

최종호                      한영철  
한양대학교 전자통신공학과

## Performance Analysis of Differential Demodulation of GMSK

Choi Joong Ho                      Han Young Yeoul

Dept. of Electronic Communication Engineering, Hanyang Univ.

### ABSTRACT

A new demodulation scheme for differentially encoded Gaussian Filtered MSK(GMSK) signal is introduced and described. In the proposed differential detection method, the signal is sampled at the center of the time slot, at which the effect of the intersymbol interference is relatively smaller than the edge of the time slot. The proposed differential detector takes this advantage. The error rate performance of the differential detector has been numerically calculated in the fast fading encountered in the land mobile radio channels. A comparison of performance with the differential detector for MSK signal is given. Finally the possibility of improving performance employing nonredundant error correction is studied.

### I. 서론

육상 무선 통신에서는 페이딩(Fading), 비선형성(Nonlinearity)과 인접 채널간의 간섭을 줄이기 위해 정진폭(Constant envelope) 특성과 좁은 전력 스펙트럼을 가지는 변조 방식이 요구된다. 그 반면에서 GMSK는 육상 무선 통신에서 전력 효율이 좋은 디지털 변조 방식으로 제안되어 왔다<sup>[1]</sup>. MSK의 전력 스펙트럼은 변조 전 기저대역 저역 여파기(Baseband Low-Pass Filter)를 사용함으로써 줄어들 수 있다. 변조전의 가우시안(Gaussian) 필터링은 MSK의 정진폭 특성을 유지한채 대역외(Out-of-Band) 전력을 억제한다.

그 동안 시스템의 성능을 향상시키기 위해 많은 연구가 수행되어 왔다. 그 중 한 방법은 가우시안 필터링에 의해 생기는 성능 감소가 시간 간격의 끝에서보다 시간 간격의 중앙에서 더 작다는 것을 이용하는 것이다<sup>[2]</sup>.

사실 변조전의 인터링에 의해 생기는 ISI(Intersymbol Interferences)의 효과는 시간 간격의 끝에서 더 심하다. 지금까지 단순히 이 끝점이 최대로 눈이 개안(Eye Opening)되는 점이기 때문에 GMSK 동기 복조의 샘플링 순간으로 채택되어 왔다.

본 논문에서는 이런 점을 이용해 차동 부호화된 GMSK 신호의 차동 복조에서 샘플링 순간으로 시간 간격의 중앙을 사용할 것이다. 제안된 차동 복조기의 페이딩 채널하에서의 오류율 성능이 계산되었다. 본 논문에서 사용된 방법은 [3]에서의 듀오바이너리 MSK와 TFM의 오류율 성능 계산과 유사하다. 또한 비용장 오류 정정(Nonredundant Error Correction) 능력이 있는 차동 복조에 대한 성능 향상의 가능성이 조사되었다<sup>[1]</sup>.

본 논문은 다음 절에서 GMSK의 간단한 요약으로 시작하여 II 절에서는 차동 부호화된 GMSK 신호에 대한 차동 복조가 다루진다. IV 절에서는 페이딩 채널하에서의 오류율 성능이 계산된다. V 절에서는 계산된 결과를 제시하였다.

### II. GMSK 신호

정진폭 특성과 협대역 스펙트럼을 갖는 GMSK 변조는 MSK 변조기 전에 가우시안 기저 대역 저역 여파기를 부가시킴으로써 이룰 수 있다. 가우시안 기저 대역 저역 여파기의 임펄스 응답은

$$h(t) = A \sqrt{\frac{2\eta}{\ln 2}} B \exp \left\{ -\frac{3(\eta - Bt)^2}{\ln 2} \right\} \quad (1)$$

과 같은데 여기서 B는 3dB 대역폭이고 A는 상수이다. h(t)의 역푸리에변환(Inverse Fourier Transform)은 다음과 같다.

$$H(f) = A \exp \left\{ -\left[ \frac{f}{B} \right]^2 \frac{\ln 2}{2} \right\} \quad (2)$$

가우시안 여파기(Gaussian Filter)를 통과해 변조기의 입력이 되는 신호는

$$g(t) = \int_{-x}^x h(\tau) a(t-\tau) d\tau \quad (3)$$

이 되는데  $a(t)$ 는 단위 구형 펄스를 나타낸다. 변조기 출력인 GMSK 파형은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$s(t) = \cos(2\pi f_c t + \phi(t)) \quad (4)$$

여기서

$$\phi(t) = 2\pi f_d \int_{-\infty}^t \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t-nT) dt$$

$$a_n = \pm 1 \quad (5)$$

이고  $f_d$ 는 반송 주파수이며  $f_d$ 는 위상 편이 상수(Phase Deviation Constant)이다. GMSK의 경우는 변조지수(Modulation Index)는 0.5이며  $T$ 는 1 비트 간격이다.

MSK의 위상 변화를 시간에 대해 그려보면 단편적으로는 선형이 되어 각 비트 간격 동안 정확히  $\pi/2$ 만큼 증가하거나 감소하게 된다. 양의 기울기분 가진 선은 1을 나타내고 음의 기울기분 가진 선은 0을 나타낸다. 이런 MSK 송신단에서 가우시안 필터링을 하게 되면 시스템의 성능 감소를 유발하게 된다. 변조 전에 가우시안 저역 여파기를 통과한 디지털 데이터에는 심각한 ISI가 발생한다. 이 ISI는 비트 오류율 성능의 감소를 일으킨다.

예를 들어 입력 데이터 신호  $a_0, a_1, a_2, \dots$ 를 0111001...라 하고 차동 부호화된 신호  $a_0, a_1, a_2, \dots$ 를 11010001...라 하자. 이 신호에 의한 위상 경로(Phase Path)는 그림 1과 같다.

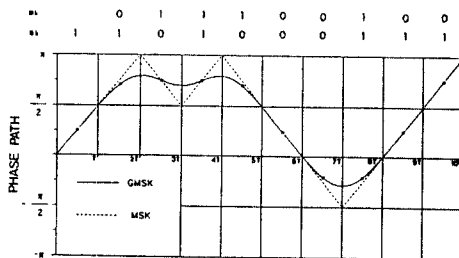


그림 1. GMSK의 위상 경로.

인접 심볼들로 인해 생기는 ISI는 샘플링 순간  $mT$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ )에 가장 크다. 한편 ISI의 영향은 검은 점들로 표시된 시간 간격의 중앙에서는 상대적으로 작다. 이 잇점을 GMSK 신호의 복조에 이용하게 된다. 그림 2는 가장 많은 ISI를 일으킬 수 있는  $\dots, 0, 0, 0, 1, 1, 1, \dots$  경우의 위상 변화를 나타낸다.

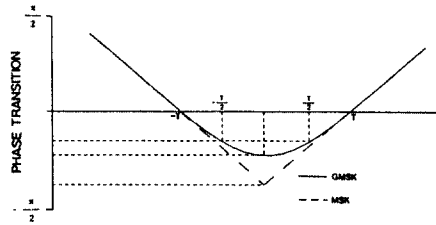


그림 2. 가장 나쁜 경우의 위상 변화.

### III. 시스템 구조

차동 부호화를 행하는 GMSK 변조기는 그림 3과 같다. 가우시안 저역 대역 여파기는 GMSK에서 정전폭 특성을 유지시키면서 대역의 전력 스펙트럼을 억제한다.

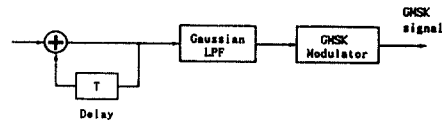


그림 3. GMSK 차동 변조기.

그림 4는  $(m + 0.5)T$ 의 샘플링 순간을 갖는 차동 복조기를 나타낸다. 이 샘플링 시간은 가우시안 필터링에 의한 ISI의 영향을 덜 받는다.

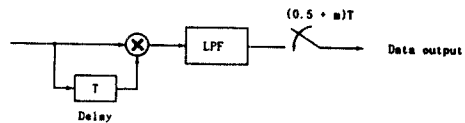


그림 4. 샘플링 시간  $t$ 가  $(m + 0.5)T$  인 GMSK 차동 복조기.

잡음과 페이딩이 존재할 경우 저역 여파기의 입력은

$$Z(t) = \cos[\omega_c t + \phi(t)] \cdot \cos[\omega_c(t - T) + \phi(t - T)]$$

$$= \frac{1}{2} \cos[\omega_c T + \phi(t) - \phi(t - T)] + \frac{1}{2} \cos[2\omega_c(t - T/2) + \phi(t) + \phi(t - T)] \quad (6)$$

이다. 여기서  $\omega_c T$ 는  $2\pi n$ 의 정수배이다. (6)식이 저역 여파기를 통과하면 다음 식이 된다.

$$w(t) = \int_{-\infty}^t \cos(\omega_c \tau) d\tau = \frac{1}{\omega_c} \sin(\omega_c t) \quad (17)$$

그리고  $w(m + 0.5T)$ 의 값은  $\pm 1$ 의 값을 가진다. 즉  $w(m + 0.5T) = 1$  또는  $-1$ 이다.

$$w(m + 0.5T) = \int_{-\infty}^{m + 0.5T} \cos(\omega_c \tau) d\tau = \frac{1}{\omega_c} \sin(\omega_c(m + 0.5T)) \quad (18)$$

샘플링 순간  $(m + 0.5T)$ 에서 차동 복조된 MSK 신호의 출력은

$$\begin{aligned} w(m + 0.5T) &= 0 & \text{when } m_k &= 0 \\ w(m + 0.5T) &= \pm 1 & \text{when } m_k &= 1 \end{aligned} \quad (19)$$

이다. 여기서의 프레쉬홀드(threshold) 값은 0.27이다. 이 값은 잡음과 페이딩이 있을 경우 MSK신호의 오류 확률을 계산할 때 사용될 것이다. 예를 들어 그림 1의 신호를 복조한다면 각 출력들은 표 1과 같다.

신호의 위상	위상차	$w(m+0.5T)$	출력된 신호
45°			
135°	90°	0	0
135°	0°	1	1
135°	0°	1	1
135°	0°	1	1
45°	-90°	0	0
-45°	-90°	0	0
-45°	0°	1	1
45°	90°	0	0
135°	90°	0	0

표 1. 그림 1의 신호 복조 과정.

$\phi_e(mT)$ 를 샘플링 순간  $mT$ 에서 가장 나쁜 경우에 MSK와 GMSK신호의 위상차라 하자.  $\phi_e(m + 0.5T)$ 는 샘플링 순간  $(m + 0.5T)$ 에서 가장 나쁜 경우에 MSK와 GMSK신호의 위상차라 하자.  $\phi_e(mT)$ 와  $\phi_e(m + 0.5T)$ 는  $\pi$ 에 따라 그림 5와 같이 그려질 수 있다. 일반적으로 MSK의 경우  $\phi_e(mT)$ 와  $\phi_e(m + 0.5T)$ 는 상대적으로  $\pi/2$ 와  $3\pi/4$ 이다.

[4]에서 MSK는 차동 복조기에 지연 소자를 첨가함으로써 단일 오류 정정 자기 직교 길쌈 부호(Single Error-Correcting Self-Orthogonal Convolution Code)의 데이터와 패리티(Parity)를 만들 수 있음을 알 수 있다. 본 논문에서 제안한 복조 방식 역시 그런 비동기

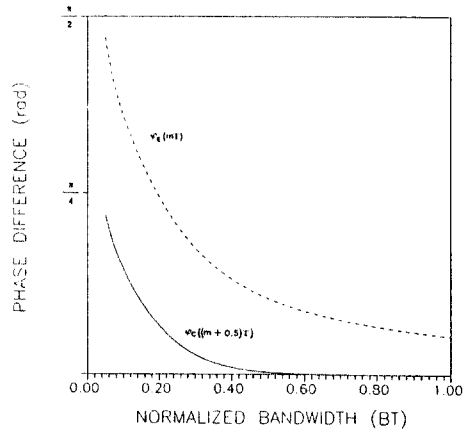
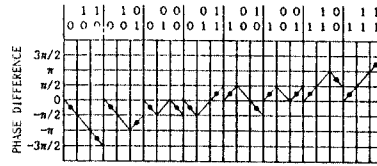


그림 5. 샘플링 순간에서의 GMSK와 MSK의 위상차.

고유 정정 능력을 가지고 있다. 그림 6은 점선 원으로 표시한 샘플링 순간  $(t = m + 0.5T)$ 에서 입력 데이터 차동 복조기 차동 복조기의 출력과의 관계를 나타낸다.



2 bits : input message sequence  
3 bits : differentially encoded sequence

(a)

Output of differential detector	Input bits
$\cos(\pm\pi) = -1$	1 1
$\cos(0) = 0$	0 1, 1 0
$\cos(\pm\pi/2) = +1$	0 0

(b)

그림 6. 샘플링 순간  $(t = m + 0.5T)$ 에서 입력 데이터와 2비트 차동 복조기 출력과의 관계 (a) 입력에 따른 위상 변화 (b) 입력에 대한 2비트 차동 복조기의 출력.

그림 6에서 2비트 차동 복조기의 출력이  $\cos(\pm\pi) = -1$ 이면 입력이 11이며 출력이  $\cos(0) = 0$ 이면 입력이 00인 것을 알 수 있다. 한편 2비트 차동 복조기의 출력이  $\cos(\pm\pi/2) = 0$ 이면 입력이 01이거나 10인 것을 알 수 있다.

한편 오류 정정 자기 직교 길쌈 부호의 패리티는 2비트 차동 복조기의 출력을 절댓치를 취해 인버터(0 → 1, 1 → 0)를 통과시킴으로써 얻을 수 있다.

정리하면, 오류 정정 성능은

고속 레이팅 채널을 통해 수신된 수신단의 입력  $s(t)$ 는

$$s(t) = x_s(t)\cos[\omega_c t + \phi(t)] - y_s(t)\sin[\omega_c t + \phi(t)] \quad (10)$$

이다. 여기서  $x_s(t)$ 와  $y_s(t)$ 는 평균치가 0인 독립적인 가우시안 저역 통과 프로세스(Process)이다. 수신기 입력단에 가우시안 잡음이 가해지고 차동 복조 전에 가우시안 대역 통과 필터링을 하면 차동 복조기의 입력 신호는

$$e(t) = s(t) + n(t) \quad (11)$$

이고 여기서

$$n(t) = x_n(t)\cos\omega_c t - y_n(t)\sin\omega_c t \quad (12)$$

이며  $x_n(t)$ ,  $y_n(t)$ 는 가우시안 스펙트럼을 갖는 평균치가 0인 독립적인 가우시안 저역 통과 프로세스이다.

$t = (m + 0.5)T$ 에서 샘플러의 출력은 다음과 같이 볼 수 있다<sup>(5)</sup>.

$$W(m + 0.5)T) = \frac{1}{2} (R_1^2 - R_2^2) \quad (13)$$

여기서  $R_1$ 과  $R_2$ 는 결합 레일리(Jointly Rayleigh) 분포이다<sup>(6)(7)</sup>.

$$P(R_1, R_2) = \frac{4R_1R_2}{\sigma^4(1-|\rho|^2)} \cdot I_0\left\{ \frac{2\rho R_1R_2}{\sigma^2(1-|\rho|^2)} \right\} \cdot \exp\left\{ -\frac{(1-\rho_1)R_1^2 + (1+\rho_1)R_2^2}{\sigma^2(1-|\rho|^2)} \right\} \quad (14)$$

$R_1, R_2 > 0$

여기서  $I_0(\cdot)$ 는 아래와 같은 1종 0차 modified Bessel 함수

$$I_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(t \cos\phi) d\phi \quad (15)$$

이고

$$\rho = \rho_r + j\rho_i \quad (16)$$

$$\sigma^2\rho = \sigma_s^2\rho_s \exp(j(\theta_1 - \theta_2)) + \sigma_n^2\rho_n \quad (17)$$

이며  $\theta_1 - \theta_2$ 는 원하는 신호 위상의 변화이다. 그리고  $\sigma_s^2$ 와  $\sigma_n^2$ 는 신호와 잡음의 평균 전력이고  $\rho_s$ 와  $\rho_n$ 는 신호와 잡음의 정규화된 자기 상관(Normalized Auto-correlation)함수이다. 또

$$\sigma^2 = \sigma_s^2 + \sigma_n^2 \quad (18)$$

$$\sigma_s^2\rho_s = \int_{-\infty}^{\infty} W_s(f) \exp(j2\pi fT) df \quad (19)$$

$$\sigma_n^2\rho_n = \int_{-\infty}^{\infty} W_n(f) \exp(j2\pi fT) df \quad (20)$$

이다. 여기서  $W_s(f)$ 와  $W_n(f)$ 는  $s(t)$ 와  $n(t)$ 의 기저 대역 전력 스펙트럼이다. 오류 확률을 계산하기 위해  $W_s(f)$ 와  $W_n(f)$ 를 다음과 같다고 가정하자.

$$W_s(f) = \begin{cases} \frac{\sigma_s^2}{\pi\sqrt{(f_D^2 - f^2)}}, & |f| \leq f_D \\ 0, & |f| > f_D \end{cases} \quad (21)$$

$$W_n(f) = \begin{cases} \frac{\sigma_n^2}{B\sqrt{\frac{\pi}{\ln 2}}} \exp\left\{-\left(\frac{f}{B}\right)^2 \ln 2\right\}, & |f| \leq f_D \\ 0, & |f| > f_D \end{cases} \quad (22)$$

여기서  $f_D$ 는 최대 도플러 주파수(Doppler Frequency)이다. 중간 주파수 여파기(IF Filter)와 변조전 기저 대역 여파기의 3dB 대역폭은 같다고 가정하자. 그러면  $\rho_s$ 와  $\rho_n$ 는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\rho_s = J_0(2\pi f_D T) \quad (23)$$

$$\rho_n = \exp\left\{ -\frac{(\pi B T)^2}{\ln 2} \right\} \quad (24)$$

여기서  $J_0(\cdot)$ 는 1종 0차 Bessel 함수이다.  $\rho$ 는

$$\rho = \frac{\Gamma}{\Gamma + 1} J_0(2\pi f_D T) \exp(j(\theta_1 - \theta_2)) + \frac{\Gamma}{\Gamma + 1} \exp\left\{ -\frac{(\pi B T)^2}{\ln 2} \right\} \quad (25)$$

$$\Gamma = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2}$$

이 된다.  $s(t)$ 에서 mark가 전송될 확률을  $p$ 라고 가정하면 오류 확률은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} P_e &= p \cdot \Pr[R_1^2 - R_2^2 < a^2 | \text{mark}] \\ &\quad + (1 - p) \cdot \Pr[R_1^2 - R_2^2 \geq a^2 | \text{space}] \\ &= p \int_{-a^2}^{a^2} P(z | \text{mark}) dz + (1 - p) \int_{a^2}^{\infty} P(z | \text{space}) dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \int_{R_2}^{\sqrt{R_2^2 + a^2}} P(R_1, R_2) dR_1 dR_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \int_0^{\sqrt{R_2^2 + a^2}} P(R_1, R_2) dR_1 dR_2 \end{aligned} \quad (26)$$

여기서  $z = R_1^2 - R_2^2$ 이며,  $1/\beta$ 은 드레쉬홀드값이나

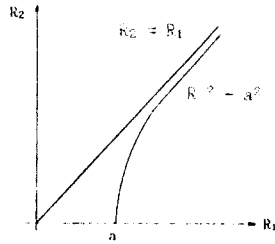


그림 7. 기본 영역.

(26)식은 그림 7의 적절한 적분영역에서 (14)식의 확률 밀도 함수  $P(R_1, R_2)$ 를 적분함으로써 계산될 수 있다. mark와 space의 확률이 같다고 가정하면 최고의 ISI를 일으키는 경우에 대해 오류 확률을 수치 해석을 이용하여 계산할 수 있다<sup>[9]</sup>. BT가 변함에 따라  $a^2$ 도 변하지만 샘플링 순간 ( $m + 0.5T$ )에서는 ISI의 효과가 상대적으로 적기 때문에  $a^2$ 의 변화도 작다. MSK의 경우 드레쉬홀드의 값은 0.5이다. BT가 0.05, 0.25, 0.5일 경우의 계산된 결과들을 그림 8, 9, 10에 보였다.

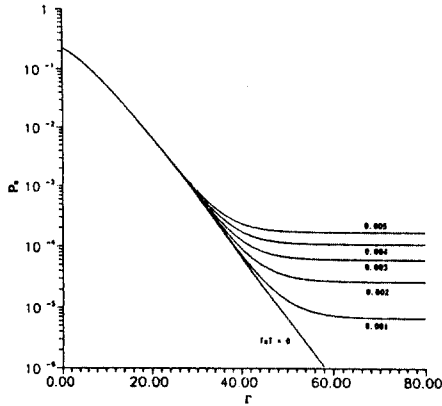


그림 8. BT = 0.05일때 차동 복조된 GMSK의 오류율

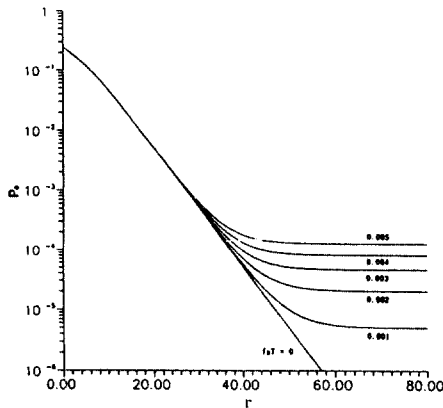


그림 9. BT = 0.25일때 차동 복조된 GMSK의 오류율

또한 MSK의 경우와 비교하기 위해 MSK일때의 결과를 그림 11에 보였다. 900MHz 대역에서 비트율 16Kbps으로 이동체 속도 0 ~ 100km/h에 해당하는 0 ~ 0.005의 페이딩률(fading Ratio)이 각 그림들에서 연속로 취해졌다.

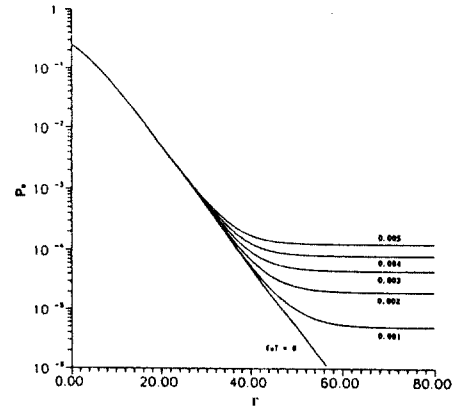


그림 10. BT = 0.5일때 차동 복조된 GMSK의 오류율

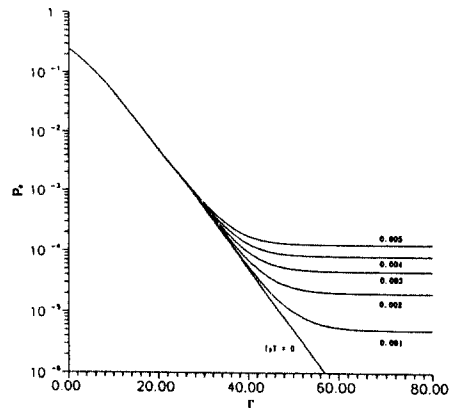


그림 11. 차동 복조된 MSK의 오류율

## V. 결론

본 논문에서는 GMSK 신호의 향상된 차동 복조 방식이 제시되었다. 이 방식은 변조전 가우시안 기저 대역 서역여파기에 의해 생기는 ISI의 영향을 덜 받도록 샘플링 순간을 시간 간격의 중앙으로 택하는 것이다. GMSK의 오류율 성능이 레일리 페이딩이 생기는 육상 무선 통신 채널에 대해 계산되었다. 계산된 결과는 ISI로 인해 GMSK의 오류율이 MSK보다 언제나 높다는 것을 보여 준다. 또한 BT의 값이 작을 수록 성능 감소가 더 크게 나타났다.

## REFERENCES

- [1] K. Murata and K. Hirade, "GMSK modulation for digital mobile telephony," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-29, pp.1044-1050, July, 1981.
- [2] M. Ichizuka and Y. Tagada, "Improved coherent detection of GMSK," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-32, No.2, pp.302-311, Mar.1984.
- [3] S. Elnoubi and S.C. Gupta, "Error rate performance of noncoherent detection of duobinary coded MSK and 1FM in mobile radio communication system," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. VT-30, pp.62-70, May, 1981.
- [4] T. Masamura, S. Samejima, Y. Morihiro and H. Fuketa, "Differential detection of MSK with nonredundant error correction," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-27, pp.912-918, June, 1979.
- [5] R.R. Anderson et al, "Differential detection of binary FM," *Bell Syst. Tech. J.*, pp.111-159, Jan. 1965.
- [6] K. Hirade, M. Ichizuk, F. Adachi and K. Otani, "Error-rate performance of digital FM with differential detection in land mobile radio channels," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. VT-28, No.3, pp.204-212, Aug.1979.
- [7] S.M. Elnoubi, "Analysis of GMSK with differential detection in land mobile radio channels," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. VT-35, No.4, pp.162-167, Nov.1986.
- [8] William B. Press, Brian P. Flannery, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, "Numerical Recipes in C," Cambridge University Press, New York, pp.137-140, 1988.
- [9] 최 종 호, 안 영 필, "3.5류에의 용력을 보유한 연속 위상 삼내의 주파수 차동 복조기," *한국 통신학회 차세대통신기술포럼 논문집*, pp.45-47, 1990.