

개선된 degenerated 쉘요소를 사용한 쉘구조의 비선형해석

Nonlinear Analysis of Shell Structures by Improved Degenerated Shell Element

최창근* 오유승운**
Choi Chang-Koon Yoo Seung-Woon

ABSTRACT

The paper is concerned with the elasto-plastic and geometrically nonlinear analysis of shell structures using an improved degenerated shell element. In the formulation of the improved degenerated shell element, an enhanced interpolation of transverse shear strains in the natural coordinate system is used to overcome the shear locking problems; the reduced integration technique in in-plane strains is applied to avoid membrane locking behavior; selective addition the nonconforming displacement modes improve the element performances. This element is free of serious locking problems and undesirable compatible or commutable spurious kinematic deformation modes and passes the patch tests. An incremental total Lagrangian formulation is presented which allows the calculation of arbitrarily large displacements and rotations. The resulting nonlinear equations are solved by the Newton-Raphson solution scheme. The versatility and accuracy of this improved degenerated shell element are demonstrated by solving several numerical examples.

1. 서론

쉘 구조는 그 자체의 구조역학적 효율성과 미학적 특성때문에 여러분야의 공학적 구조에 가장 많이 사용되는 구조형태 중의 하나이다. 이러한 구조형태의 해석에는 현재 가장 보편화된 수치해석 방법인 유한요소법이 일반적으로 많이 사용되고 있다¹⁾. Ahmad²⁾ 등이 처음 제안한 degenerated 쉘유한요소 접근방법은 수학적으로 증명되고 비선형 해석에로의 확대가 용이하고³⁾, 그 효율성도 양호 하기 때문에 이 접근방법에 의한 쉘 유한요소 개발연구는 많은 연구자들에 의해 계속 수행되고 있다. 그러나 많은 연구결과 이 degenerated 쉘유한요소는 다소 두꺼운 쉘의 경우에만 우수한 결과를 주는 것으로 알려졌다. 즉 쉘의 두께가 감소함에 따라 수렴성이 떨어지고, 매우 얇은 경우에는 사용된 요소수에 상관없이 정확한 해에 수렴하지 못하는 현상이 발생한다. 이와같은 바람직하지 못한 현상을 locking현상이라고 하는데, 이는 원래의 degenerated 쉘요소가 휨거동에 영향을 미치지않고 미소한 막변형도(membrane strain)와 전단변형도(transverse shear strain)를 나타낼 수 없기 때문이다⁵⁾. 이와같은 문제점을 해결하기 위하여 많은 기법들이 적용되어 왔다.

본 연구에서 사용된 개선된 degenerated 쉘요소는 shear locking현상을 제거 하기 위해 가장 효과적인 가정된 전단변형도장(shear strain fields)를 대치 사용하고, 막변형도에 감차적분기법을 사용함으로써 membrane locking현상을 제거하며, 쉘요소 전체의 거동을 유연하게 하기위해 비적합변위형을 선택적으로 추가한다¹³⁾. 이와같은 개선된 degenerated 쉘요소는 쉘의 선형해석에서 수치시험을 결과 shear 또는 membrane locking현상이 완전히 제거되며, 전달가능한 거짓 영에너지모드(commutable spurious zero energy mode)도 발생하지 않으며 수렴성이 양호하였다¹³⁾.

본연구에서는 이와같이 선형해석부분에서 우수한 결과를 보여준 개선된 degenerated 쉘유한요소를 쉘의 재

료적 비선형해석과 기하학적 비선형해석으로 그 적용범위를 확장한다. 쉘의 기하학적 비선형거동을 total Lagrangian수식화를 사용하고, 비선형 수치해석은 Newton-Raphson반복해법을 사용하여 쉘의 비선형 해석을 행한다.

2. Degenerated 쉘유한요소

본연구의 곡면 쉘요소의 정형화에는 어떠한 특별한 쉘이론에 구애됨이 없이 다음과 같은 기본적인 가정만을 바탕으로한다. 첫째는 변형전에 중립곡면에 수직인 직선면은 변형후에도 직선을 유지한다. 이 가정은 많은 연구자들이 선형뿐만 아니라 비선형해석에서도 많이 사용되어 왔다^{3,4)}. 둘째는 중립면에 수직인 응력성분은 없다고 생각한다. degenerated 쉘요소에서 각각의 절점에서는 3개의 이동변위(u,v,w)와 2개의 회전변위(α,β)를 갖는다. 이동변위와 회전변위는 각각 독립적으로 생각하기 때문에 전단변형이 허용된다.

2.1 쉘요소의 형상화

Degenerated 쉘요소의 정형화에는 그림1과 같이 전체좌표계, 절점좌표계, 곡면좌표계 및 국부좌표계등을 함께 사용한다. 쉘의 기하학적형상은 중립면의 절점좌표와 중립면에 수직인 벡터들을 사용하여 표시할수 있다. 요소 내부의 직교좌표계는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n N_k(\xi, \eta) \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^n N_k(\xi, \eta) \frac{h_k}{2} \begin{bmatrix} \bar{v}_{3k}^x \\ \bar{v}_{3k}^y \\ \bar{v}_{3k}^z \end{bmatrix} \quad (1)$$

여기서 n은 절점수이며 $N_k(\xi, \eta)$ 는 중립면의 형상함수, h_k 는 k절점의 쉘두께이며, ξ, η, ζ 는 고려하는 점의 곡면좌표이며, $v_3 = x_{top} - x_{bot}$ 으로 정의되며, \bar{v}_3 는 v_3 의 단위벡터이다. 또한 요소의 변위장은 중립면에 위치한 각각의 절점에서 전체좌표계 방향의 변위자유도와 쉘의 중립면의 각각의 절점에서 정의되는 절점좌표계에 관한 회전자유도등 모두 5개의 절점자유도로써 다음과 같이 표현할수 있다.

* 정희원, 회장, 한국과학기술원 교수

** 정희원, 한국과학기술원 박사과정

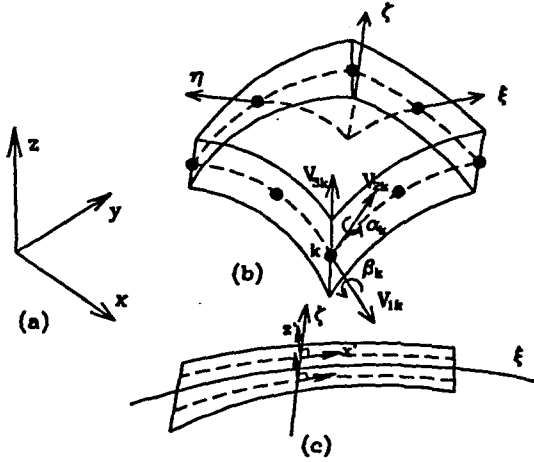


그림 1. Degenerated 쉘요소에서의 좌표계. a)전체좌표계. b)절점 및 곡면좌표계. c)국부좌표계.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n N_k(\xi, \eta) \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^n N_k(\xi, \eta) \zeta b_k \quad (2)$$

여기서 b_k 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$b_k = \frac{h_k}{2} (\bar{v}_3 - \bar{v}_3) \quad (3)$$

위의 식에서 \bar{v}_3 벡터는 v_3 의 변형된 후의 상태를 나타낸다. 만약 v_2 벡터축으로 α 회전변위가 발생하고, v_1 벡터축으로 β 회전변위가 발생하면서 v_3 벡터가 \bar{v}_3 벡터로 변형한다면 b_k 는 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$b_k = \frac{h_k}{2} [\sin\alpha \cos\beta \bar{v}_1 + \sin\beta \bar{v}_2 + (\cos\alpha \cos\beta - 1) \bar{v}_3] \quad (4)$$

2.2 유한요소 방정식

비선형해석에서의 비선형효과는 응력과 변형도의 기준좌표에 대한 표현관계와 고차항의 고려에 의한 비선형효과로써 기준좌표의 선택에 따라 두가지로 나누어진다. 즉, 초기모양을 기준으로 하는 total Lagrangian수식과 증분이 시작할때의 모양을 기준으로 하는 updated Lagrangian수식으로 구분된다. 본연구에서는 total Lagrangian수식을 이용 하였다. 쉘두께방향(즉 z'방향)으로 응력이 0이라는 가정을 간단히 수용하기 위해서는 변형도항을 국부좌표계로 표현하는 것이 편리하다. 본연구에서는 total Lagrangian수식화에서 Green-Lagrangian 변형도와 Piola-Kirchhoff응력을 사용한다. 미소 증분응력과 미소 증분변형도 관계는 재료성질 행렬 D로써 다음과 같이 나타낼수 있다.

$$\delta\sigma = D \delta\epsilon \quad (5)$$

여기서

$$\sigma = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}]^T \quad (6)$$

$$\epsilon = [\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}]^T \quad (7)$$

국부좌표계에 의한 Green-Lagrangian변형도는 다음과 같이 표현 가능하다.

$$\epsilon = \epsilon^o + \epsilon^L \quad (8)$$

여기서 ϵ^o 는 선형부분이고 ϵ^L 은 비선형부분이며, 각각의 경우는 다음과 같이 나타낼수 있다.

$$\epsilon^o = \begin{bmatrix} u'_{,x} \\ v'_{,y} \\ u'_{,y} + v'_{,x} \\ u'_{,x} + w'_{,x} \\ v'_{,x} + w'_{,y} \end{bmatrix}, \epsilon^L = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}[(u'_{,x})^2 + (v'_{,x})^2 + (w'_{,x})^2] \\ \frac{1}{2}[(u'_{,y})^2 + (v'_{,y})^2 + (w'_{,y})^2] \\ u'_{,x}u'_{,y} + v'_{,x}v'_{,y} + w'_{,x}w'_{,y} \\ u'_{,x}u'_{,x} + v'_{,x}v'_{,x} + w'_{,x}w'_{,x} \\ u'_{,y}u'_{,y} + v'_{,y}v'_{,y} + w'_{,y}w'_{,y} \end{bmatrix} \quad (9)$$

또한, Green-Lagrangian변형도는 변위의 미분항으로 나타낼 수 있다. 즉, E를 다음과 같이 정의하자.

$$E = [E_x, E_y, E_z]^T \quad (10)$$

여기서

$$E_x = [u'_{,x}, v'_{,x}, w'_{,x}]^T \quad (11a)$$

$$E_y = [u'_{,y}, v'_{,y}, w'_{,y}]^T \quad (11b)$$

$$E_z = [u'_{,z}, v'_{,z}, w'_{,z}]^T \quad (11c)$$

그러면

$$\epsilon^o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} E = H E \quad (12)$$

$$\epsilon^L = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} E_x^T & 0 & 0 \\ 0 & E_y^T & 0 \\ E_x^T & E_y^T & 0 \\ E_x^T & 0 & E_z^T \\ 0 & E_y^T & E_z^T \end{bmatrix} E = \frac{1}{2} A E \quad (13)$$

여기서 H는 일정한 상수 행렬이며, A는 변위자유도 u에 종속함수이다.

위의 Green-Lagrangian변형도의 선형, 비선형 부분에 대해 변분을 취하면 다음과 같다.

$$d\epsilon = d\epsilon^o + d\epsilon^L = H dE + A dE \quad (14)$$

여기서 dE는 다음과 같다.

$$dE = G du \quad (15)$$

그러므로 변형도의 변분은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$d\epsilon = B du \quad (16)$$

여기서 B는 다음과 같다.

$$B = B^o + B^L = [H + A] G \quad (17)$$

2.3 증분 평형 방정식

정적상태에서 평형방정식(equation of static equilibrium)은 다음과 같이 나타낼 수 있다¹⁾.

$$\Psi = R - \int B^T \sigma dV = R - P \quad (18)$$

여기서 잔여치 Ψ 는 절점평형하에 가정된 변위장을 만족시키기 위한 절점력으로 볼수 있으며, R 는 외력에 의한 절점력이다. 위의 식은 변위벡터 u 에 대해 직접적으로 풀수 없으므로 위의 평형방정식을 증분형태로 표시한다. 위의 식에 변분을 취하면 다음과 같다.

$$d\Psi = dR - \int dB^T \sigma dV - \int B^T d\sigma dV \quad (19)$$

$$= dR - \int B^T d\sigma dV - \int G^T dA^T \sigma dV - \int dG^T [H+A]^T \sigma dV$$

여기서

$$\int B^T d\sigma dV = \int B^T DB dV du = K_s du \quad (20)$$

$$\int G^T dA^T \sigma dV = \int G^T SG dV du = K_{\sigma 1} dq \quad (21)$$

$$\int dG^T [H+A]^T \sigma dV = K_{\sigma 2} du \quad (22)$$

여기서

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_x I & \tau_{xy} I & \tau_{xz} I \\ \tau_{xy} I & \sigma_y I & \tau_{yz} I \\ \tau_{xz} I & \tau_{yz} I & 0 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

그러므로 평형방정식 (18)의 증분 평형방정식은 다음과 같이 표현 가능하다.

$$d\Psi = dR - [K_s + K_{\sigma 1} + K_{\sigma 2}] du = dR - K du \quad (24)$$

3. 감차 적분방법

요소의 강성행렬 계산시 감차적분의 사용은 과도한 전단 및 막에너지의 발생을 억제시키는 효과를 가져다준다⁷⁾. 2차요소(quadratic element)의 정사적분점인 $\xi = \sqrt{0.6}$ 에서 평가되는 전단 및 막 변형도는 과도한반면에 감차적분점인 $\xi = \sqrt{1/3}$ 에서는 올바른 전단 및 막 변형도의 평가가 가능하다. 따라서 휨거동에 영향을 미치지 않고 미소한 막 변형도와 전단 변형도를 나타낼수 없기때문에 발생하는 shear와 membrane locking현상을 감차적분방법의 사용으로 일부 해결하였다.

이와같은 감차적분의 사용은 요소의 정확도를 증가시키면서 강성행렬의 계산시간을 감소시키는 두가지 효과를 가져다준다. 그러나 감차적분방법의 사용은 또다른 문제를 발생시킨다. 8절점요소의 경우에는 감차적분방법의 사용에도 불구하고 shear locking현상이 존재하고, 4절점요소와 9절점요소에서는 감차적분으로인해 전달가능한 거짓 영에너지모드가 발생되어 해석결과를 무용화시킬 위험성을 초래한다. 따라서 전달가능한 거짓 영에너지모드의 발생을 억제하기위해 일률적인 감차적분 대신에 선택적으로 감차적분을 행하는 방법도 제안되었다. 또다른 방법으로서 감차적분을 행함으로써 발생하는 전달가능한 거짓 영에너지모드를 안정화시키는 방법이었다. 이방법은 전체 강성행렬에대해 감차적분을 행하고 이것에 거짓 영에너지모드를 억제시키는 행렬을 더함으로써 강성행렬에 전달가능한 거짓 영에너지모드의 발생을 배제시키는 것이다.

4. 비적합 변위형의 추가

일반 등매개변수요소가 부정확한 값을 주는 가장큰 원인 중의 하나가 단순한 응력 분포를 제대로 나타 내지

못하기 때문이다. Wilson⁸⁾등은 2차원 문제에서 비적합 변위형(nonconforming displacement mode)을 추가 함으로써 요소내에서 발생하는 과도한 변형에너지를 제거 하고, 요소의 억제된 거동을 유연하게 하였다. 이와같은 비적합변위형의 추가는 Cochet와 Dhatt⁹⁾에 의해 2차원 비선형 소성문제에 적용되었다. 또한 Choi와 Schnobrich¹⁰⁾는 이 개념을 등매개변수 쉘요소에 적용하여 원래의 요소의 거동을 개선하였으며, 8절점요소에 추가 적용가능한 다음과 같은 비적합변위 형상함수를 제안하였다.

$$\bar{N}_1 = \xi(1-\xi^2), \quad \bar{N}_2 = \eta(1-\eta^2), \quad \bar{N}_3 = \xi\eta(1-\xi^2)$$

$$\bar{N}_4 = \xi\eta(1-\eta^2), \quad \bar{N}_5 = (1-\xi^2)(1-\eta^2) \quad (25)$$

비적합 변위형의 추가는 원래의 요소의 거동을 개선시키지만 추가적인 계산시간을 요하게 되므로 요소의 거동을 크게 저하 시키지않는 범위 내에서 비적합 변위형의 추가를 최소화 하는 것이 바람직하다. 추가된 회전변위자유도는 추가된 평면내의 이동변위자유도에 의해 대략 나타낼수 있으므로 본 요소에서는 회전변위자유도에는 비적합 변위형을 추가 하지 않는다. 위의 비적합 변위형을 원래의 변위장에 추가하여 요소의 변위장을 간단히 표현하면 다음과 같다.

$$u = \sum N_i u_i + \sum \bar{N}_j \bar{u}_j \quad (26)$$

여기서 $u = [u, v, w, \alpha, \beta]$, $\bar{u} = [\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, 0, 0]$ 이다.

위의 식에서 \bar{u} 는 실제적인 변위이기 보다는 추가된 비적합 변위형에 대한 크기로 생각할 수 있다. 추가된 \bar{u} 역시 요소의 변형에너지를 최소화함으로써 구할수 있다. 비적합 변위형의 추가로 원래의 평형관계식은 다음과 같이 확장된다.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{21} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \bar{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (27)$$

여기서 u 는 절점 자유도이고 \bar{u} 는 추가된 비적합 변위형의 크기이며, F_1 과 F_2 는 서로 대응되는 하중성분이다.

비적합 변위형의 추가로 확장된 강성행렬은 정적응축(static condensation)기법을 사용하면 원래와 같은 차수로 줄어들게 된다.

$$K' u = F_1 \quad (28)$$

여기서

$$K' = K_{11} - K_{12} K_{22}^{-1} K_{21} \quad (29a)$$

$$F_1 = F_1 - K_{12} K_{22}^{-1} F_2 \quad (29b)$$

$$\bar{u} = K_{22}^{-1} F_2 - K_{22}^{-1} K_{21} u \quad (29c)$$

5. 가정된 전단 변형도장

본연구에서는 degenerated 쉘요소에서 발생하는 shear locking현상을 가정된 전단변형도장으로 대치 사용함으로써 극복한다. Shear locking현상을 제거하기 위해서 얇은 쉘에서 전단변형도 $\gamma_{\xi\xi}$ 와 $\gamma_{\eta\xi}$ 는 영에 가까워져야 한다. 위와 같은 기법의 사용은 4절점요소에서 Bathe와 Dvorkin¹¹⁾이 처음 사용했고, 고차 절점요소에서 Huang와 Hinton¹²⁾이 사용하였다. 본연구에서는 shear locking현상을 제거하기위해 Huang와 Hinton이 제시한 방법을 수정하여 사용한다.

본연구에서는 비적합변위형중 \bar{N}_5 모드 즉 bubble mode가 이동변위에 추가된 상태를 본 degenerated 쉘 요소의 기본형으로 생각하므로 가정된 전단변형도 $\tilde{\gamma}_{\xi\xi}$ 와

$\tilde{\gamma}_{\eta\xi}$ 는 적어도 다음과 같은 다항식을 이루어야 하다¹³⁾.

$$\tilde{\gamma}_{\xi\xi} = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta + a_5\eta^2 + a_6\xi\eta^2 \quad (30a)$$

$$\tilde{\gamma}_{\eta\xi} = b_1 + b_2\xi + b_3\eta + b_4\xi\eta + b_5\xi^2 + b_6\xi^2\eta \quad (30b)$$

위의 가정된 전단변형도 다항식의 미지항을 구하기 위해 6개의 요소내의 적분 선택점이 필요하게된다. $\tilde{\gamma}_{\xi\xi}$ 와 $\tilde{\gamma}_{\eta\xi}$ 의 적분 선택점은 그림2와같이 각각 상이하고, 다음과 같이 보간된다.

$$\tilde{\gamma}_{\xi\xi} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 P_i(\eta) Q_j(\xi) \gamma_{\xi\xi}^i \quad (31a)$$

$$\tilde{\gamma}_{\eta\xi} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 P_i(\xi) Q_j(\eta) \gamma_{\eta\xi}^i \quad (31b)$$

여기서

$$P_1(x) = \frac{x}{2b} \left(\frac{x}{b} + 1 \right), P_2(x) = 1 - \left(\frac{x}{b} \right)^2, P_3(x) = \frac{x}{2b} \left(\frac{x}{b} - 1 \right)$$

$$Q_1(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{a} \right), Q_2(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{a} \right) \quad (32)$$

$a=1/\sqrt{3}$, $b=1$ 이며 적분 선택점위치는 그림2와 같다.

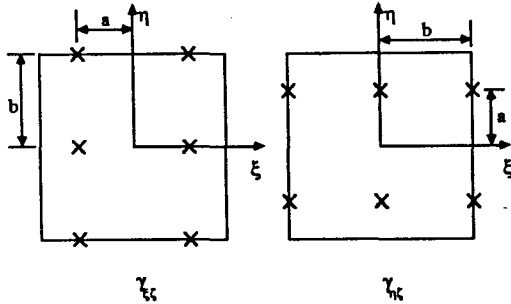


그림 2. 전단변형도장의 보간점.

6. 개선된 degenerated 쉘유한요소

앞에서 언급한 것처럼 감차적분방법과 비적합변위형의 추가와 가정된 전단변형도의 대치 사용은 각각의 경우 요소의 거동을 개선시킨다는 것과 각각의 한계는 잘 알려져있다^{7,10,12)}. 본연구에서는 각각의 한계를 배제하고, 각각의 장점을 보완 결합한 개선된 degenerated 쉘 요소를 구성한다. 본연구의 개선된 degenerated 쉘 요소의 기본착상은 shear locking해결에 우수한 결과를 보인 가정된 전단변형도를 사용하고, membrane locking현상을 제거하기 위해 평면내 변형도의 구성시 감차적분을 행하며, 쉘요소자체의 거동을 보완하기 위해 비적합 변위형을 선택적으로 추가하는 것이다¹³⁾. 또한 지금까지의 결합된 요소가 선형부분에 국한된 것을 비선형부분으로 확대 적용시킨다.

위에서 언급한 것의 효과적인 결합을 위하여 전체 요소의 강성을 평면내 부분(in-plane part)과 전단 부분(transverse shear part)으로 나눈다. 평면내 부분(in-plane part)에는 막(membrane)과 굽힘(bending)의 효과가 포함되어 있다. 전단 변형도 수치 적분시 shear locking현상을 피하기 위해 적분위치를 선택된 위치에서 $2 \times 3/3 \times 2$ 적분을 행하고, 평면내 부분은 감차적분(2×2)을 행하며, 모든부분에 대해 비적합 변위형을 선택적으로 추가한다(표 1). 그러므로 증분 Green-Lagrangian 변형도 텐서중 전단변형도에 관한 항을 다음과 같이 쓸수 있다.

$$dE_{\xi\xi} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 P_i(\eta) Q_j(\xi) dE_{\xi\xi}^i \quad (33a)$$

$$dE_{\eta\xi} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 P_i(\xi) Q_j(\eta) dE_{\eta\xi}^i \quad (33b)$$

여기서 P와 Q는 앞식(32)에서 정의한바와 같다.

그러므로 증분변위 미분치와 증분변위와의 관계는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$dE = G du = \sum \begin{bmatrix} G_f \\ G_s \end{bmatrix} du + \sum \begin{bmatrix} \bar{G}_f \\ \bar{G}_s \end{bmatrix} dU \quad (34)$$

여기서 $du = [du, dv, dw, d\alpha, d\beta]$, $d\bar{u} = [d\bar{u}, d\bar{v}, d\bar{w}, 0, 0]$ 이다. G_f 는 증분 평면내변위 미분치와 증분변위관계 행렬이며, G_s 는 대치된 증분 전단변위 미분치와 증분변위관계 행렬이고, \bar{G}_f 와 \bar{G}_s 는 증분 비적합 변위형의 변위 미분치와 증분 비적합변위형의 변위와의 관계행렬이다.

개선된 degenerated 쉘 요소는 비적합모드의 추가형식에 따라 2가지로 구분하였다. 즉 이동변위(u, v, w)에 5개의 비적합변위형($\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3, \bar{N}_4, \bar{N}_5$)을 추가하는 Type I과 동변위에 3개의 비적합변위형($\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3$)을 추가하는 Type II로 구분하였다.

표 1. 수치적분 방법.

ELEMENT	STIFFNESS	$N_1 - N_2$	\bar{N}_1	\bar{N}_2	\bar{N}_3	\bar{N}_4
		u, v, w, α, β	\bar{u}	\bar{v}	\bar{w}	$\bar{\alpha}$
QSR	IN-PLANE	2x2	-	-	-	-
	TRANSVERSE SHEAR	2x2	-	-	-	-
Type I	IN-PLANE	2x2	2x2	2x2	2x2	3x3
	TRANSVERSE SHEAR	2x3/3x2	3x3	3x3	2x3/3x2	3x3
Type II	IN-PLANE	2x2	2x2	2x2	2x2	3x3
	TRANSVERSE SHEAR	2x3/3x2	3x3	3x3	2x3/3x2	3x3

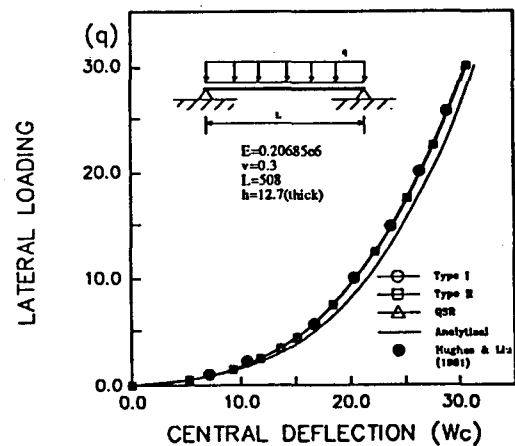


그림 3. 평판 스트립의 하중-변위곡선.

7. 수치 해석

본연구에서 제시한 개선된 degenerated 쉘 요소의 비선형거동을 알아보기 위해 여러 예제시험을 하였다. 비

교를 위하여 8절점 등매개요소를 감차적분한 경우를 QSR로 표시한다. 비선형 해석시에는 Newton-Raphson 반복법을 사용하였으며, 극한점이있는 경우에는 비선형 평형경로 수치해법은 변위제어법을 사용하였으며, 수렴의 판정은 총 변위의 Euclidian Norm 대 증분된 변위의 Euclidian Norm의 비가 1.0×10^{-3} 보다 작을때 수렴 하였다고 판정하였다.

기하학적 비선형해석(geometrically nonlinear analysis)

평판 스트립(plate strip)

그림3과 같이 무한히 긴 단순 지지된 평판 스트립이 분포하중을 받는 것을 기하학적 비선형해석을 하였다. 대칭성에 의해 단위길이 평판스트립의 반을 5개의 요소로 모델링하였다. 그림3는 분포하중대 평판스트립의 중심에서의 처짐 판계를 나타낸 것이다. 본 요소에 의한 결과는 Hughes와 Liu¹⁴⁾의 해와 해석해와 비교할때 좋은 결과를 보인다.

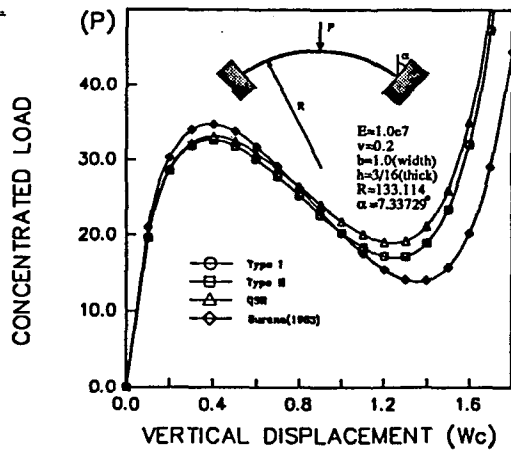


그림 4. 얇은 원형아치의 하중-변위곡선.

얇은 원형 아치(shallow circular arch)

그림4과 같이 정점에서 집중하중을 받는 양단이 고정된 얇은 원형 아치를 해석 하였다. 대칭성에 의해 아치의 반을 8개의 요소로 모델링 하였다. 본문제는 snap-through현상을 일으키므로 변위제어법을 사용하여 해석 하였다. 그림4에서는 보요소를 사용한 Surana¹⁵⁾와 QSR과 비교 하였다. 극소점 이하에서 Surana해와 다소 차이를 보여 주고있다.

사각형 평판(square plate)

그림5에서 보는바와 같이 등분포하중을 받는 사면이 고정된 사각형 평판을 해석 한다. 대칭성에 의해 평판의 1/4을 모델링 하였다. 평판 중심의 처짐과 등분포하중의 크기와의 판계를 그림5에 나타내었다.

원통형 셸(cylindrical shell)

그림6과 같이 집중하중을 받는 원통형 셸을 해석 하였다. 원통형의 길이 방향의 가장자리는 힌지로 지지되어 있고, 곡면 가장자리는 자유지지 되어있다. 대칭성에 의해 1/4을 4x4로 모델링 하였다. 본 문제도 snap-through현상을 일으키므로 변위제어법을 사용하여 해석 하였다. 그림6에서 보는바와 같이 극소점 이하에서는 Surana⁶⁾의 해보다는 Sabir와 Lock¹⁶⁾의 해에 가깝다.

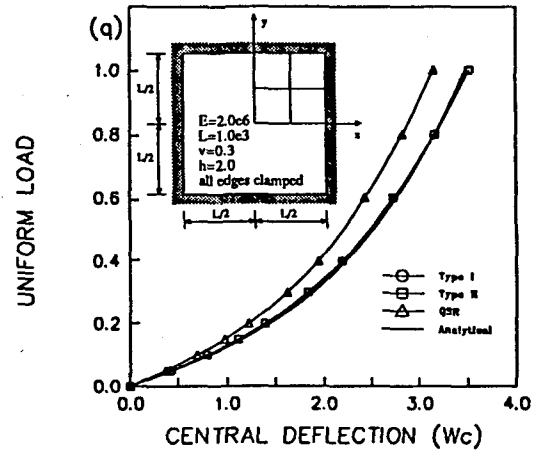


그림 5. 정사각형 평판의 하중-변위곡선.

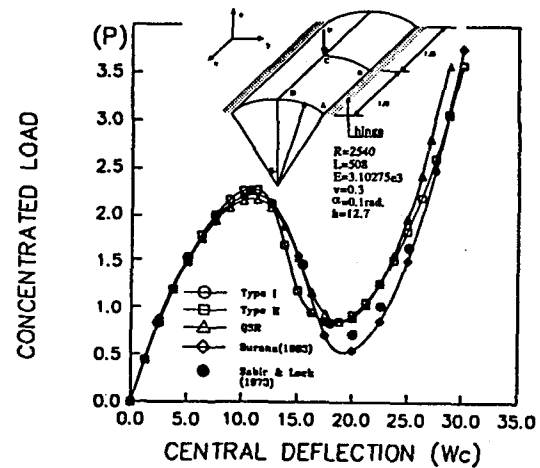


그림 6. 원통형 셸의 하중-변위곡선.

재료 비선형해석(materially nonlinear analysis)

재료 비선형해석에는 von Mises항복조건을 만족하는 탄소성재료에 대해서 적층모델(layer model)을 사용하여 해석한다.

사각형 평판(square plate)

등분포하중을 받는 사면이 단순지지된 사각형 평판을 비선형해석한다. 해석에 사용된 평판의 형상과 탄소성 재료특성등은 그림7과 같다. 대칭성에 의해 평판의 1/4만을 4x4로 모델링 하였다. 본 해석에서는 평판의 두께방향으로는 5개의 균일한 층을 사용하였으며, 해석한 결과는 그림7과 같다. 해석 결과를 Hinton과 Owen¹⁷⁾과 비교시 매우 정확히 일치 함을 볼 수 있다.

원통형 셸(cylindrical shell)

자체의 자중이 작용하는 원통형 셸의 탄소성 비선형 해석을 하였다. 해석에 사용된 원통형 셸의 형상과 탄소성재료특성등은 그림8과 같다. 본 경우에는 셸의 두께방향으로 4개의 균일한 층을 사용하였다. Martin과 Owen¹⁸⁾의 참고문헌과 비교시 상당히 믿을 만한 해석

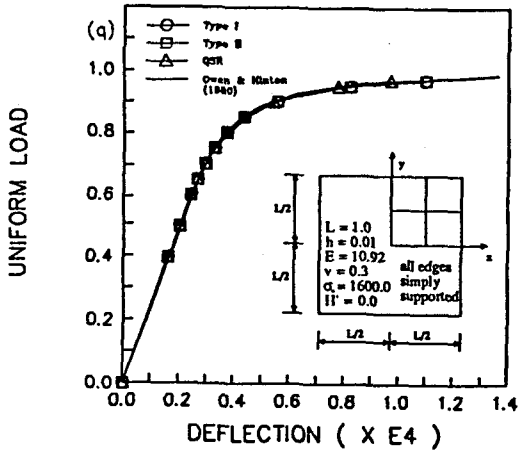


그림 7. 평판의 탄소성 비선형유한요소해석.

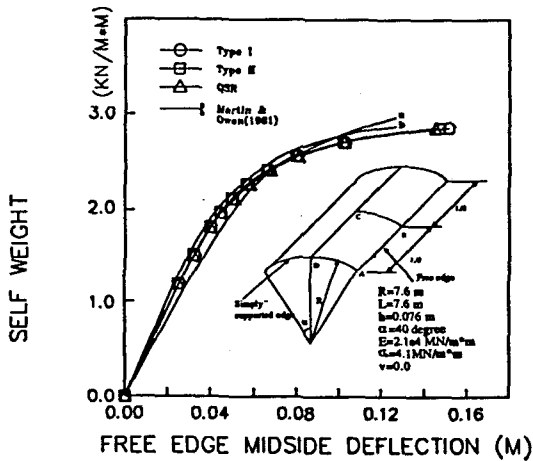


그림 8. 원통형 셸의 탄소성 비선형유한요소해석.

결과를 그림8에서 보여주고 있다.

8. 결 론

본연구에서 사용한 개선된 degenerated 쉘유한요소는 가정된 전단변형도장의 대치사용, 감차적분과 비적합변위형의 선택적 추가등의 장점을 상호 보완적으로 혼합 사용하여 선형해석에서 우수한 결과를 주었다. 본연구에서는 선형해석에서 우수한 결과를 준 개선된 degenerated 쉘유한요소들 쉘의 재료적 비선형해석과 기하학적 비선형해석으로 확대 적용시켰다. 쉘의 기하학적 비선형거동은 total Lagrangian 수식화를 사용하였고, 탄소성재료에 대해 비선형해석을하였다. 여러수치해석결과 본 개선된 degenerated 쉘유한요소는 비선형해석 영역에서도 양호한 결과를 준다.

참 고 문 헌

1. O.C.Zienkiewicz, The Finite Element Method, 3rd Ed., McGraw-Hill, 1977.

2. S.Ahmad et al., Analysis of thick and thin shell structures by curved elements, Int. J. Numer. Methods Eng., 2, 419-451 (1970).

3. H.Parish, Nonlinear analysis of shells using isoparametric elements, Nonlinear Finite Element Analysis of Plates and Shells, T.J.R.Hughes et al. (Eds), AMSE, 1981.

4. E.Ramm and A.Matzenmiller, Large deformation shell analyses based on the degenerated concept, Finite Element Methods for Plate and Shell Structures, T.J.R.Hughes and E.Hinton(Eds), Pineridge Press, 1986.

5. H.Stolarski and T.Belytschko, Shear and membrane locking in curved C(0) elements, Comp. Meth. App. Mech. Eng., 41, 279-296, (1983).

6. K.S.Surana, Geometrically nonlinear formulation for the curved shell elements, Int. J. Numer. Methods Eng., 19, 581-615 (1983).

7. O.C.Zienkiewicz et al., Reduced integration techniques in general analysis of plates and shells, Int. J. Numer. Methods Eng., 3, 275-290 (1971).

8. E.L.Wilson et al., Incompatible displacement models, In Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics, S.T.Fenves et al.(Eds), Academic Press, 1973.

9. J.F.Cochet and G.S.Dhatt, Plasticity analysis by a nonconforming plane element, Int. J. Numer. Methods Eng., 12 561-566 (1978).

10. C.K.Choi and W.C.Schnobrich, Use of nonconforming modes in finite element analysis of shells, J. Eng. Mech. Div., ASCE, 101, 447-464 (1975).

11. E.N.Dvorkin and K.J.Bathe, A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis, Engineering Computation, 1, 77-88 (1984).

12. H.C.Huang and E.Hinton, A new nine node degenerated shell element with enhanced membrane and shear interpolation, Int. J. Numer. Methods Eng., 22, 73-92 (1986).

13. 최창근, 유승운, 쉘구조 해석을위한 개선된 degenerated 쉘유한요소, 한국전산구조공학회

14. T.J.R.Hughes and W.K.Liu, Nonlinear finite element analysis of shell: Part I, 3-D shells, Comp. Meth. App. Mech. Eng., 26, 331-362 (1981).

15. K.S.Surana and R.M.Soren, Geometrically non-linear formulation for three dimensional curved beam elements with large rotations, Int. J. Numer. Methods Eng., 28, 43-73 (1989).

16. A.B.Sabir and A.C.Lock, The application of finite elements to the large deflection geometrically non-linear behavior of cylindrical shells, Variational Methods in Engineering, C.A.Brebbia et al.(Eds), Southampton University Press, 1973.

17. D.R.J.Hinton and E.Hinton, Finite Elements Plasticity; theory and practice, Pineridge Press, 1980.

18. R.A.F.Martin and D.R.J.Owen, Elastoplastic and geometrically nonlinear thin shell analysis by the semiloof element, Computers and Structures, 13, 505-513 (1981).