼭지점에서의 무차원 標準變位(normalized displacements)값이 Table 1에 나타나 있다. 한편, p-version 유한요소해석에 의한 결과가  $p=6$ 에서  $p=10$ 까지 단순증가됨에 따른 수렴성이 Table 2에 나타나 있고 그에 대한 그림이 Fig. 8에 표시되어 있다.  $p=10$ 을 사용하였을 때 p-version 유한요소해석에 의한 모멘트장(moment field)의 특이 거동이 각각의 경우 Figs. 9, 10, 11에  $y=0.25L$ 일 때  $x$ 축의 변화에 따라 표시되어 있다. 각각의 경우 꼭지점부근에서의 모멘트특이성이 앞에서 예측한 대로 입증되고 있음을 보여준다.

## 5. 결론

새로 제안되는 P-Version 유한요소법에 의한 2종류의 비정형평판이 해석되었다. 정확도면에서는

이론치와 기준치의 논문에 발표된 결과와의 비교에서 1% 안팎의 오차를 보였고 수렴속도면에서는 2배가량 차이를 보였다. 凹形 모서리점과 둔각꼭지점에서는 예측한대로 모멘트 특이성을 보였고 마름모꼴 평판의 경우 둔각꼭지점에서 x,y축 방향의 모멘트는 Morley와 같이 서로다른 부호를 보였다.

6. 참고문헌

- (1) Morley, L.S.D., "Bending of a simply supported rhombic plate under uniform normal loading", Quart. J. Mech. Applied Math., Vol. XV, Pt. 4, 1962
- (2) Hrudefy, T.M., Hrabok, M.M., "Singularity Finite Elements for Plate Bending", J. Eng. Mech., Vol. 112, No. 7, 666-681, 1986
- (3) Szabo, B.A., "Estimation and Control of Error Based on p-Convergence", Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations, Edited by I. Babuska, O.C. Zienkiewicz, John Wiley & Sons Ltd., 1986
- (4) Wang, D.W., Katz, I.N., Szabo, B.A., "h- and p-version finite element analyses of a rhombic plate", Int. J. Numer. Meth. Eng. Vol. 20, 1399-1405, 1984
- (5) Hughes, T.J.R., Cohen, M., "The Heterosis Finite Element for Plate Bending", Computers & Structures, Vol. 9, 445-450, 1978
- (6) Woo, K.S., "High precision analysis of plates and cylindrical shells in the presence of singularities by the p-version of F.E.M.", Ph.D. Dissertation, Vanderbilt University, 1988

Table 2

CONCENTRIC SQUARE PLATE BY P-VERSION WITH 3-ELEMENTS

P-level	Simply Supported Outer Edge Free Inner Edge		Free Outer Edge Clamped Inner Edge		Free Outer Edge Simply Supported Inner Edge	
	Displ 100 (wD/q <sub>0</sub> L <sup>4</sup> )	Displ 100 (wD/q <sub>0</sub> L <sup>4</sup> )	Displ 100 (wD/q <sub>0</sub> L <sup>4</sup> )	Displ 100 (wD/q <sub>0</sub> L <sup>4</sup> )	Displ 100 (wD/q <sub>0</sub> L <sup>4</sup> )	Displ 100 (wD/q <sub>0</sub> L <sup>4</sup> )
	Midside of inner edge	Corner of inner edge	Midside of outer edge	Corner of outer edge	Midside of outer edge	Corner of outer edge
P=6	0.31920	0.22862	0.046215	0.12764	0.093228	0.14007
P=7	0.31993	0.22953	0.046417	0.13209	0.098611	0.15038
P=8	0.32073	0.23009	0.047050	0.13491	0.10441	0.16084
P=9	0.32073	0.23057	0.047112	0.13721	0.10950	0.17053
P=10	0.32112	0.23112	0.047281	0.13897	0.11480	0.18015

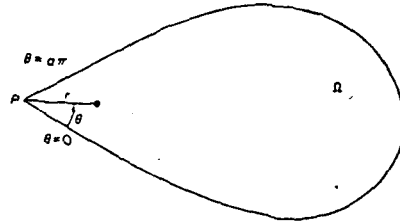


Fig.1 A domain with corner angle  $\alpha\pi$

Table 1

DISPLACEMENTS: CONCENTRIC SQUARE PLATE UNDER UNIFORM LOAD BY HRUDEY

Mesh	Simply Supported Outer Edge Free Inner Edge		Free Outer Edge Clamped Inner Edge		Free Outer Edge Simply Supported Inner Edge	
	Displ 100 (wD/q <sub>0</sub> L <sup>4</sup> )	Displ 100 (wD/q <sub>0</sub> L <sup>4</sup> )	Displ 100 (wD/q <sub>0</sub> L <sup>4</sup> )	Displ 100 (wD/q <sub>0</sub> L <sup>4</sup> )	Displ 100 (wD/q <sub>0</sub> L <sup>4</sup> )	Displ 100 (wD/q <sub>0</sub> L <sup>4</sup> )
	Midside of inner edge	Corner of inner edge	Midside of outer edge	Corner of outer edge	Midside of outer edge	Corner of outer edge
Regular rectangular elements						
2x2	0.30716	0.21169	0.043255	0.12460	0.075216	0.13242
4x4	0.31539	0.22293	0.045446	0.12941	0.084648	0.14515
6x6	0.31729	0.22609	0.046254	0.13197	0.089917	0.15202
8x8	0.31811	0.22749	0.046608	0.13334	0.10133	0.15672
10x10	0.31856	0.22826	0.046799	0.13416	0.10290	0.15884
12x12	0.31883	0.22874	0.046917	0.13471	0.10401	0.16079
14x14	0.31902	0.22907	0.046997	0.13510	0.10485	0.16288
16x16	0.31915	0.22930	0.047054	0.13538	0.10550	0.16345
Regular rectangular elements and one regular L-shape element						
3x3	0.32444	0.23822	0.051007	0.16317	0.19634	0.22071
5x5	0.32211	0.23454	0.049338	0.15106	0.18719	0.27395
7x7	0.32126	0.23307	0.048755	0.14656	0.18524	0.25306
9x9	0.32083	0.23232	0.048436	0.14423	0.1824	0.24062
11x11	0.32058	0.23188	0.048235	0.14281	0.18354	0.23222
13x13	0.32042	0.23159	0.048097	0.14155	0.18014	0.22610
15x15	0.32031	0.23139	0.047996	0.14117	0.18754	0.22141
17x17	0.32023	0.23124	0.047920	0.14065	0.18547	0.21788

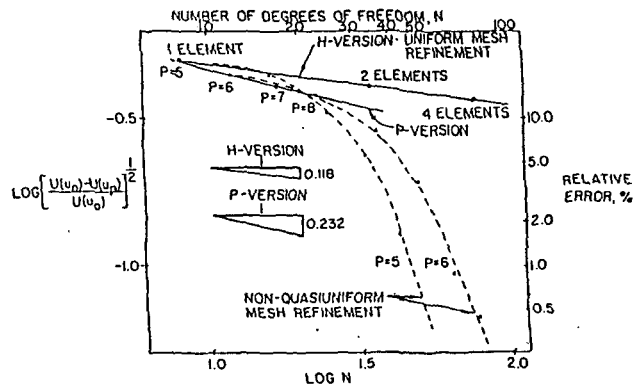


Fig.2 Relative Error in Energy norm vs. NDOF (Rhombic Plate Under Uniform Load)

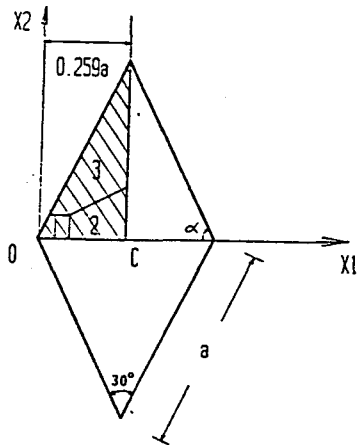


Fig.3 Rhombic Plate Under Uniform Load

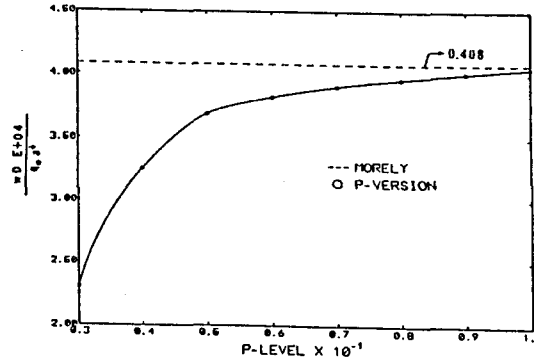


Fig.6 Convergence of displacement with different p-levels

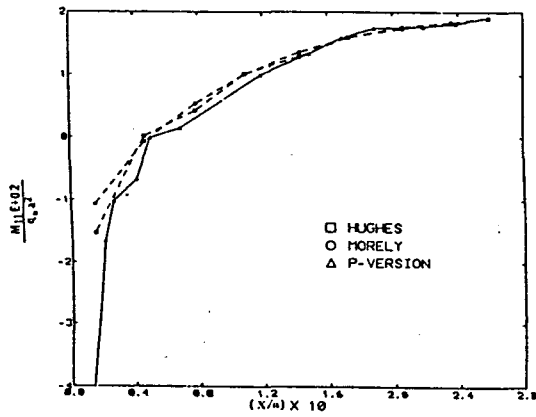


Fig.4 Bending moment  $M_{11}$  for rhombic plate

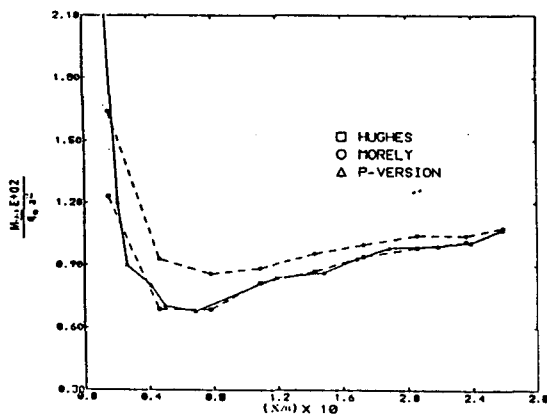


Fig.5 Bending moment  $M_{22}$  for rhombic plate

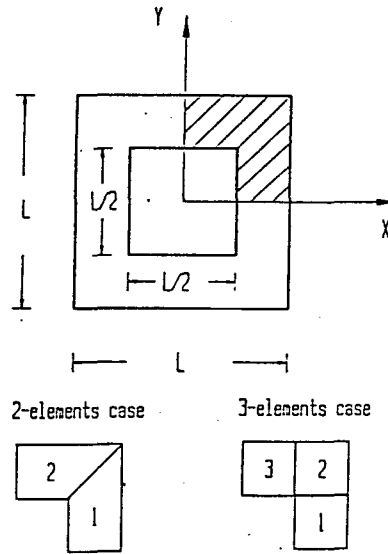


Fig.7 Concentric Square Plate Under Uniform Load

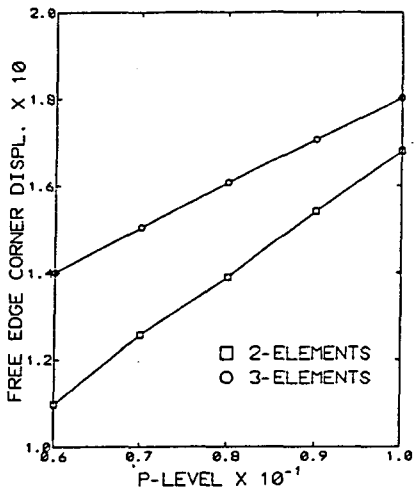


Fig. 8 Displacement Convergence ; Simply Supported Inner Edge, Free Outer Edge

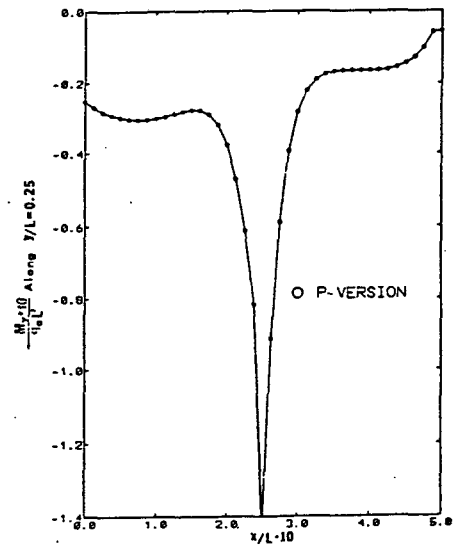


Fig. 10 Bending Moment  $M_y$ ; Clamped Inner Edge, Free Outer Edge

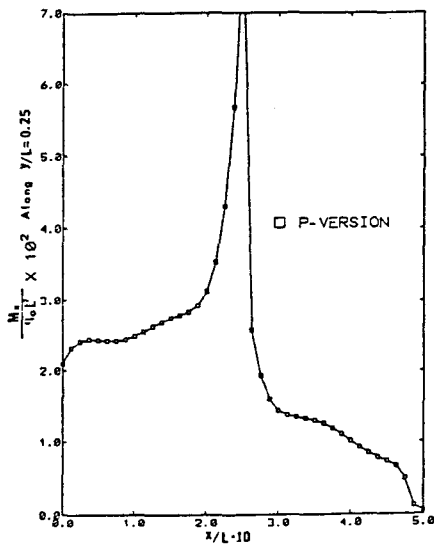


Fig. 9 Bending Moment  $M_x$ ; Free Inner Edge, Simply Supported Outer Edge

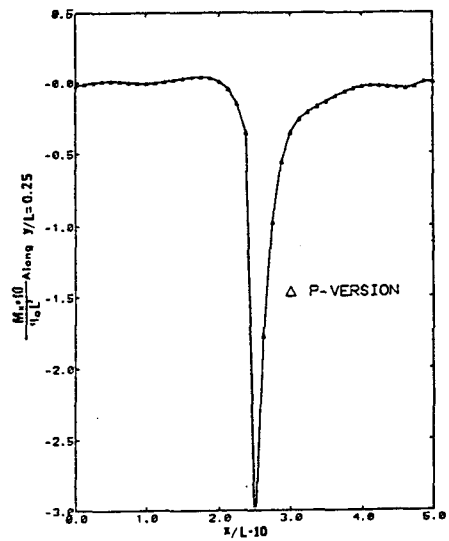


Fig. 11 Bending Moment  $M_x$ ; Simply Supported Inner Edge, Free Outer Edge