1990년도 봄
한국전산구조공학회 학술발표회 논문집

양단고정된 변단면보의 자유및 강제진동의 비선형해석

Nonlinear analysis of stepped beam with immovable ends for free and forced vibration

○ 심 재 수* 함 원 식**
Shim Jae Soo Ham Won Shik

ABSTRACT

Stepped beam with immovable ends for large amplitude of vibration including effects of longitudinal displacement, shear deformation and rotary inertia is investigated for free and forced vibration using finite element method.
Modified harmonic force matrix is introduced for analysis of vibration with finite amplitude of the stepped beam under uniform hamonic loading and beam with nonuniform harmonic loading.
Numerical examples of stepped beam with various support conditions are analysed for deflections and natural frequencies. Results show that the proposed method is valid and efficient.

1. 서론

구조물의 선형진동 해석은 공학적으로 많이 이용되나, 조화하중을 받는 경량유연구조물의 진동문제와 같이 진폭이 미소하지 않고 유한하면 중립면에서의 부재 축방향 변위를 무시하는 가정에 근거를 둔 선형해석 결과는 부정확하므로 비선형 진동해석이 필요하다. 일반적으로 비선형 문제는 재료의 특성를 나타내는 응력과 변형도의 관계가 비선형인 재료의 비선형 문제와, 유한변형에 기인하는 변위와 변형도 관계가 비선형인 기하학적인 비선형 문제이다.

연속체 이론으로 들보와 평판이 기하학적 비선형 문제를 해석하는 연구가 진행되어져 Woinowky Krieger[1] 은 기둥의 비선형 자유 진동을 연구하여 진동수는 진폭과 함수 관계임을 알았으며 ,Yamaki와 Mori[2] 는 초기변형과 초기축방향 변위의 영향을 고려하여 등분포 조화하중을 받는 양단고정인 들보에서 비선형 강제 진동을 연구하여 해석적 해와 실험 결과를 비교하였다. 이들의 연구에서는 비선형 진동을 받는 들보의 mode shape를 가정하고 비선형 편미분 운동 방정식을 Galerkin 방법을 사용하여 비선형 상미분 방정식인 Duffing 방정식으로 변환하여 elliptic function,perturbation 혹은 수치해석으로 해를 구하였다 유한 요소법의 발전으로 비선형 진동 문제의 영역에서도 근사해법에 관한 연구가 진행되어져,Ray 와 Bert[3] 등의 연구는 비선형 진동해에 유한요소법을 사용하였고 Rao[4]등은 비선형 변위 변형도 관계를 선형화하여 유한변형이 발생하는 들보와 원형평판에 대하여 연구하였다.

최근에 Mei와 Umphai[5],[6] 는 비선형 강제 진동을 받는 들보와 평판을 해석하기 위하여 유한요소법을 이용한 조화하중행렬을 발전시켰으나 균일한 단면에 등분포 조화하중이 작용한다고 가정하였으므로 stepped 들보나 임의의 구간에만 작용하는 하중의 경우에는 해석할 수 없다. 그러므로 본 논문에서는 유한 요소법을 이용하여 등분포 하중이 작용하는 stepped 들보와 들보의 의의 구간에 하중이 작용하는 경우를 해석하기 위하여 보 요소의 축방향 변형, 전단변형과 회전관성을 고려하고 조화하중행렬을 보완하여 양단이 고정된 stepped 들보의 기하학적 비선형 자유 및 강제 진동 해석을 위한 고유치와 진동 현상을 구함이 목적이다.

* 정회원 경희대학교 토목공학과 정교수
** 경희대학교 토목공학과 석사출

2. 비선형 강제 진동의 Formulation

2-1 Immovable end를 갖는 들보의 비선형 강제 진동

그림1과 같은 구형보에서 보의 높이 h와 폭b의 값이 길이 L에 비하여 매우 작다고 가정하면 중립축을 따라 두 변위값 즉 축방향 변위 U(x,t)와 수직변위 W(x,t)은 보의 변형을 정의하는데 사용되며 비선형 변위 변형도 관계는 다음과 같다.

$$\varepsilon_{xx}=U_{,x}-ZW_{,xx}+\frac{1}{2}W_{,x}^2 \qquad (1)$$

여기서 $U_{,x}$는 $\frac{\partial U}{\partial x}$ 이고 $W_{,xx}$ 는 $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$ 을 의미한다.

들보의 탄성 변형에너지 (U)와 운동에너지(T)는 각각 다음과 같다.

$$U=\frac{1}{2}\int_0^L EIW^2_{,xx}dx+\frac{1}{2}\int_0^L EA(U_{,x}+\frac{1}{2}W^2_{,x})^2dx \qquad (2)$$

$$T=\frac{1}{2}\int_0^L m(\dot{u}^2+\dot{W}^2)\,dx \qquad (3)$$

여기서 m 은 단위 길이당 질량이다.

외력 F(x,t)에 의한 포텐셜에너지 V는

$$V=\int_0^L F(x,t)w\,dx \quad (4)$$

식(2),(3)과 (4)로 부터 계의 Lagrangian 은 U-T-V 이므로 Hamilton 의 원리를 적용한후 부분적분하면 다음과 같은 유한 진폭 운동의 지배 방정식이 된다.

$$(EIW_{,xx})_{,xx}-\frac{d}{dx}\left[EA\left(U_{,x}+\frac{1}{2}W^2_{,x}\right)W_{,x}\right]+m\ddot{W}=F(x,t) \quad (5)$$

$$m\ddot{u}-\frac{d}{dx}\left[EA\left(U_{,x}+\frac{1}{2}W_{,x}^2\right)\right]=0 \quad (6)$$

이때 x=0와 x=L의 경계 조건은 다음과 같다.

$$W=0 \text{혹은 } (EIW_{,xx})_{,x}+EAW_{,x}\left(U_{,x}+\frac{1}{2}W_{,x}^2\right)=0$$
$$W_{,x}=0 \text{혹은 } EIW_{,xx}=0 \quad (7)$$
$$U=0 \text{혹은 } EA\left(U_{,x}+\frac{1}{2}W_{,x}^2\right)=0$$

길이에 대한 단면의 회전반경비가 매우 작으면 $\ddot{U}$는 영이라고 가정한다[1]. 식 (6)은 다음과 같이 된다.

$$EA\left(U_{,x}+\frac{1}{2}W_{,x}^2\right)=N(t) \quad (8)$$

N(t)는 단면의축력으로 들보의 전길이에 대하여 일정하고 부재의 양단이 immovable인 경계조건 U(0)=U(L)=0을 고려하면

$$N(t)=\int_0^L \frac{1}{2}W_{,x}^2dx \Big/ \int_0^L \frac{1}{EI}dx \quad (9)$$

식 (5), (8)과 (9)을 결합하면 수직처짐 W(x,t)에 대한 비선형 강제 진동의 지배 미분 방정식이 된다.

$$(EIW_{,xx})_{,xx}-N(t)W_{,xx}+m\ddot{W}=F(x,t) \quad (10)$$

2-2 비선형 강제 진동의 해석적인 해

수직 변위 W(x,t)는 $\phi(x)y(t)$로 치환하고 $\phi(x)$는 경계조건을 만족하는 진동현상 함수이다.

작용하는 하중을 $F_0Y(t)/A_{mp}$로 나타내면 F_0는 하중계수, modal amplitude Y(t)는 시간의 함수이며, A_{mp}는 Y(t)의 최대진폭이다. 식(10)는 다음과 같다.

$$m\phi\ddot{Y}(t)+(EI\phi_{,xx})_{,xx}Y(t)-N(t)\phi_{,xx}Y(t)-F_0Y(t)/A_{mp}=0 \quad (11)$$

Galerkin 방법을 사용하여 양변에 $\phi(x)$를 곱하고 보의 길이에 대하여 적분하면

$$\int_0^L m\phi^2\ddot{Y}(t)dx+\int_0^L(EI\phi_{,xx})_{,xx}Y(t)dx-\int_0^L N(t)\phi_{,xx}\phi Y^3(t)dx-\int_0^L F_0Y(t)/A_{mp}\phi dx=0 \quad (12)$$

여기서 $A_1=\int_0^L m\phi^2dx,\ A_2=\int_0^L(EI\phi_{,xx})_{,xx}\phi dx,$

$A_3=-\int_0^L N(t)\phi\phi_{,xx}dx,\ A_4=\int_0^L\phi dx$

라 정의하면,

$$A_1\ddot{Y}(t)+A_2Y(t)+A_3Y^3(t)-A_4\frac{F_0}{A_{mp}}Y(t)=0 \quad (13)$$

위식은 Duffing 방정식으로 Y(t)는 근사적으로 $Y(t)\simeq A_{mp}\cos(\omega t)$가 되고 비선형 항과 하중항은 각각 다음과 같다.

$$Y^3(t)\simeq\frac{3}{4}A_{mp}^3\cos(\omega t) \quad (14)$$
$$F_0Y(t)/A_{mp}=F_0\cos(\omega t) \quad (15)$$

식 (14)와 (15)을 (13)에 대입하면,

$$A_1\omega^2-A_2-\frac{3}{4}A_3A_{mp}^2+A_4F_0/A_{mp}=0 \quad (16)$$

여기서 A_3은 비선형 강성이고 A_4는 하중항이므로 선형자유 진동의 경우에는 $A_3=A_4=0$이므로 선형 고유 진동수 ω_L은 고유벡터의 함수인 A_1,A_2에 의하여 계산된다.

식 (16)에서 ω_L^2 로 양변을 나누면,

$$\left(\frac{\omega}{\omega_L}\right)^2=1+\frac{3}{4}\frac{A_3}{A_1}\frac{A_{mp}^2}{\omega_L^2}-\frac{A_4}{A_1}\frac{F_0}{A_{mp}\omega_L^2} \quad (17)$$

앞의 A_1,A_2,A_3,A_4값은 유한요소법을 이용하여 구한 형상 함수 $\phi(x)$를 수치적분하여 구할 수 있다.

균일한 들보와 stepped들보의 ω/ω_L비는 식(13)와 (17)의 해로써 구할 수 있으면 표1과 2에 있다.

2-3 비선형 강제 진동의 근사적 해

2-3-1 비선형 자유 진동

그림 2와 같은 들보 요소에서 전단변형을 고려하면 비선형 변위 변형도 관계는 다음과 같다.

$$\varepsilon_{xx}=U_{,x}-ZW_{b,xx}+\frac{1}{2}W_{,x}^2$$
$$\varepsilon_{xz}=\frac{1}{2}W_{s,x}\quad \gamma_{xz}=2\varepsilon_{xz}=W_{s,x} \quad (18)$$

여기서 $W_{,x}=W_{s,x}+W_{b,x}$이고 각각 전단변형과 휨변형에 의한 회전각이다.

요소의 선형화 함수 f를 도입하여 다음과 같이 정의하면

$$f=f(x)=\frac{1}{2}W_{,x} \quad (19)$$

식(18)은

$$\varepsilon_{xx}=U_{,x}-ZW_{b,xx}+fW_{,x}^2 \quad (20)$$

전단 변형 효과가 고려되는 Hermitian 다항식을 형상 함수로 사용하면

$$W=h_1w_1+h_2L\theta_1+h_3w_2+h_4L\theta_2$$
$$L\theta=k_1w_1+k_2L\theta_1+k_3w_2+k_4L\theta_2 \quad (21)$$
$$S=k_sEI/(GAL^2)\quad \beta=x/L$$

여기서 G는 전단탄성계수이고 K_s는 전단계수이다

선형 강도매트릭스 $[k_L]$를 유도하는데 필요한 변형 에너지에 대한 식은 다음과 같다.

$$U_L=\frac{1}{2}\int_0^L EIW_{b,xx}^2dx+\frac{1}{2}\int_0^L EAU_{,x}^2dx+\frac{1}{2}\int_0^L k_sGAW_{s,x}^2dx \quad (22)$$

식(22)에 식(21)을 대입하여 정리하면 다음과 같이 선형 강도매트릭스를 구할수 있다.

$$[k_L]=\begin{vmatrix} a & . & . & -a & . & . \\ & b & c & . & -b & c \\ & & d & . & -c & e \\ & & & a & . & . \\ & & & & b & -c \\ & & & & & d \end{vmatrix} \quad (23)$$

비선형 강도매트릭스[k_{NL}]는 위와같이 비선형에 관계되는 변형에너지

$$U_{NL}= \int_0^L EAfU_{,x}W_{,x}dx + \frac{1}{2}\int_0^L EAf^2W_{,x}{}^2dx \quad (24)$$

식(24)에 식(21)을 대입하여 정리하면 비선형 강도매트릭스

$$[K_{nl}]= \left|\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & . & -a_1 & a_3 \\ a_4 & a_5 & -a_1 & -a_4 & a_6 \\ & a_7 & -a_2 & -a_5 & a_8 \\ & & & a_1 & -a_3 \\ & & & a_4 & -a_6 \\ & & & & a_9 \end{array}\right| \quad (25)$$

전단변형을 고려한 고유 진동수의 산정을 위한 질량 매트릭스를 유도하는데 필요한 운동 에너지에 대한 식은 다음과 같다.

$$\int_0^L \frac{1}{2}\rho(A\dot{W}^2+I\dot{W}_{,x})dx \quad (26)$$

여기서 ρ는 밀도를 나타내고 ($\dot{}$)는 (   )를시간으로 미분한 것이다.

식(26)에 식(21)을 대입하여 정리하면 다음과 같이 전단변형 및 회전관성을 고려한 질량 매트릭스를 얻을수 있다.

$$[m]= \left|\begin{array}{cccccc} a & . & . & b & . & . \\ & c & d & . & e & f \\ & & g & . & -f & -h \\ & & & a & . & . \\ & & & & c & -d \\ & & & & & g \end{array}\right| \quad (27)$$

보 전체의 행렬들은 요소 행렬들은 조립하면 되고 비선형 자유 진동의 운동 방정식은 다음과 같다.

$$[M]\{Y\}+([K_L]+[K_{NL}])\{Y\}=\{0\} \quad (28)$$

2-3-2 stepped보의 조화하중 행렬

강제 진동의 지배 방정식은 식(12)인데 Prismatic beam이라면 다음과 같다.

$$mY(t)+\left[\int_0^L(EI\phi_{,xx})_{,xx}Y(t)dx-\int_0^L N(t)\phi_{,xx}\phi Y^3(t)dx-\int_0^L F_oY(t)/A_{mp}\phi dx\right]/\int_0^L\phi^2dx=0 \quad (29)$$

$B^oY(t)$는 선형스프링력으로 볼 수 있고 B^o는 작용하중 $F(x,t)$ 와 형상함수 즉 고유벡터 θ의 함수이다.

여기서 i번째 요소에 조화하중이 작용한다면 그 요소의 포텐샬에너지는

$$V_i^\circ = \frac{1}{2}B_i^\circ\int_0^{L_i}W^2dx \quad (30)$$

여기서 B_i° 는 요소 i 에서는 일정하며 다음과 같다.

$$B_i^\circ=\int_{L_{i-1}}^{L_i}\phi_i dxF_{oi}/\int_{L_{i-1}}^{L_i}\phi_i{}^2dxA_{mp} \quad (31)$$

식(21),(30)와 (31)을 결합하여 정리하면 조화하중행렬 [h]를 얻을수 있다.

$$[h]= \left|\begin{array}{cccccc} . & . & . & . & . & . \\ & a & b & . & c & d \\ & & e & . & -d & f \\ & & & . & . & . \\ & & & & a & -b \\ & & & & & e \end{array}\right| \quad (32)$$

비선형 강제 진동의 운동 방정식은 다음과 같다

$$[M]\{Y\}+([K_L]+[K_{NL}]-[H])\{Y\}=0 \quad (33)$$

3-3 계산 과정

해를 구하는 과정은 미소변형에 의한 선형 해와 유한변형에 의한 비선형 해의 두 부분으로 구성된다.

(1) 미소 변형의 자유 진동 선형 해

선형해의 해석은 선형 고유값과 선형 고유벡터를 구하는 과정으로 계산된 선형 고유벡터는 비선형해의 초기값이 된다.

(2) 비 선형해

비선형 해를 구하는 방법으로 반복법이 사용되는데 비선형 강도행렬[K_{NL}] 과 조화하중행렬 [H]은 고유벡터{Y_{i-1}}에 의하여 formulation 되고 이때의{Y_{i-1}} 은 이전 단계의 반복 시행시 구한 고유벡터로 주어진 최대 진폭에 의하여 norm-alize된다. 결국 식 (34) i단계의 비선형 고유값 ω_i와 고유벡터{Y_i}를 구하는 자유 진동 문제로 귀착되어진다.

비선형 강제 진동 문제를 해석하기 위한 흐름도는 그림3과 같으며 수렴조건은 Frequency Norm을 사용하였다.

2-4 예 제

그림 4와 같은 균일한 들보와 stepped 들보의 경우를 해석하였다.

두께 H = 8.313in (stepped 들보:H_1=1.2H)
폭 b = 3H = 24.939in
길이 L = 240in (stepped 들보:L_1=1/3L)
질량 m = 0.002587 lb/in³
포아송비 ν = 0.3

앞서 가정한 두 B_i° 에 의한 양단 고정과 양단 힌지의 경우의 해석결과는 각각 표1과 2에 있다.

보의 양단과 단면의 변화에 따른 자유및 강제 진동의 고유 진동수들은 표3에 있고, 진동 mode는 표4에 있다.

3. 결 론

본 연구는 stepped들보 요소를 포함한 들보구조의 유한 변형을 고려하여 기하학적 비선형 자유및 강제 진동문제의 고유치와 고유벡터를 계산하였다.

그 과정은 비선형 변위 - 변형도 관계식을 선형화하고 선형 진동을 해석한 결과인 기본 고유벡터를 기하학적 비선형 진동의 초기 mode shape로 하여 조화하중행렬을 계산하고 고유벡터를 구하여 변위를 계산한 후 이 고유벡터를 다시 mode shape로하여 조화하중행렬을 수정하고 반복 계산

하여 고유치 Norm 을check하여 수렴이 된 후 비선형 진동에 대한 고유치와 고유벡터를 구하였다

본 해석을 통하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 길이가 일정하도록 구속된 보의 유한 진폭의 자유및 강제진동해석을 위한 비선형 유한 요소 프로그램을 개발하였다.

2. 전단변형을 고려한 경우와 고려하지 않은 경우의 고유치 오차는 1% 내외이다.

3. 비선형 자유진동 해석은 조화하중행렬을 null matrix로 대체하면 비선형 강제진동 문제와 같다.

4. 수정된 조화하중 행렬을 도입하여 stepped 보의 해석과 임의의 영역에 하중이 작용하는 Prismatic보의 해석이 가능하다.

5. 비선형 진동의 각속도와 선형 진동의 각속도의 비는 해석적인 비와 대체로 잘 부합한다.

6. 비선형 진동 모우드는 반복계산 결과 해석적인 값과 잘 부합한다.

후 기

1989년도 경희대학교 교비연구비 지원에 의한 연구임.

REFERENCES

1. Nayfeh, A.H. and Mook, D.T., "Nonlinear Oscillation" John Willey and Sons, Inc. 1979

2. Mei. C., "Nonlinear Vibration of Beam by Matrix Displacement Method",AIAA Journal,Vol. 10 No.3, March 1972, pp.355-357.

3. Mei.C.,"Finite Element Displacement Method for Large Amplitude Free Flexural Vibration of Beams and Plates", Journal of Computers and Structures, Vol.3, 1973,pp.163-174.

4. Roo,G.V.,Raju,K.K.and Raju I.S.,"Finite Element Formulation for the large Amplitude Free Vibration of Beam and Orthotropic Circular Plate", Journal of Computers and Structures,Vol.6,1976,pp.169-172.

5. Mei.C. and Decha Umphai, K.,"A Finite element Method for Nonlinear Forced Vibrations of Beam", Journal of Sound and Vibration, Vol.102,1985,pp.369-380.

6. Mei. C. and Decha Umphai, K.,"Finite Element Method for Nonlinear Forced Vibrations of Circular Plates", AIAA Journal, Vol.23,1985,pp.1104-1110.

7. 김문영. "전단 변형을 고려한 평면 뼈대 구조물의 기하학적 비선형 해석" 대한 토목학회 학회지 발표예정.

8. 심재수, 함원식 "보의 자유 및 강제 진동의 비선형 해석" 경희 대학교 재료과학 기술연구소 연구 논문 제2집,1989.

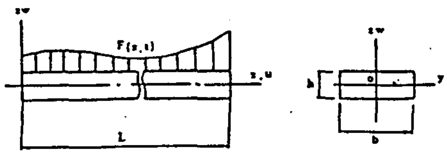


그림 1. A rectangular cross section beam.

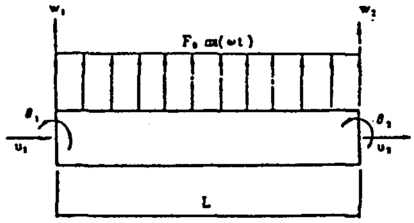


그림 2. A beam element.

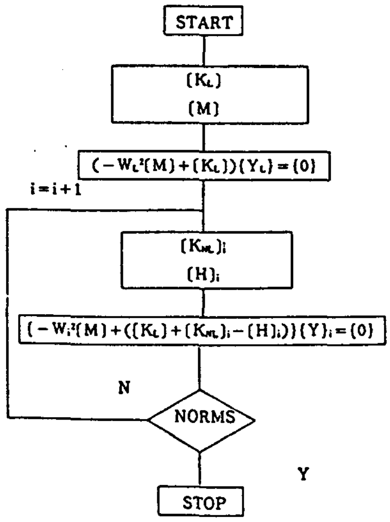


그림 3. flow chart

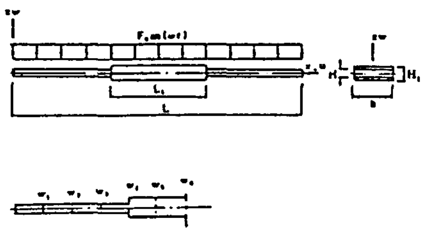


그림 4. A stepped beam.

Table. 1 Forced vibration frequency ratio w/w_L of a clamped beam with immovable axial ends for two different forcing terms (uniform load F_o = 1,321.64 lb/in)

B	corss section	elliptic (eq. 15)	perturbation (eq. 19)	F.E.M
B^*	uniform	i 1.3938	1.4042	
		j		
		k		1.2513
B_i^*	uniform	i 1.3770	1.3870	1.3287
		j 1.3522	1.3719	1.3285
		k 1.3512	1.3720	1.3309
B_i^*	stepped	i 1.3324	1.3405	1.2893
		j 1.3140	1.3293	1.2882
		k 1.3135	1.3294	1.2861

i : First iteration

J : Final iteration, $\phi(x)$ is from nonlinear free vibration.

k : Final iteration, $\phi(x)$ is from nonlinear forced vibration.

$$B^* = \frac{\int_0^L \phi dx}{\int_0^L \phi^2 dx} \qquad B_i^* = \frac{\int_{\ell i-1}^{\ell i} \phi i dx}{\int_{\ell i-1}^{\ell i} \phi^2 i dx}$$

Table. 2 Forced vibration frequency ratio w/w_L of hinged beam with immovable axial end for two different forcirg term (uniform load F_o=1,321.64 lb/in)

B	cross section	elliptic (eq. 15)	perturbation (eq.19)	F.E.M
B^*	uniform	i 2.2606	2.2996	
		j		
		k		1.9371
B_i^*	uniform	i 2.2606	2.2995	2.0394
		j 2.2123	2.2656	2.0379
		k 2.2131	2.2656	2.0301
B_i^*	stepped	i 2.1237	2.1570	1.9126
		j 2.0445	2.1005	1.8984
		k 2.0457	2.1006	1.8922

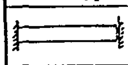
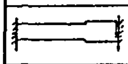
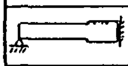
i : First iteration

J : Final iteration, $\phi(x)$ is from nonlinear free vibration

K : Final iteration, $\phi(x)$ is from nonlinear forced vibration

$$B^* = \frac{\int_0^L \phi dx}{\int_0^L \phi^2 dx} \qquad B_i^* = \frac{\int_{\ell i-1}^{\ell i} \phi i dx}{\int_{\ell i-1}^{\ell i} \phi_i^2 dx}$$

Table 3. Eigenvalues of beam under nonlinear free and forced vibration.

Eigenvalue	Free vibration				Forced vibration (F_o=1,321.64)		
Beam Type		W_L	W_1	W	W_L	W_1	W
	f_s=0	183.232	243.473	243.473	182.232	243.011	243.876
	f_s	182.134	242.042	242.034	182.134	241.577	241.582
	f_s=0	190.029	245.012	244.792	190.029	244.618	244.404
	f_s	188.693	243.392	243.209	188.693	242.996	242.819
	f_s=0	80.828	164.843	164.724	80.828	164.196	164.078
	f_s	80.701	164.744	164.64	80.701	164.098	163.969
	f_s=0	88.658	169.565	168.309	88.658	169.018	167.762
	f_s	88.490	169.425	168.172	88.490	168.878	167.626

W_L :Linear frequency(rad/s)
W_1 :Nonlinear frequency first iteration(rad/s)
W :Nonlinear frequency final iteration(rad/s)
fs :Shear factor (ν=0.3)

Table 4. Eigenvectors of beam under nonlinear free and forced vibration.

Beam Type.	eigenvector / vibation type	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6
Uniform Clamped Beam	Free vibration	1.02250	3.48798	6.52182	9.33583	11.29846	12.
	F_o=1321.64	1.15081	3.74737	6.77310	9.48472	11.34135	12.
Stepped Clamped Beam	Free vibration	1.26103	4.05449	7.19999	9.79701	11.42327	12.
	F_o=1321.64	1.26154	4.05560	7.20113	9.79771	11.42347	12.
Uniform hinged Beam	Free vibration	3.09523	5.98346	8.46950	10.38264	11.58821	12.
	F_o=1321.64	3.09636	5.98514	8.47108	10.38350	11.58846	12.
Stepped higed Beam	Free vibration	3.27148	6.29457	8.82306	10.61261	11.64403	12.
	F_o=1321.64	3.27265	6.29627	8.82453	10.61343	11.64427	12.

Appendix

$h_1=[2\beta^3-3\beta^2-12S\beta+1+12S]/(1+12S)$
$h_2=[\beta^3-2(1+3S)\beta^2++(1+6S)\beta]/(1+12S)$
$h_3=[-2\beta^3+=+3\beta^2++12S\beta]/(1+12S)$
$h_4=[\beta^3-(1-6S)\beta^2-6S\beta]/(1+12S)$
$k_1=[6\beta^2-6\beta]/(1+12S)$
$k_2=[3\beta^2-4(1+3S)\beta+1+12S]/(1+12S)$
$k_3=[-6\beta^2+6\beta]/(1+12S)$
$k_4=[3\beta^2-2(1-6S)\beta]/(1+12S)$

$a=EI/L$
$b=12EI/(TL^3)$
$c=6EI/(TL^2) \quad (23)$
$d=4(1+3S)EI/(TL)$
$e=2(1-6S)EI/(TL)$
$S=k_S EI/(GAL^2)$
$T=1+12S$

$a_1= EA/2T^2L^2\{(6/20+4S)A-(1/2+6S)B-(1+12S)C\}$
$a_2= EA/2T^2L\{(1/15+S)A-(1/12+S)B\}$
$a_3= -EA/2T^2L\{(1/10-S/2)A-(1/12+S)B\}$
$a_4= EA/4T^4L^3\{(1/7+24S/7+144S^2/5)A^2-(3/7+48S/5+72S^2)AB+(12/35+36S/5+48S^2)B^2-(24/35+72S/5+96S^2)AC+(6/5+24S+144^2)BC+(6/5+24S+144S^2)C^2\}$
$a_5= EA/4T^4L^2\{(1/28+31/35S+48S^2/5)A^2-(1/10+78S/35+108S^2/5)AB+(1/14+7S/5+12S^2)B^2-(1/7+14S/5+24S^2)AC+(1/5+16S/5+24S^2)BC+C^2/10\}$
$a_6=EA/4T^4L^2\{-(1/28+11/7S+48S^2/5)A^2+(1/14+24S/7+108S^2/5)AB-(1/35+9/5+12S^2)B^2+(2/35+54/15+24S^2)AC-(16S/5+24S^2)BC+C^2/10\}$
$a_7=EA/4T^4L\{(1/105+9S/35+132S^2/35)A^2-(11/420+22S/35+42S^2/5)AB+(2/105+2S/5+24S^2/5)B^2-(4/105+4S/5+48S^2/5)AC+(1/15+3S/5+12S^2)BC+(2/15+2S+12S^2)C^2\}$
$a_8=EA/4T^4L\{-(1/84+22S/35-84S^2/5)A^2+(11/420+7S/5-198S^2/5)AB-(3/210+4S/5-24S^2)B^2+(1/35+8S/5-48S^2)AC-(1/30+2S-60S^2)BC-(1/30+2S-36S^2)C^2\}$
$a_9=EA/4T^4L\{(1/14+S+132S^2/35)A^2-(13/84+76S/35+42S^2/5)AB+(3/35+6S/5+24S^2/5)B^2-(6/35+12S/5+48S^2/5)AC+(1/5+14S/5+12S^2)BC+(2/15+2S+12S^2)C^2\}$
$T=1+12S$
$A=6\omega_1+3L\theta_1-6\omega_2+3L\theta_2$
$B=6\omega_1+4(1+3S)L\theta_1-6\omega_2+2(1-6S)L\theta_2$
$C=12S\omega_1-(1+6S)L\theta_1-12S\omega_2+6SL\theta_2$
$a=AL/3$
$b=AL/6$

$c=(156/420+8.4S+48S^2)\rho ALT^2+1.2\rho ALT^2$
$d=(22/420+1.1S+6S^2)\rho AL^2T^2+(.1-6S)\rho IT^2$
$e=(54/420+3.6S+24S^2)\rho ALT^2-1.2\rho IT^2/L$
$f=(-13/420-0.9S-6S^2)\rho AL^2T^2+(0.1-6S)\rho IT^2$
$g=(4/420+.2+1.2S^2)\rho AL^3T^2+(4/30+2S+48S^2)\rho ILT^2$
$h=(3/420+.2S+1.2S^2)\rho AL^3T^2+(1/30+2S-24S^2)\rho ILT^2$

$a=156/420L\alpha$
$b=22/420L^2\alpha$
$c=54/420L\alpha$
$d=-13/420L^2\alpha$
$e=4/420L^3\alpha$
$f=-3/420L^3\alpha$
$\alpha=\beta/\gamma$

$$\beta=\frac{1}{(1+12S)}\{(0.5+6S)LW_1+(1/12+S)L^2\theta_1+(0.5+6S)LW_2-(1/12+S)L^2\theta_2\}$$

$$\gamma=\frac{1}{(1+12S)^2}\left[(W_1{}^2+W_2{}^2)(156/420+8.4S+48S^2)+L^2(\theta_1{}^2+\theta_2{}^2)(4/420+.2S+1.2S^2)+2W_1W_2(54/420+3.6S+24S^2)-2\theta_1\theta_2L^2(3/420+.02S+1.2S^2)+2(22/420+1.1S+6S^2)L(W_1\theta_1-W_2\theta_2)+2(13/420+.9S+6S^2)L(W_2\theta_1-W_1\theta_2)\right]$$