1996년도 봄
한국전산구조공학회 학술발표회 논문집

기하학적 비선형과 재료적 비선형을 고려한 입체트러스 해석에 관한 연구

A Study on Non-Linear Matrial and Geomertric Analysis of Space Truss

o 이재문* 권영환** 김화중***

ABSTRACT

The object of this study introducts simple formula being based on energy principle to investigate space truss's non-linear, and considers the relation of member's length, height rate and slenderness ratio to rise prymid truss's economic structure ability through each example.

This paper considered space truss's geometric non-linear behavior and material non-linear behavior, so acquired under result through as saying energy principle.

I. 序論

經濟가 發展함에 따라 넓은 空間을 갖는 復合性格을 지닌 構造物에 대한 要求가 높아지고 있으며, 그에 同伴하여 큰 面積을 제공할 수 있고 다양한 用度를 가진 立體트러스의 利用이 날로 增加하고 있다.

그러나 立體 트러스 構造物은 一般的으로 外觀上 美麗하고 經濟性에서 低廉한데 비하여 設計에 있어서 큰 費用이 드는 短點이 있다.

立體 트러스의 設計나 解析은 彈性범위에서 조차 原理上으로는 簡單하지만 計算양이 많기 때문에 實際로 複雜하다. 그리고 非彈性範圍에서의 擧動에 대한 考慮가 필요하다면 問題는 더욱 複雜해진다.

그러므로 本 硏究에서는 立體트러스의 幾何學的 非線形과 材料 非線形을 考慮한 擧動을 調査하기 위하여 에너지 停留原理에 基礎한 式을 利用하여 마이컴(PC-AT)으로 解析 可能한 프로그램을 開發하는데 그 目的이 있다.

II. 解析方法

II - 1.解析上의 基本假定

本 解析을 하는데 있어서 基本的인 假定은 다음과 같다.

①部材는 모두 線材로 취급한다.

②모든 節點은 핀 接合이라 假定한다.

③材料의 應力-變形關係는 그림 1에 나타내는 것을 使用한다.

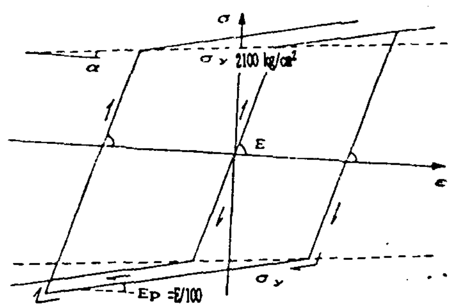

그림 1.철의 응력-변형관계의 모델

II-2. 解析手法의 槪要

本 論文에서 使用한 非線形 解析法은 에너지 增分의 停留原理에 基礎한 增分法 이다. 에너지 增分을 變位 增分의 2次 形式으로 表示한 變形度에너지 增分과 外力을 받는 部分이 變位하는 것과 같이 損失外力의 에너지 差를 考慮한다. 여기서 2次 形式의 變分原理를 應用하여 增分變形의 方程式을 誘導하고 Step-by-Step法 과 Iteration法으로 解析하는 方法이다.

* 正會員 慶北大學校 建築工學科 碩士過程
** 正會員 慶北大學校 建築工學科 副敎授
*** 正會員 慶北大學校 建築工學科 助敎授

III. 聯立 1次 方程式의 誘導

1個의 要素 m에 貯藏된 變形度 에너지 增分 $\Delta_m u$는 要素의 座票係에 대한 變位 增分의 2次 形式으로 다음 式과 같이 표시할 수 있다.

$$\Delta_m u = \frac{1}{2}\Delta_m u^T {}_m K \Delta_m + \Delta_m u^T {}_m f_{in} \qquad (1)$$

여기서

$\Delta_m u$: 要素의 座票係에 대한 節点變位 增分 벡타의 全體 벡타

$\Delta_m u^T$: $\Delta_m u$의 전치벡터

${}_m f_{in}$: 增分 計算前의 內部應力에 대해서 필요한 要素의 節点內力벡타

${}_m K$: 要素의 剛性 메트릭스

要素 m 의 要素座票係에 대한 變位增分 $\Delta_m u$는 IV章에서 說明하는 座標變換 메트릭스 ${}_m L^{-1}$ 에 의해 全構造體의 絶對座票係에 있어서 變位增分 $\Delta_m u$를 使用함으로써 다음 式으로 表示할 수 있다.

$$\Delta_m u = {}_m L^{-1} \Delta_m u \qquad (2)$$

(2)式의 變換을 考慮하면서 각 要素에 貯藏된 變形度 에너지의 總合을 구함으로써 全 構造體가 貯藏하는 變形度 에너지 增分 $\Delta_m u$가 구해진다.

$$\Delta_m u = \sum_m \Delta_m u = \frac{1}{2}\Delta_m u^T K_m \Delta u + \Delta_m u^T f_{in} \qquad (3)$$

한편, 外力의 포텐셜에너지 增分 ΔW_{ex}는 다음式으로 表示된다.

$$\Delta W_{ex} = \Delta U^T \cdot f_{ex} \qquad (4)$$

여기서

f_{ex} : 作用하는 全 節点外力벡타.

變位增分 ΔU 가 생긴 後의 포텐셜에너지 增分 $\Delta\Pi$는 다음式과 같이 Δu의 2次形式으로 表示된다.

$$\Delta\Pi = \Delta U - \Delta W_{ex}$$

$$= \frac{1}{2}\Delta_m u^T . K . \Delta_m u + \Delta_m u^T K f_{in} - \Delta_m u^T f_{ex} \qquad (5)$$

(5)式을 2次 形式의 變分 原理를 使用하여 任意의 $\delta\Delta U$ 에 대해 $\delta\Delta\Pi = 0$ 이라면, 다음式과 같은 聯立 1次 方程式을 구할 수 있다.

$$K\Delta U_G + f_{in} - f_{ex} = 0 \qquad (6)$$

(6) 式으로부터 1차 聯立 方程式을 풀어 ΔU_G를 구한다. 이 ΔU_G를 使用해 各 節点의 座標를 修正한다.

$$x_i = x_i + \Delta U_G \qquad (7)$$

$$y_i = y_i + \Delta V_G \qquad (8)$$

$$z_i = z_i + \Delta W_G \qquad (9)$$

ΔU_G : i 節点에 대한 增分變位의 X 方向 成分

ΔV_G : i 節点에 대한 增分變位의 Y 方向 成分

ΔW_G : i 節点에 대한 增分變位의 Z 方向 成分

IV. 部材의 剛性메트릭스와 內力벡타.

IV-1. 要素 座票係의 設定

本 解析法에는 Step 및 Iteration 의 計算을 행하고, 要素는 兩端의 各 節点間에 直線으로 位置시키는 것으로 變形은 要素間의 節点에 대하여 考慮한다. 이와 같이 各要素의 變形에 對하여, 各各 獨立으로 移動하는 要素의 座票係를 그림 (2)에 表示한 것과 같이 增分變形前의 要素의 兩斷部의 点 (i,j)를 X軸으로 정하고, 이것과 右手直交座票係를 構成하는 것과 같이 Y,Z 軸을 정한다.

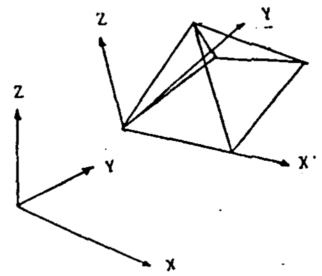

그림 2.단위좌표계

IV-2.變位增分 函數의 設定

要素의 降伏에 關係없이 要素의 X軸方向 變位를 ΔU, Y軸方向 變位를 ΔV, Z軸方向 變位를 ΔW로 두고 x,y,z 에 대해 1次式의 函數로 나타내면 다음 式으로 表示할 수 있다..

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \alpha_1 + \alpha_2 x \\ \Delta v(x) &= \alpha_3 + \alpha_4 x \\ \Delta w(x) &= \alpha_5 + \alpha_6 x \end{aligned} \qquad (10)$$

여기서

α: 變位 增分函數의 未定係數

IV-3.要素內部의 變形度 增分

各 要素에 대한 任意의 点(x,y,z) 上에서 要素軸方向의 變形度 增分 $\Delta\varepsilon_x$는 다음과 같이 表示할 수 있다.

$$\Delta\varepsilon x = d\Delta v/dx + \frac{1}{2}[(d\Delta u/dx)^2 + (d\Delta v/dx)^2 + (d\Delta w/dx)^2] \qquad (11)$$

IV-4.要素의 節点 變位 增分벡타와 未定係數벡타.

本 解析法에 使用하는 節点變位 增分벡타 ΔU는 다음式에表示된 成分을 갖는다.

$$\Delta U = \{\ \Delta U_i\ \Delta U_j\ \Delta V_i\ \Delta V_j\ \Delta W_i\ \Delta W_j\ \}^T \qquad (12)$$

여기서

i,j는 兩端의 節点番號이다.

이 要素의 節点變位벡타 ΔU 와 未定係數벡타 α 의 關係는 變位 增分函數에 要素 兩端의 座標値를 代入하여 만들어진 메트릭스 T에 의하여 다음의 式으로 表示할 수 있다.

$$\Delta_m U = T\cdot\alpha \qquad (13)$$

$$\Delta_m U\ T^{-1} = \alpha \qquad (14)$$

IV-5.變位의 微分과 未定係數 벡타.

變形度 에너지 增分과 必要한 要素內部의 變形度를 구하고, x 軸上에 대해 dΔU/dx,dΔV/dx,dΔW/dx 등의 變位의 導函數가 必要하다. 이것의 導函數는 變位函數를 微分하는 것이고 다음式과 같이 表示할 수 있다.

$$\frac{d\Delta U}{dx} = \alpha_2 \qquad (15)$$

$$\frac{d\Delta V}{dx} = \alpha_4 \qquad (16)$$

$$\frac{d\Delta W}{dx} = u_6 \qquad (17)$$

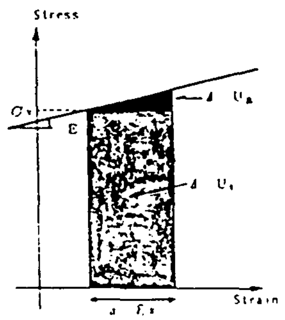

그림 3.요소에 저장된 변형도 에너지

IV-6.變形度에너지 增分의 計算

IV-1 ~ 5에서 敍述한 것으로 부터,變位增分 ${}_mU$가 생길 때 그림 3과 같이 1個의 要素가 貯藏하는 變形度 에너지 增分 $\Delta_m U$는 다음과 같이 구할 수 있다.

$${}_mU = {}_mU_1 + {}_mU_2 \qquad (18)$$

$$1)\ {}_mU_1 = \int\!\!\int\!\!\int_v \sigma_x(\Delta\varepsilon_x)d_x\,d_y\,d_z$$

$$= \int_l\int_A \sigma_x[(d\Delta u/dx)^2 + (d\Delta v/dx)^2 + (d\Delta w/dx)^2]d_A dx$$

$$= {}_mU_{11} + {}_mU_{12} + {}_mU_{13} + {}_mU_{14} \qquad (19)$$

$$① \ {}_mU_{11} = \int_l(\int_A\sigma_x d_A)(d\Delta u/dx)dx$$

$$= \Delta_m u^T{}_mT^{-1T}{}_m a_1 \qquad (20)$$

$$② \ {}_mU_{12} = \int_l(\int_A\sigma_x d_A)\tfrac{1}{2}(d\Delta u/dx)^2 d$$

$$= \tfrac{1}{2}\ \Delta_m u^T{}_mT^{-1T}{}_mA_1\ {}_mT^{-1}\ \Delta_m u \qquad (21)$$

$$③ \ {}_mU_{13} = \int_l(\int_A\sigma_x d_A)\tfrac{1}{2}(d\Delta v/dx)^2 dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\ \Delta_m u^T{}_mT^{-1T}{}_mA_2\ {}_mT^{-1}\ \Delta_m u \qquad (22)$$

$$④ \ {}_mU_{14} = \int_l(\int_A\sigma_x d_A)\tfrac{1}{2}(d\Delta w/dx)^2 d$$

$$= \tfrac{1}{2}\ \Delta_m u^T{}_mT^{-1T}{}_mA_3\ {}_mT^{-1}\ \Delta_m u \qquad (23)$$

$$2)\ {}_mU_2 = \int\!\!\int\!\!\int_v \tfrac{1}{2}\ E\ (\Delta\varepsilon_x)^2 d_x\,d_y\,d_z$$

$$= \int_l\int_A \tfrac{1}{2}\ E[(d\Delta u/dx) + \{(d\Delta u/dx)^2 + (d\Delta v/dx)^2 + (d\Delta w/dx)^2\}]^2 d_A dx \qquad (24)$$

$$① \ {}_mU_{21} = \tfrac{1}{2}\int_l(\int_A E\ d_A)(d\Delta u/dx)^2 dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\ \Delta_m u^T{}_mT^{-1T}{}_mA_3\ {}_mT^{-1}\ \Delta_m u \qquad (25)$$

여기서

A: 要素의 斷面積

E: 철근의 接線係數

I: 要素의 길이

(18) - (25)式 中에 있는 面積에 관한 積分은

$$\int_A\sigma_x dA \qquad \int_A\sigma_x y dA \qquad \int_A E y dA$$

을 包含하고 있지만 다음 例와 같이 簡單히 計算할 수 있다.

(例) 그림 4와 같이 要素 兩端의 面積 積分値가 P_i,P_j 이라면 材軸 方向에 대한 積分은 (26)式에 나타낸대로 簡單히 表示 할 수 있다.

그림 4.적분법

$$\int_A P\ dA = \ell/2\ (P_j + P_i)$$

$$\int_A Px dA = \ell^2/12(P_j - P_i) \qquad (26)$$

$$\int_A x^2 dA = \ell^3/24(P_j + P_i)$$

以上에서 計算한 ΔU의 合은 1個의 要素에 貯藏된 變形度 에너지 增分이 된다.

$$\Delta_m u = {}_m u_1 + {}_m u_2$$

$$= \Delta_m u^T\ fin + \Delta_m u^T({}_mK)\tfrac{1}{2}\Delta_m u \qquad (27)$$

여기서

$fin = {}_mT^{-1T}{}_m a_1$

fin : 要所의 內部應力에 서로 統一시켜 省略하기 위해 必要한 局部座標의 節点內力 벡타.

$$_mk = (_mT^{-1}{}_mA_1{}_mT^{-1} + {}_mT^{-1T}{}_mA_2{}_mT^{-1} + {}_mT^{-1T}{}_mA_3{}_mT^{-1} + {}_mT^{-1T}{}_mA_4{}_mT^{-1} \qquad (28)$$

여기서

$_mk$: 要所 m의 局部座標係에 대한 剛性 미트릭스

IV-7.座標變換 미트릭스

II章에서 正義한 絶對座票係에 대해서 各各의 節点에 대해 3個의 變位增分의 成分을 考慮한다. 要素의 座票係와 絶對座標의 變位增分과의 關係를 表示하고 다음式의 形態로 表示할 수 있다.

$$\Delta_m U = {}_mL^{-1}\ \Delta_m U \qquad (29)$$

여기서

$\Delta_m U = \{\ \Delta U_i\ \Delta U_j\ \Delta V_i\ \Delta V_j\ \Delta W_i\ \Delta W_j\ \}^T$

IV-8. 계산의 흐름

(11)式에 의하여 增分變位 $\Delta\varepsilon_x$ 가 구해지고 그것을 使用해서 各 要素의 兩端 變形및 應力을 修正하여 1 step 計算을 完了한다. 以上의 計算을 step-by-step 法으로 解析한다. 數値解析 흐름도는 아래에 表示 되어져 있다. 흐름도 中에서 $f_{in} = f_{ex}$ 를 調査하고 있는 部分은 本 論文에서 計算을 행할 때 $(f_{in} - f_{ex}) \times (f_{in} - f_{ex}) / (f_{in} - f_{IN}) \le 10^{-9}$ 을 使用한다.

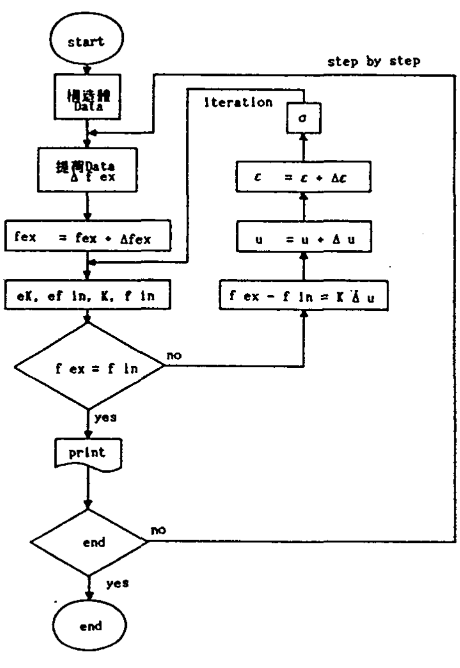

그림 5. 흐름도

V.解析對象 및 結果考察

ㅇ本 例는 그림 6에 表示한 形態의 立體트러스에서 스판은 24 × 24 m로 固定시키고 格子數,높이比,細長比를 各各 變化시키며, 中央節點의 最大變位를 12cm까지 考慮하여 立體트러스 上端部材의 各 節点에 같은 荷重을 加力하여 擧動을 解析하였다.

使用한 材料의 性質은 表 1과 같다. 境界條件은 下端 節点의 周邊에 位置한 것을 鉛直 支持하고 水平方向에는 下端의 節点을 그림 6에 表示한 것과 같이 拘束했다.

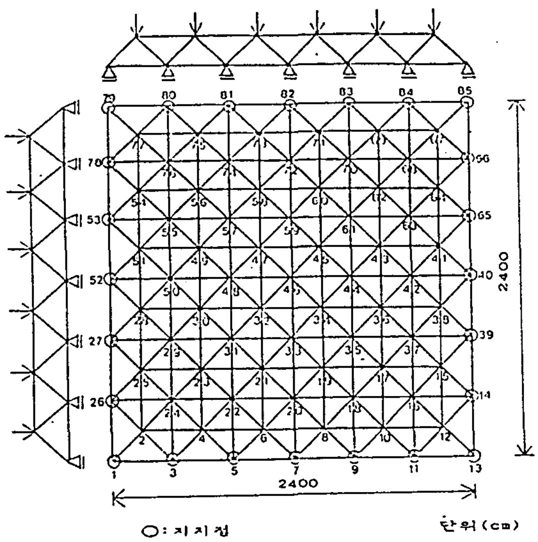

그림 6.격자수 6×6의 입체트러스

表 1. 재료정수

彈性剛性	塑性剛性
2100 t/cm²	21t/cm²

ㅇ위에서 論述한 方法에 의해서 얻어진 結果는 아래와 같다.

①스판 24×24m, 높이를 2m로 하고 格子數만 달리 했을 때 格子數가 5×5,5×6,6×6일때 中央節點에서의 耐力은 格子數 5×5를 1로 하였을 境遇 各各 5.9%, 17.6%의 差異가 남을 알 수 있었다.(그림 7 參照)

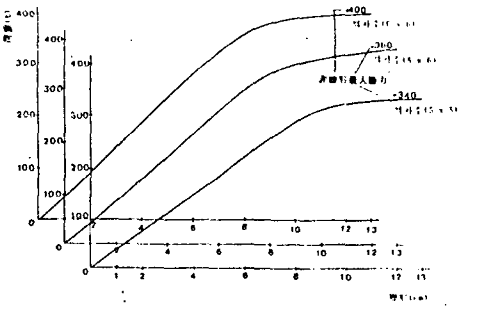

그림 7.격자수를 달리하였을 때 최대변형절점의 하중-변형곡선

②스판, 格子數를 同一하게 하고 높이만 變化시켰을 때 中央節點에서 耐力이 上當한 差異가 있음을 알 수 있었다.(그림 8 參照)

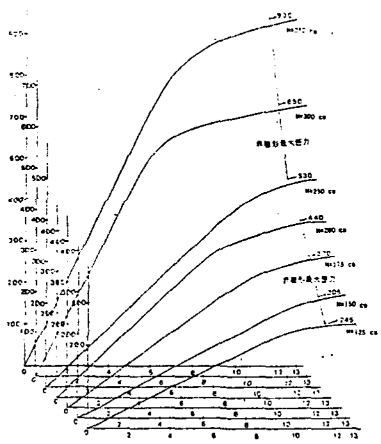

그림 8.높이를 달리하였을 때 최대변형절점의 하중-변형곡선

③細長比가 5%씩 增加함에 따라 中央節點에서의 最大變位는 약 10%의 耐力이 增加함을 알 수 있었다.(그림 9 參照)

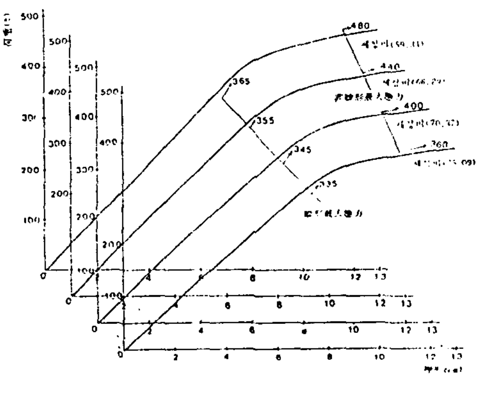

그림 9.세장비를 달리하였을 때 최대변형절점의 하중-변형곡선

VII. 結論

本 論文에서는 復層平面 立體트러스의 幾何學的 非線形과 材料的 非線形을 考慮하여 에너지 停留原理에 의한 解析을 통하여 다음과 같은 結果를 얻을 수 있었다.

1. 開發한 프로그램은 復層 平板 立體 트러스의 解析에 있어서 마이컴(PC-AT)으로도 充分히 計算 可能한 프로그램을 作成하였다.

2. 復層平面 立體 트러스의 例를 解析해 본 結果 결론적으로 같은 면적에서 正方形 입체트러스가 內力면에서 效率的이었고 높이比 및 細長比에 따라서도 上當한 差異가 있음을 알 수 있었다.

此後 硏究의 課題로는 立體트러스의 實驗에 의한 比較檢討가 必要하며,各 個材의 破壞와 挫屈을 考慮한 解析과 立體트러스의 耐震性에 대한 檢討가 必要하다.

參考文獻

1)D.S.Jagannathan, H.I.Epstein and P.D.Christiano; "Nonlinear analysis of reticulated space trusses",Journal of the Structural Devision,ASCE,Vol.101,No.St 12, pp.2461-2658, December 1975.

2)子田道生,中村 武,苦林 實:鐵滑筋違の履歷特性の定 その1 定式化關係の誘導一, 日本建築學會論文報,第 316號,pp.18-28,1982

3)半谷裕彦,用脫重也;立體トラス非線形解析マトリックス構造解析法研究發表論文集, pp.237-244,1971

4)和田,黑田,板田弘安,."繰り返し荷重た受ける鐵筋トリンクコ骨組の線材理論に基ついた 彈塑性解析法に關する研究"東京工業大學理工學研究科 修士學位論文 昭化 59年度修士論文